DOI: 10.15393/j3.art.2012.1723 **Issues of Analysis.** Vol. 1(19), No. 1, 2012

УДК 511

Б. М. Широков

ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ С ОСТАТКОМ ФУНКЦИЯМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. В статье доказываются две тауберовых теоремы для преобразования Лапласа медленно меняющихся с остатком функций и рассматриваются их приложения к суммам значений неотрицательных мультипликативных функций, связанных с проблемой Вирзинга, поставленной им в 1967 г. в работе [1].

Ключевые слова: *тауберовы теоремы,интегралы Лапласа, суммирование мултипликативных функций*

§ 1. Введение

О б о з н а ч е н и я: p — простое число, n, k — натуральные числа, x и t — вещественные числа, $\sigma(t)$ — определенная для $t \geq 0$ измеримая положительная стремящаяся к 0 при $t \to +\infty$ медленно изменяющаяся на бесконечности в смысле Караматы функция. Если $\phi(t)$ — возрастающая при $t \geq 0$, то обозначим

$$L_\phi(s) = \int\limits_o^\infty e^{-su} d\phi(u)$$

ее преобразование Лапласа — Стилтьеса, причем будем считать, что преобразование определено при $s > 0$. $f(n)$ — мультипликативная неотрицательная функция,

$$m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n}, \quad M(x) = \sum_{n \leq x} f(n),$$

Для мультипликативной функции $f(n)$ обозначим через $F(s)$ сумму ее ряда Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^{1+s}}.$$

Вирзинг в работе [1] поставил вопрос: можно ли из условия

$$\sum_{p \le x} \frac{f(p) \ln p}{p} = o(\ln x) \tag{1}$$

вывести равенство

$$M(x) = o\Big(\frac{x}{\ln x} m(x)\Big)?$$

Левин Б. В. и Файнлейб А. С. в работе [3] показали, что, вообще говоря, ответ отрицательный. Но в их контрпримере функция $m(x)$ ограничена.

Если допустить, что $m(x)$ не ограничена, то вопрос Вирзинга остается открытым.

В этой работе изучается связь между условием (1) и поведением функции $m(x)$ в предположении $m(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

§ 2. Тауберовы теоремы

Начнем с определения медленно изменяющейся с остатком функции, которое взято из книги [4, с. 100]

Определение 1. *Функция $\alpha(t)$ называется медленно меняющейся с остатком $\sigma(t)$ на бесконечности, если при $t \to \infty$ для любого $c > 0$*

$$\alpha(ct) - \alpha(t) = O(\sigma(t)\alpha(t)).$$

И так же, как в [4], множество медленно меняющихся на бесконечности с остатком $\sigma(t)$ функций обозначим через $K(\sigma)$, а множество медленно меняющихся в смысле Караматы — через K.

В дальнейшем нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $G(t)$ измерима на $[0, \infty)$ и существует такое число $\eta > 0$, что $t^{-\eta}G(t)$ суммируема на $[0, 1]$, а $t^{\eta}G(t)$ — на $[1, \infty)$. Если*

$L(t) \in K$ и ограничена на отрезке $[0,b]$ для любого $b > 0$, то при $t \to \infty$

$$\int\limits_0^\infty L(tu)G(u)du \sim L(t)\int\limits_0^\infty G(u)du.$$

Доказательство можно найти в [4, с. 63].

Лемма 2. *Если функция $\phi(t) \in K(\sigma)$, дифференцируема и существует такое число η, что $t^\eta\phi(t)$ возрастает, то для некоторой константы $C > 0$*

$$\frac{t\phi'(t)}{\phi(t)} \le C\sigma(t).$$

Доказательство. Пусть $c > 1$. Существует такое число θ, $0 < \theta < 1$, что для $\lambda = 1 + \theta(c-1)$ будем иметь:

$$\frac{\phi(ct)-\phi(t)}{(c-1)t} = \frac{\phi'(\lambda t)(\lambda t)^\eta}{(\lambda t)^\eta} \ge \frac{t^\eta\phi'(t)}{(\lambda t)^\eta} = \frac{\phi'(t)}{(\lambda)^\eta}. \tag{2}$$

С другой стороны, так как $\phi \in K(\sigma)$, существует такое число $C > 0$, что

$$\frac{\phi(ct)-\phi(t)}{(c-1)t} \le \frac{C}{c-1}\frac{\phi(t)\sigma(t)}{t} \cdot \frac{\phi(ct)\sigma(ct)}{\phi(t)\sigma(t)} \le M\frac{\phi(t)\sigma(t)}{t}. \tag{3}$$

Сравнивая (2) и (3), получим утверждение леммы. □

Теорема 1. *Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(t) \ge 0$ такие возрастающие функции, что $L_\alpha(s)$ и $L_\beta(s)$ дифференцируемы при $s > 0$ и при $s \to 0$*

$$\frac{L'_\alpha(s)}{L_\alpha(s)} \sim L'_\beta(s). \tag{4}$$

Если $\alpha \in K(\sigma)$, то

$$\gamma(t) = \int\limits_0^t u d\beta(u) = O(t\sigma(t)).$$

Доказательство. Так как

$$t^2\frac{d}{dt}L_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) = -L'_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-u/t}u d\alpha,$$

то функция $t^2 \dfrac{d}{dt} L_\alpha \left(\dfrac{1}{t}\right)$ возрастает. В силу леммы 2,

$$t\left(\frac{d}{dt}L_\alpha\left(\frac{1}{t}\right)\right)L_\alpha^{-1}\left(\frac{1}{t}\right) = O(\sigma(t)).$$

Из условия (4) следует

$$-L'_\beta\left(\frac{1}{t}\right) = O(t\sigma(t)).$$

Отсюда получаем

$$-L'_\beta\left(\frac{1}{t}\right) = L_\gamma\left(\frac{1}{t}\right) = \int\limits_0^\infty e^{-u}\gamma(u)du = O(t\sigma(t)).$$

С другой стороны, ввиду возрастания функции $\gamma(t)$,

$$\int\limits_0^\infty e^{-u}\gamma(u)du \geq \int\limits_1^\infty e^{-u}\gamma(u)du \geq \gamma(t)\int\limits_1^\infty e^{-u}du > \gamma(t).$$

Следовательно, $\gamma(t) = O(t\sigma(t)))$. Теорема доказана. $\square$

Для произвольного фиксированного $\delta \in (0,1)$ обозначим

$$h_\delta = \alpha(t) - \alpha(\delta t).$$

Теорема 2. *Пусть $\alpha(t)$ $\beta(t) \geq 0$ — возрастающие функции, для которых выполнено условие (4) при $s \to 0$ и $h_\delta(t) \in K$. Если*

$$\gamma(t) = \int\limits_0^t u d\beta(u) = O(t\sigma(t)), \tag{5}$$

то $\alpha(t) \in K(\sigma)$.

Доказательство. Прежде всего, интегрированием по частям получаем

$$-\frac{1}{t}L'_\beta\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t}\int\limits_0^\infty e^{-u}\gamma(ut)du = \int\limits_0^\infty e^{-u}u\frac{\gamma(ut)}{ut}du.$$

В силу возрастания $\gamma(t)$ для $u \le 1$ имеем $\gamma(ut) \le \gamma(t)$. Поэтому

$$\int\limits_0^1 e^{-u} u \frac{\gamma(ut)}{ut} du = O(\sigma(t)).$$

Из условия (5) с некоторой константой C следует

$$\int\limits_1^\infty e^{-u} u \frac{\gamma(ut)}{ut} du \le C \int\limits_0^\infty \sigma(ut) e^{-u} u du.$$

А так как $\sigma(t)$ медленно изменяется, в силу леммы 1, последний интеграл есть $O(\sigma(t))$. Таким образом,

$$-\frac{1}{t} L'_\beta \left(\frac{1}{t}\right) = O(\sigma(t)).$$

Обозначим

$$f(t) = \frac{d}{dt} \ln L_\alpha \left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} \frac{L'_\alpha(1/t)}{l_\alpha(1/t)}.$$

Из условия (4) следует, что

$$f(t) = O\left(\frac{\sigma(t)}{t}\right).$$

Тогда с одной стороны для $\delta \in (0,1)$

$$\int\limits_{\delta t}^t f(u) du = \ln \frac{L_\alpha(1/t)}{l_\alpha(1/\delta t)},$$

а с другой —

$$\int\limits_{\delta t}^t f(u) du = O(\sigma(t)).$$

Эта оценка равномерна на отрезке $[\alpha, \beta]$, если $0 < \alpha < \beta < 1$. Следовательно, так как $\sigma(t) \to 0$,

$$\frac{L_\alpha(1/t)}{L_\alpha(1/\delta t)} = 1 + 0(\sigma(t)),$$

что означает, что $L_\alpha(1/t) \in K(\sigma)$. Так как $h_\delta(t) \in K$, то, на основании леммы 1,

$$h_\delta(t) \sim \int\limits_0^\infty e^{-u} h_\delta(ut)du = L_\alpha\left(\frac{1}{t}\right) - L_\alpha\left(\frac{1}{\delta t}\right).$$

Ввиду того, что $L_\alpha(1/t) \in K(\sigma)$, из последнего равенства получаем

$$h_\delta(t) = O(\sigma(t))L_\alpha(1/t). \tag{6}$$

Так как $\alpha(t) \in K$, то из теоремы Караматы (см., например, [2]) следует, что $L_\alpha(1/t) = O(\alpha(t))$. Теперь из оценки (6) следует, что $\alpha(t) \in K(\sigma)$. Теорема доказана. □

§ 3. Применение к суммам мультипликативных функций

Будем предполагать, что для мультипликативной функции $f(n)$ выполняются условия

$$\begin{aligned} &a) \quad \sum_{p,k\geq 2} \frac{\Lambda_f(p^k)}{p^k} < +\infty; \\ &b) \quad f(p) = O(1); \\ &c) \quad m(x) \to \infty,\ x \to \infty, \end{aligned}$$

где $\Lambda_f(n)$ — обобщенная функция Мангольдта, определяемая равенствами

$$F'(s) = F(s) \cdot \frac{F'(s)}{F(s)}, \qquad -\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda_f(n)}{n^{1+s}}.$$

Для применения доказанных теорем к мультипликативной функции $f(n)$ положим

$$\alpha(t) = m(e^t), \qquad \beta(t) = \sum_{p\leq e^t} \frac{f(p)}{p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_\alpha(s) &= F(s), & \gamma(t) &= \sum_{p\leq e^t} \frac{f(p)\ln p}{p}, \\ L_\beta(s) &= \sum_p \frac{f(p)}{p^{1+s}} & -L'_\beta(s) &= \sum_p \frac{f(p)\ln p}{p^{1+s}}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Если для любого* $c > 0$

$$m(x) - m(cx) = O(\sigma(\ln x) m(x)), \tag{7}$$

то при $x \to \infty$

$$\sum_{p \le x} \frac{f(p) \ln p}{p} = O(\sigma(\ln x) m(x)). \tag{8}$$

Доказательство. Из условия (7) следует, что $\alpha(t) \in K(\sigma)$. В силу условия b) на функцию $f(n)$ ряд $F(s)$ сходится абсолютно при $s > 0$ и

$$-\frac{L'_\alpha(s)}{L_\alpha(s)} = -\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f(n)}{n^{1+s}}.$$

С некоторой постоянной C, в силу условия a) на $f(n)$ и предположения $m(x) \to \infty$, при $s \to 0$ имеем:

$$-\frac{L'_\alpha(s)}{L_\alpha(s)} = \sum_p \frac{f(p) \ln p}{p^{1+s}} + C \sim \sum_p \frac{f(p) \ln p}{p^{1+s}} = -L_\beta(s).$$

Таким образом, условие (4) выполняется. Из теоремы 1 получаем

$$\sum_{p \le e^t} \frac{f(p) \ln p}{p} = \int_0^t u d\beta(u) = O(\sigma(t) t).$$

Полагая в этом равенстве $t = \ln x$, получаем утверждение теоремы. □

Теорема 4. *Если выполнено условие (8) и для любого фиксированного* $\delta \in (0,1)$ *функция* $m(e^t) - m(e^{\delta t}) \in K$, *то для любого* $c > 0$

$$m(x) - m(cx) = O(\sigma(\ln x) m(x)).$$

Доказательство состоит в перефразировке теоремы 2 подобно тому, как это было сделано с теоремой 1.

Список литературы

[1] Wirsing E. *Das asimtotische Verhalten von Summen uber multiplikative Funktionen. II* // Acta Math. Sci. Hung. V. 18. 1967. P. 411–467.

[2] Широков Б. М. *Тауберовы теоремы и их применение к суммам мультипликативных функций* // Межвуз. сб. Аналитическая теория чисел. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1988. С. 95–104.

[3] Левин Б. В., Файнлейб А. С. *Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел* // Известия АН СССР. Серия Математика. Т. 34. № 5. С. 1064–1109.

[4] Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* М.: Наука, 1985.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.