S. S. Platonov

# About a structure of exponential monomials on some locally compact abelian groups

We describe the structure of some class of exponential monomials on some locally compact abelian groups. The main result of the paper is the next theorem.

*Let* $\widetilde{G}$ *and* $G$ *be locally compact abelian groups,* $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ *be a continuous surjective homomorphism and* $H$ *be a kernel of* $\alpha$*. If* $\alpha$ *is a an open maps from* $\widetilde{G}$ *to* $G$ *then any exponential monomial* $\Phi(t)$ *on the group* $\widetilde{G}$*, which satisfy the condition* $\Phi(t+h) = \Phi(t)\ \forall h \in H,\ t \in \widetilde{G}$*, can be presented in the form* $\Phi(t) = f(\alpha(t))$ *for some exponential monomial* $f(x)$ *on the group* $G$*.*

DOI: 10.15393/j3.art.2012.1661 **Issues of Analysis.** Vol. 1(19), No. 1, 2012

УДК 517.966

С. С. Платонов

# О СТРУКТУРЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ НА НЕКОТОРЫХ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

**Аннотация.** Получено описание некоторого класса экспоненциальных мономов на локально компактных абелевых группах.

**Ключевые слова:** *топологические группы, экспоненциальные мономы*

Пусть $G$ — локально компактная абелева группа с операцией $+$ и нулевым элементом 0. Экспоненциальной функцией или обобщенным характером на группе $G$ называется произвольный непрерывный гомоморфизм группы $G$ в мультипликативную группу ненулевых комплексных чисел. Непрерывные гомоморфизмы из группы $G$ в аддитивную группу комплексных чисел называются аддитивными функциями. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ называется полиномиальной, если $P$ — комплексный полином от $m$ переменных и $a_1, \dots, a_m$ — аддитивные функции. Произведение полиномиальной и экспоненциальной функций называется экспоненциальным мономом, а линейная комбинация экспоненциальных мономов называется экспоненциальным полиномом.

Приведем некоторые примеры.

1°. Пусть $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Любая экспоненциальная функция на $\mathbb{R}^n$ имеет вид $E(x) = e^{\lambda x}$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda x := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Любой экспоненциальный моном на $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = P(x)\, e^{\lambda x}$, где $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ — комплексный полином от $n$ переменных.

2°. Пусть $G = \mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$. Элементы из $\mathbb{Z}^n$ имеют вид $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}_* \times \dots \times \mathbb{C}_*$ — декартово произведение $n$ экземпляров множества $\mathbb{C}_*$. Для любых $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n$

и $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ пусть $z^x := z_1^{x_1} \dots z_n^{x_n}$. Любая экспоненциальная функция на группе $\mathbb{Z}^n$ имеет вид $E(x) = z^x$ для некоторого $z \in \mathbb{C}_*^n$, а экспоненциальный моном имеет вид $f(x) = P(x)\, z^x$, где $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$ — комплексный полином от $n$ переменных.

$3^\circ$. Если группа $G$ компактная, $E(x)$ — экспоненциальная функция на на группе $G$, то $|E(x)| \equiv 1$, следовательно $E$ является непрерывным гомоморфизмом из группы $G$ в группу $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, т. е. $E$ является обычным характером группы $G$. Любая аддитивная функция на компактной абелевой группе тождественно равна 0, поэтому любой экспоненциальный моном имеет вид $f(x) = \lambda\, E(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $E(x)$ — некоторый характер.

Важным классом задач, в которых используются экспоненциальные мономы на группах, являются задачи о спектральном синтезе на группах. Приведем описание таких задач.

Пусть $G$ — локально компактная абелева группа, $\mathcal{F}$ — топологическое векторное пространство, состоящее из комплекснозначных функций на $G$. Будем называть пространство $\mathcal{F}$ трансляционно инвариантным, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y : f(x) \mapsto f(x+y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, y \in G,$$

и все операторы $\tau_y$ являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется инвариантным подпространством, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Пусть $\mathcal{F}$ — трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе $G$, $\mathcal{H}$ — инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

**Определение 1.** *Инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ экспоненциальных мономов. В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный синтез, если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.*

Задачам о спектральном синтезе на группах посвящено много работ (см., например, [1]–[11] ). В этих работах изучаются вопросы справедливости (или несправедливости) спектрального синтеза для различных конкретных групп $G$ и функциональных пространств $\mathcal{F}$. Важную роль в таких задачах играют вопросы о структуре экспоненциальных мономов.

Пусть $\widetilde{G}$ и $G$ — локально компактные абелевы группы, $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — сюръективный гомоморфизм группы $\widetilde{G}$ на группу $G$ (все гомоморфизмы топологических групп предполагаются непрерывными). Для любого топологического пространства $X$ обозначим через $C(X)$ множество всех непрерывных комплекснозначных функций на $X$, в частности, возникают множества $C(G)$ и $C(\widetilde{G})$. Пусть $\Lambda : C(G) \mapsto C(\widetilde{G})$ — отображение, сопоставляющее каждой функции $f(x) \in C(G)$, $x \in G$ функцию

$$\Lambda(f)(t) = \widetilde{f}(t) := f(\alpha(t)) \in C(\widetilde{G}), \quad t \in \widetilde{G}. \tag{1}$$

Через $H$ обозначим ядро гомоморфизма $\alpha$, т. е. $H = \ker \alpha := \{t \in \widetilde{G} : \alpha(t) = 0\}$. Тогда $H$ является замкнутой подгруппой группы $\widetilde{G}$.

Через $C_H(\widetilde{G})$ обозначим множество функций $\Phi(t) \in C(\widetilde{G})$, удовлетворяющих условию

$$\Phi(t + h) = \Phi(t) \quad \forall h \in H, \, t \in \widetilde{G}. \tag{2}$$

Очевидно, что $\Lambda(C(G)) \subseteq C_H(\widetilde{G})$.

Если $e(x)$ — экспоненциальная функция на группе $G$, а $a(x)$ — аддитивная функция на группе $G$, то функции $\widetilde{e}(t) = e(\alpha(t))$ и $\widetilde{a}(t) = a(\alpha(t))$ будут соответственно экспоненциальной и аддитивной функциями на группе $\widetilde{G}$. Из этого вытекает, что если $f(x)$ — экспоненциальный моном на группе $G$, то функция $\widetilde{f}(t) = f(\alpha(t))$ будет экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$ и, кроме того, $\widetilde{f} \in C_H(\widetilde{G})$.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное утверждение — если $\Phi(t) \in C_H(\widetilde{G})$ и $\Phi(t)$ является экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$, то можно ли $\Phi(t)$ представить в виде $\Phi(t) = f(\alpha(t))$ для некоторого экспоненциального монома $f(x)$ на группе $G$?

Как показывает приведенный ниже пример, в общем случае это утверждение неверно.

**Пример.** Пусть группа $G$ совпадает с группой $\mathbb{R}$ с обычной метрической топологией, а $\widetilde{G}$ совпадает с группой $\mathbb{R}$, которая снабжается дискретной топологией. Пусть $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — тождественное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Тогда $H = \{0\}$, множество $C(G)$ состоит из всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$, а множество $C(\widetilde{G})$ состоит из всех комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$. Хорошо известно, что на $\mathbb{R}$ существуют аддитивные функции, которые не являются непрерывными в метрической топологии (но, разумеется, являются непрерывными в дискретной топологии). Любая такая функция $\Phi(t)$ является экспоненциальным мономом на группе $\widetilde{G}$, но не существует экспоненциального монома $f$ на группе $G$, для которого $\Phi(t) = f(\alpha(t))$, так как функция $f(\alpha(t))$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в метрической топологии.

Достаточное условие для справедливости обратного утверждения получено в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Пусть $\widetilde{G}$ и $G$ — локально компактные абелевы группы, $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ — непрерывный сюръективный гомоморфизм и $H$ — ядро гомоморфизма $\alpha$. Если $\alpha$ является открытым отображением $\widetilde{G}$ на $G$, то любой экспоненциальный моном $\Phi(t)$ на группе $\widetilde{G}$, удовлетворяющий условию (2), можно представить в виде $\Phi(t) = f(\alpha(t))$ для некоторого экспоненциально монома $f(x)$ на группе $G$.*

**Замечание.** Для широкого класса топологических групп любой непрерывный сюръективный гомоморфизм оказывается открытым. Так известно, что если $\widetilde{G}$ и $G$ — локально компактные топологические группы и группа $\widetilde{G}$ представима в виде счетного объединения компактных подмножеств, то любой непрерывный сюръективный гомоморфизм $\alpha : \widetilde{G} \mapsto G$ является открытым отображением (см. [12, гл. 3, § 20, теорема 12].

Доказательство теоремы 1 является основной целью настоящей работы. Отметим, что для случая, когда $\widetilde{G}$ и $G$ — дискретные абелевы группы, краткий набросок доказательства теоремы 1 содержится в книге [6] (см. [6, доказательство теоремы 2.24]). Доказательство теоремы 1 настоящей работы годится, в частности, и для дискретных абелевых групп, но основано на других методах.

Предварительно рассмотрим некоторые вспомогательные утверждения. Всюду предполагается, что выполнены условия теоремы 1. Отображение $\Lambda : C(G) \mapsto C_H(\widetilde{G})$ определено формулой (1).

**Лемма 1.** $\Lambda(C(G)) = C_H(\widetilde{G})$.

**Доказательство.** Включение $\Lambda(C(G)) \subseteq C_H(\widetilde{G})$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\Phi(t) \in C_H(\widetilde{G})$. Из условия (2) следует, что можно корректно определить функцию $f(x)$ на $G$ равенством

$$f(x) := \Phi(t) \quad \forall t \in \alpha^{-1}(x).$$

Тогда $\Phi(t) = f(\alpha(t))$. Проверим, что $f(x) \in C(G)$.

Пусть $U$ — произвольное открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что $f^{-1}(U) = \alpha(\Phi^{-1}(U))$. Так как $\Phi$ — непрерывная функция, то множество $\Phi^{-1}(U)$ открыто в $\widetilde{G}$, а так как $\alpha$ — открытое отображение, то множество $\alpha(\Phi^{-1}(U))$ открыто в $G$. Следовательно подмножество $f^{-1}(U)$ открыто в $G$, откуда вытекает, что $f \in C(G)$. $\square$

**Лемма 2.** *Если $e(t)$ — экспоненциальная функция на группе $\widetilde{G}$, принадлежащая классу $C_H(\widetilde{G})$, то $e(t) = \varepsilon(\alpha(t))$ для некоторой экспоненциальной функции $\varepsilon(x)$ на группе $G$.*

**Доказательство.** По лемме 1 функцию $e(t)$ можно представить в виде $e(t) = \varepsilon(\alpha(t))$ для некоторой функции $\varepsilon(x) \in C(G)$. Проверим, что $\varepsilon(x)$ — экспоненциальная функция.

Пусть $x, y \in G$. Из сюръективности отображения $\alpha$ следует, что $x = \alpha(t)$, $y = \alpha(s)$ для некоторых $t, s \in \widetilde{G}$. Тогда, пользуясь тем, что $\alpha$ — гомоморфизм, а $e$ — экспоненциальная функция, получим

$$\begin{aligned}\varepsilon(x+y) =& \varepsilon(\alpha(t)+\alpha(s)) = \varepsilon(\alpha(t+s)) = e(t+s) = \\ &= e(t)e(s) = \varepsilon(\alpha(t))\varepsilon(\alpha(s)) = \varepsilon(x)\varepsilon(y),\end{aligned}$$

то есть $\varepsilon$ является экспоненциальной функцией на группе $G$. $\square$

**Лемма 3.** *Если $a(t)$ — аддитивная функция на группе $\widetilde{G}$ и $a \in C_H(\widetilde{G})$, то ее можно представить в виде $a(t) = b(\alpha(t))$ для некоторой аддитивной функции $b(x)$ на группе $G$.*

**Доказательство.** По лемме 1 функцию $a(t)$ можно представить в виде $a(t) = b(\alpha(t))$ для некоторой функции $b(x) \in C(G)$. Проверим, что $b$ — аддитивная функция.

Пусть $x, y \in G$ и $x = \alpha(t)$, $y = \alpha(s)$ для некоторых $t, s \in \widetilde{G}$. Тогда

$$\begin{aligned}&b(x+y) = b(\alpha(t)+\alpha(s)) = b(\alpha(t+s)) = a(t+s) = \\ &= a(t)+a(s) = b(\alpha(t)) + b(\alpha(s) = b(x) + b(y). \square\end{aligned}$$

Для любой функции $f \in C(\widetilde{G})$ обозначим через $L(f)$ линейную оболочку всех функций вида $(\tau_s f)(t) = f(t+s)$ для любых $s \in \widetilde{G}$. Очевидно, что если $f \in C_H(\widetilde{G})$, то $L(f) \subseteq C_H(\widetilde{G})$.

**Лемма 4.** *Пусть $f(t) = e(t)\,p(t)$ — экспоненциальный моном на группе $\widetilde{G}$, где $e(t)$ — экспоненциальная функция, $p(t)$ — полиномиальная* *функция. Тогда экспоненциальная функция $e(t)$ содержится в множестве $L(f)$.*

**Доказательство.** Очевидно, что любая функция из $L(f)$ имеет вид

$$g(t) = e(t)\,Q(a_1(t), \dots, a_m(t)), \tag{4}$$

где $Q(u_1, \dots, u_m)$ — некоторый полином, $a_1(t), \dots, a_m(t)$ — аддитивные функции на $\widetilde{G}$. Пусть $N = \deg Q$ — степень полинома $Q$. Среди всех функций из множества $L(f)$ выберем ненулевую функцию $g(t)$, представимую в виде (4) с минимально возможной степенью $N$. Если $N = 0$, то $e(t) \in L(f)$, и лемма доказана. Предположим, что $N > 0$. Так как пространство $L(f)$ трансляционно инвариантное, то в $L(f)$ содержится и функция

$$g(t+s) = e(t+s)\,q(t+s) = e(t)\,e(s)\,Q(a_1(t) + a_1(s), \dots, a_m(t) + a_m(s))$$

для любого $s \in \widetilde{G}$. Так как функция $q(t)$ не постоянная, то найдется $s \in \widetilde{G}$, такое, что $q(t+s) \not\equiv q(t)$. Тогда в пространстве $L(f)$ содержится ненулевая функция

$$\frac{1}{e(s)} g(t+s) - g(t) = e(t)\,r(t),$$

где $r(t) = R(a_1(t), \dots, a_m(t))$, а $R(u_1, \dots, u_m) = Q(u_1 + a_1(s), \dots, u_m + a_m(s)) - Q(u_1, \dots, u_m)$ — полином степени меньше $N$, что противоречит предположениям $N > 0$ и минимальности $N$. $\square$

**Следствие 1.** *Если экспоненциальный моном $f(t) = e(t)\,p(t)$ ($e(t)$ — экспоненциальная функция, $p(t)$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$) принадлежит классу $C_H(\widetilde{G})$, то $e(t) \in C_H(\widetilde{G})$ и $p(t) \in C_H(\widetilde{G})$.*

**Доказательство.** Если $f \in C_H(\widetilde{G})$, то $L(f) \subseteq C_H(\widetilde{G})$. По лемме 4 $e(t) \in L(f)$, поэтому $e(t) \in C_H(\widetilde{G})$. Так как функции $f(t)$ и $e(t)$ содержатся в $C_H(\widetilde{G})$, то и функция $p(t) = \frac{1}{e(t)} f(t)$ содержится в $C_H(\widetilde{G})$. $\square$

Пусть $p(t) = P(a_1(t), \dots, a_m(t))$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, $P(u_1, \dots, u_m)$ — комплексный полином. Представим полином $P$ в виде суммы однородных полиномов

$$P(u_1, \dots, u_m) = \sum_{j=0}^{N} P_j(u_1, \dots, u_m),$$

где $P_j(u_1, \ldots, u_m)$ — однородный полином степени $j$. Пусть $p_j(t) = P_j(a_1(t), \ldots, a_m(t))$. Будем называть функции $p_j(t)$ однородными компонентами функции $p(t)$ степени $j$.

**Лемма 5.** *Если полиномиальная функция $p(t)$ принадлежит классу $C_H(\widetilde{G})$, то и все ее однородные компоненты $p_j(t)$ принадлежат классу $C_H(\widetilde{G})$.*

**Доказательство.** Очевидно, что если $p(t) \in C_H(\widetilde{G})$, то и функции $p(kt)$ принадлежат $C_H(\widetilde{G})$ для любого $k \in \mathbb{N}$ (здесь $kt = t + \cdots + t$ — сумма $k$ элементов $t \in \widetilde{G}$).

Подставляя в равенство

$$p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_N(t) = p(t)$$

$kt$ вместо $t$ и пользуясь однородностью функций $p_j(t)$, получим

$$p_0(t) + kp_1(t) + \cdots + k^N p_N(t) = p(kt). \tag{5}$$

Пусть $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$ — произвольные попарно различные натуральные числа. Подставляя эти числа вместо $k$ в (5), получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_N(t) & = & p(t), \\ p_0(t) + \alpha_1 p_1(t) + \cdots + \alpha_1^N p_N(t) & = & p(\alpha_1 t), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ p_0(t) + \alpha_N p_1(t) + \cdots + \alpha_N^N p_N(t) & = & p(\alpha_N t). \end{array}\right. \tag{6}$$

Если рассматривать (6) как систему линейных уравнений относительно $p_0(t), \ldots, p_N(t)$, то определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^N \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 1 & \alpha_N & \ldots & \alpha_N^N \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Поэтому из системы (6) можно выразить функции $p_j(t)$ как линейные комбинации функций $p(t), p(\alpha_1 t), \ldots, p(\alpha_N t)$. Следовательно $p_j(t) \in C_H(\widetilde{G})$ при $j = 0, 1, \ldots, N$. $\square$

Пусть $p(t) = P(a_1(t), \ldots, a_m(t))$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, где $P(u_1, \ldots, u_m)$ — комплексный полином от $m$ переменных, $a_1(t), \ldots, a_m(t)$ — аддитивные функции. Если $P(u_1, \ldots, u_m)$ —

однородный полином степени $k$, то будем говорить, что $p(t)$ — однородная полиномиальная функция степени $k$. Будем использовать обозначение

$$(\partial_j p)(t) := \frac{\partial P}{\partial u_j}(a_1(t), \ldots, a_m(t))$$

и будем называть функции $\partial_j p$ производными от функции $p$.

**Лемма 6.** *Пусть $p(t) = P(a_1(t), \ldots, a_m(t))$ — однородная полиномиальная функция, и пусть аддитивные функции $a_1(t), \ldots, a_m(t)$ линейно независимы. Тогда, если $p(t) \in C_H(\widetilde{G})$, то и все производные функции $\partial_j p(t)$ принадлежат пространству $C_H(\widetilde{G})$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

**Доказательство.** Пусть $u_1, \ldots u_m, v_1, \ldots, v_m$ — независимые переменные. Из формулы Тейлора следует, что

$$\begin{gathered} P(u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m) = \\ = P(u_1, \ldots, u_m) + \textstyle\sum_{j=1}^m v_j \, \frac{\partial P}{\partial u_j}(u_1, \ldots, u_m) + \ldots, \end{gathered} \tag{7}$$

где многоточие означает слагаемые степени $\geq 2$ по переменным $v_i$. Из (7) следует, что для любого $s \in \widetilde{G}$ справедливо равенство

$$\begin{gathered} p(t + s) = P(a_1(t) + a_1(s), \ldots, a_m(t) + \ldots a_m(s)) = \\ = p(t) + \textstyle\sum_{j=1}^m a_j(s) \, \partial_j p(t) + \ldots. \end{gathered} \tag{8}$$

Так как полиномиальная функция $(\tau_s p)(t) = p(t + s)$ принадлежит множеству $C_H(\widetilde{G})$, то по лемме 5 все ее однородные компоненты принадлежат этому множеству. Если $P(u_1, \ldots, u_m)$ — однородный многочлен степени $k$, то из (7) и (8) вытекает, что однородной компонентой функции $\tau_s p$ степени $(k-1)$ является функция

$$(\tau_s p)_{k-1}(t) = \sum_{j=1}^m a_j(s) \, \partial_j p(t). \tag{9}$$

Из того, что функция $(\tau_s p)_{k-1}$ принадлежит множеству $C_H(\widetilde{G})$, следует

$$(\tau_s p)_{k-1}(t + h) = (\tau_s p)_{k-1}(t) \quad \forall h \in H. \tag{10}$$

С учетом (9), равенство (10) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^m a_j(s) \, (\partial_j p(t + h) - \partial_j p(t)) = 0 \quad \forall s \in \widetilde{G}, \forall h \in H. \tag{11}$$

Так как функции $a_j(s)$ линейно независимые, то из (11) следует, что

$$\partial_j p(t+h) = \partial_j p(t) \quad \forall h \in H,$$

откуда вытекает, что $\partial_j p \in C_H(\widetilde{G})$. $\square$

**Лемма 7.** *Пусть $p(t)$ — однородная полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, принадлежащая пространству $C_H(\widetilde{G})$. Тогда функцию $p(t)$ можно представить в виде $p(t) = q(\alpha(t)$, где $q(x)$ — некоторая полиномиальная функция на группе $G$.*

**Доказательство.** Пусть $p(t) = P(a_1(t), \dots, a_m(t)) \in C_H(\widetilde{G})$, где $P(u_1, \dots, u_m)$ — однородный полином степени $k$, $a_1(t), \dots, a_m(t)$ — аддитивные функции на группе $\widetilde{G}$. Без ограничения общности можно считать, что функции $a_1, \dots, a_m$ линейно независимы.

Требуется доказать, что существует полиномиальная функция $q(x)$ на группе $G$, такая, что $p(t) = q(\alpha(t)$. Будем доказывать это утверждение индукцией по $k$. При $k = 0$ утверждение очевидно. Пусть $k \geq 1$ и предположим, что утверждение верно для однородных полиномиальных функций из $C_H(\widetilde{G})$ степени меньше $k$.

Так как $P(u_1, \dots, u_m)$ — однородный полином степени $k$, то справедливо тождество

$$\sum_{j=1}^{m} u_j \frac{\partial P}{\partial u_j}(u_1, \dots, u_m) = kP(u_1, \dots, u_m). \tag{12}$$

Подставляя в (12) функции $a_j(t)$ вместо $u_j$, получим

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(t) \partial_j p(t) = kp(t). \tag{13}$$

Из системы функций $\partial_1 p(t), \dots, \partial_m p(t)$ выберем максимальную линейно независимую подсистему. Обозначим эти линейно независимые функции $p_1(t), \dots, p_l(t)$, тогда каждую функцию $\partial_j p(t)$, $j = 1, \dots, m$, можно представить в виде линейной комбинации:

$$\partial_j p(t) = \sum_{s=1}^{l} \lambda_{js} p_s(t), \quad \lambda_{js} \in \mathbb{C}.$$

Подставляя эти линейные комбинации в (13), получим

$$\sum_{j=1}^{m} a_j(t) \left( \sum_{s=1}^{l} \lambda_{js} p_s(t) \right) = kp(t). \tag{14}$$

Равенство (14) можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{l} A_s(t) p_s(t) = kp(t), \tag{15}$$

где

$$A_s(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_{js} a_j(t)$$

— аддитивные функции на группе $\widetilde{G}$. Подставим в (5) $t+h$ вместо $t$ ($h \in H$), тогда, учитывая, что $p_s \in C_H(\widetilde{G})$ (по лемме 6) и функции $A_s(t)$ аддитивные, получим

$$\sum_{s=1}^{l} (A_s(t) + A_s(h)) p_s(t) = kp(t). \tag{16}$$

Вычитая из равенства (16) равенство (15), получаем тождество

$$\sum_{s=1}^{l} A_s(h) p_s(t) = 0 \quad \forall h \in H,\, t \in \widetilde{G}. \tag{17}$$

Так как функции $p_s(t)$ линейно независимые, то из (17) следует, что $A_s(h) = 0$ при $h \in H$, т. е. аддитивные функции $A_s(t)$ принадлежат классу $C_H(\widetilde{G})$. Тогда, по лемме 3, $A_s(t)$ можно представить в виде $A_s(t) = B_s(\alpha(t))$, где $B_s(x)$ — некоторые аддитивные функции на группе $G$.

Так как $p_s(t)$ — однородная полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$ степени меньше $k$ и $p_s(t) \in C_H(\widetilde{G})$, то по предположению индукции $p_s(t) = q_s(\alpha(t))$, где $q_s(x)$ — некоторая полиномиальная функция на группе $G$. Окончательно из (15) получим, что

$$p(t) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{l} B_s(\alpha(t)) q_s(\alpha(t)) = q(\alpha(t)),$$

где

$$q(x) = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{l} B_s(x) q_s(x)$$

— полиномиальная функция на группе $G$. $\square$

**Следствие 2.** *Если $p(t)$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$ и $p \in C_H(\widetilde{G})$, то функцию $p(t)$ можно представить в виде $p(t) = q(\alpha(t))$, где $q(x)$ — некоторая полиномиальная функция на группе $G$.*

**Доказательство.** Представим полиномиальную функцию $p(t)$ в виде суммы однородных полиномиальных функций

$$p(t) = \sum_{j=1}^{N} p_j(t), \tag{18}$$

где $p_j$ — однородная полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$ степени $j$. Тогда, по лемме 6, $p_j \in C_H(\widetilde{G})$, откуда, по лемме 7, $p_j(t) = q_j(\alpha(t))$ для некоторой полиномиальной функции $q_j(x)$ на группе $G$. С учетом (18) получим, что $p(t) = q(\alpha(t)$, где

$$q(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j(x). \square$$

**Доказательство теоремы 1.** Пусть $f(t) = p(t)e(t)$ — экспоненциальный моном, где $p(t)$ — полиномиальная функция на группе $\widetilde{G}$, $e(t)$ — экспоненциальная функция на группе $\widetilde{G}$. Так как $f \in C_H(\widetilde{G})$, то, по следствию 1, функции $p(t)$ и $e(t)$ тоже принадлежат классу $C_H(\widetilde{G})$. По лемме 2 функцию $e(t)$ можно представить в виде $e(t) = \varepsilon(\alpha(t))$, где $\varepsilon(x)$ — экспоненциальная функция на группе $G$. По следствию 2 функцию $p(t)$ можно представить в виде $p(t) = q(\alpha(t))$, где $q(x)$ — полиномиальная функция на группе $G$. Окончательно получаем, что

$$f(t) = q(\alpha(t))\varepsilon(\alpha(t)) = g(\alpha(t),$$

где $g(x) = q(x)\varepsilon(x)$ — экспоненциальный моном на группе $G$. $\square$

## Список литературы

[1] Schvartz L. *Théorie générale des fonctions moynne-périodiques* // Ann. of Math. (2) **48**. (1947). P. 875–929.

[2] Gilbert J. E. On the ideal structure of some algebras of analytic functions // Pacif. J. of Math. **35**. (1978). № 3. P. 625–639.

[3] Платонов С. С. *Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах* // Алгебра и анализ. **22**. (2010). № 5. С. 154–185.

[4] Гуревич Д. И. *Контрпримеры к проблеме Л. Шварца.* Функц. анализ и его прилож. **9**. (1975). № 2. С. 29–35.

[5] Schvartz L. *Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions* // Can. J. Math. **3**. (1951). P. 503–512.

[6] Székelyhidi L. *Discrete spectral synthesis and its applications.* Berlin: Springer, 2006.

[7] Lefranc M. *Analyse spectrale sur* $Z_n$ // C. R. Acad. Sci. Paris. **246**. (1958). P. 1951–1953.

[8] Székelyhidi L. *On discrete spectral synthesis* // Functional Equations — Results and Advances (Z. Daroćzy and Zs. Páles), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. P. 263–274.

[9] Bereczky A., Székelyhidi L. *Spectral synthesis on torsion groups* // J. Math. Anal. Appl. **304**. (2005). P. 607–613.

[10] Платонов С. С. *Спектральный синтез в пространстве функций экспоненциального роста на конечно порожденной абелевой группе* // Алгебра и анализ. **24**. (2012). № 4. С. 182–200.

[11] Székelyhidi L. *Spectral synthesis problems on locally compact groups* // Monatsh. Math. **161** (2010). № 2. P. 223–232.

[12] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.* М.: Наука, 1973.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
E-mail: platonov@petrsu.ru