Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 511

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СУММЫ ДЕЛИТЕЛЕЙ В КЛАССАХ ВЫЧЕТОВ

Б. М. Широков

В статье для функции $\sigma(n,\chi) = \sum_{d|n}\chi(d)d$ устанавливаются необходимые и достаточные условия слабо равномерного распределения в классах вычетов и асимптотическая формула распределения значений по составному модулю N.

§ 1. Введение

Основные обозначения. Пусть l, L, N, m, n, i, j, k, r — натуральные числа, p и q — простые числа, χ — фиксированный вещественный неглавный примитивный характер Дирихле модуля m, X и X_0 — соответственно произвольный и главный характеры Дирихле модуля N,

$$\sigma(n,\chi) = \sum_{d|n}\chi(d)d,$$

$K = [N,m]$ —наименьшее общее кратное чисел m и N, (N,m) — наибольший общий делитель чисел N и n, h и h_0 — произвольный и главный характеры Дирихле модуля K, $G(N)$ — мультипликативная группа вычетов по модулю N, $\omega(n)$ — число различных простых делителей n (за исключением названия работы [3], где так обозначен вещественный характер Дирихле),

$$R_j(N) = \{a \in G(N) \mid \exists p\,((p,K) = 1 \;\&\; \sigma(p^j,\chi) \equiv a \pmod N)\},$$

$M = \min\{j \mid R_j \neq \emptyset\}$, Λ_M — подгруппа $G(N)$, порожденная множеством $R_M(N)$, $S(x,N,a)$ — количество натуральных чисел n, для которых $\sigma(n,\chi) \equiv a \pmod N$.

Будем называть мультипликативную функцию $f(n)$ *конгруентно подобной*, если существует такое натуральное число l, что для любого L, кратного l,

$$\forall p \forall q \forall j (p \equiv q \pmod L \Rightarrow f(p^j) \equiv f(q^j) \pmod L).$$

Полиномоподобные мультипликативные функции, то есть функции, значения которых на степенях простых чисел суть значения полиномов на этих простых числах, не зависящих от выбора простого числа, являются и конгруентно подобными. Однако не всякая конгруентно подобная функция является полиномоподобной. Примерами таких функций являются функции $r_2(n)$, $d(n,\chi)$ (см. [1,3]) и рассматриваемая здесь $\sigma(n,\chi)$.

Для полиномоподобных функций критерий слабо равномерного распределения в классах вычетов доказан Наркевичсем в работе [2]. В статье [1] критерий перенесен на конруентно подобные функции и изложен метод получения асимптотических формул для распределения значений в классах вычетов. Для дальнейшего нам понадобится этот критерий, и имеет смысл привести его здесь.

Теорема A. *Для того чтобы конгруентно подобная функция $f(n)$ была слабо равномерно распределена по модулю N необходимо и достаточно, чтобы существовало такое простое число p, что для любого неглавного характера X модуля N, равного 1 на Λ_M, было справедливо равенство*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{X(f(p^j))}{p^{j/M}} = 0. \tag{1}$$

В настоящей работе метод работы [1] применяется к функции $\sigma(n,\chi)$. В статье [4] доказан критерий слабо равномерного распределения $\sigma(n)$. Приведенное там доказательство можно с незначительными изменениями перенести и на функцию $\sigma(n,\chi)$. Но здесь будет приведено несколько видоизмененное доказательство аналогичного результата.

В этой работе будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того чтобы $\sigma(n,\chi)$ была слабо равномерно распределена по модулю N необходимо и достаточно, чтобы N не делилось на 6.*

Обозначим через b_1 количество тех простых делителей q числа $d = (N,m)$, для которых $q \equiv -1 \pmod 4$, $u = \omega(d)$, k — количество простых делителей q числа d с условием $q \equiv 1 \pmod 3$, а через b_2 количество простых делителей q числа d с условием

$$q \equiv 7 \pmod{12},$$

и положим

$$\kappa_1(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_1 \text{ нечетно и } q|m \Rightarrow q|N, \\ 0, & \text{если либо существует } q|m \ \& \ q \nmid N, \text{ либо } b_1 \text{ четно.} \end{cases}$$

и

$$\kappa_2(N) = \begin{cases} 1, & \text{если } b_2 \text{ нечетно и } q|m \Rightarrow (q|N \ \& \ q \equiv 1 \pmod 3), \\ 0, & \text{если либо } \exists q((q|m \ \& \ q \nmid N) \vee (q|d \ \& \ q \equiv 2 \pmod 3)), \\ & \text{либо } b_2 \text{ четно.} \end{cases}$$

Обозначим еще

$$\lambda = \prod_{\substack{q|N \\ q \nmid m}} \frac{q-2}{q-1} \left(\prod_{q|(N,m)} \frac{q-2}{q-1} - \frac{(-1)^u \kappa_1(N)}{\varphi(q_1 \cdots q_u)} \right), \tag{2}$$

$$\xi = \max_{X \neq X_0} \frac{1}{\varphi(K)} \sum_{x \in G(K)} X(1 + \chi(x)x),$$

$$\mu = \prod_{\substack{q|N,\, q \nmid m \\ q \equiv 1 \pmod 3}} \frac{q-3}{q-1} \left(\prod_{\substack{q|(N,m) \\ q \equiv 1 \pmod 3}} \frac{q-3}{q-1} + \frac{(-2)^k \kappa_2(N)}{\varphi(q_1 \cdots q_k)} \right), \tag{3}$$

$$\eta = \max_{X \neq X_0} \frac{1}{\varphi(K)} \sum_{x \in G(K)} X(1 + \chi(x)x + x^2).$$

Теорема 2. *Для любого $a \in G(N)$ при $x \to \infty$*

$$S(x, N, a) = \begin{cases} C \dfrac{x}{(\ln x)^{1-\lambda}} + O\left(\dfrac{x}{(\ln x)^{1-\xi}} \right), & N\,; \\ C \dfrac{\sqrt{x}}{(\ln x)^{1-\mu}} + O\left(\dfrac{x}{(\ln x)^{1-\eta}} \right), & N\,,\ 3 \nmid N. \end{cases}$$

§ 2. Доказательство теоремы 1

Из теоремы A следует, что если если $R_M(N)$ порождает $G(N)$, то $\sigma(n,\chi)$ слабо равномерно распределена по модулю N. Мы докажем, что

1) если N нечетно, то $R_1(N)$ порождает $G(N)$;

2) если N четно, но не кратно 3, то $M = 2$ и $R_2(N)$ порождает $G(N)$;

3) если $6|N$, то $M = 2$, но $R_2(N)$ порождает собственную подгруппу $G(N)$, и не существует простого числа, удовлетворяющего теореме A, то есть в этом случае нет слабо равномерного распределения обобщенной суммы делителей.

1) Итак, N нечетно. Существует простое $p \equiv 1 \pmod K$, поэтому $\sigma(p,\chi) \equiv 2 \pmod N$ и $2 \in R_1(N)$. Равенство $\Lambda_1(N) = G(N)$ в этом случае доказывается так же, как в [4].

2) Пусть N четно, но не делится на 6. Тогда $R_1(N) = \emptyset$, так как $\forall p \quad (p,K) = 1 \Rightarrow 1 + p\chi(p) \equiv 0 \pmod 2$. Но если $p \equiv 1 \pmod K$, то

$$\sigma(p,\chi) = 1 + p + p^2 \equiv 3 \pmod N,$$

то есть $R_2(N) \neq \emptyset$.

Пусть $N = 2^r$. Тогда $G(N)$ состоит из всех нечетных $x \quad, 1 \le x < 2^r$, так что $R_2(2^r) = G(2^r)$.

Пусть $N = q,\ q > 3$. Пусть $p \equiv x \pmod q$ и $\chi(p) = -1$. Тогда существует такое простое число p', что $p' \equiv p \pmod q, \quad \chi(p') = 1$. Следовательно,

$$p^2 - p + 1 \equiv p'^2 + p' + 1 \pmod q \equiv \sigma(p'^2,\chi) \pmod q.$$

Поэтому можно считать, что $\chi(p) = 1$ для всех p взаимно простых с K.

Вычеты $x, y \in G(N)$, для которых многочлен $1 + x + x^2$ принимает одно значение, удовлетворяют условию

$$(x - y)(x + y + 1) \equiv 0 \pmod q,$$

то есть либо они совпадают, либо $x \equiv q-(y+1) \pmod q$, что дает $(q+1)/2$ различных значений, соответствующих вычетам $x = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}, q-1$.

Если $q \equiv 2 \pmod 3$, то среди этих значений нет нуля и поэтому они порождают $G(q)$.

Если $N = q^r$ и $q \equiv 2 \pmod 3$, то $R_2(q^r)$ содержит не меньше $1 + \varphi(q^r)/2$ элементов. Действительно, так как при $x \neq (q-1)/2$

$$(1 + x + x^2)' \not\equiv 0 \pmod q,$$

то сравнение

$$x^2 + x + 1 \equiv b \pmod q)^r$$

разрешимо при любом $b \equiv a \pmod q$, если разрешимо сравнение

$$x^2 + x + 1 \equiv a \pmod q,$$

что дает $\varphi(q^r)/2$ различных в $G(q^r)$ значений b.

Если $q \equiv 1 \pmod 3$, то многочлен x^2+x+1 имеет два различных корня в $G(q)$. Если один из них $x_0 \pmod q$, то второй — $-x_0 - 1 \pmod q$. Поэтому $\mathrm{card} R_2(q) = (q-1)/2$.

Пусть g — первообразный корень по модулю q. Докажем, что $R_2(q)$ содержит элемент вида g^{2k-1}.

Квадратичная форма x^2+xy+y^2 представляет 0 в поле вычетов по модулю q при $x = x_0$ и $y = 1$. Следовательно она представляет любой элемент этого поля. Поэтому существуют такие x_1 и y_1 не равные 0, что

$$x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 \equiv g \pmod q.$$

Тогда для $u \equiv y_1^{-2} \pmod q$ и $v \equiv x_1 y_1^{-1} \pmod q$ получим:

$$v^2 + v + 1 \equiv gu \pmod q.$$

Но u — квадратичный вычет, поэтому существует такое k, что

$$gu \equiv g^{2k-1}.$$

Таким образом, $R_2(q)$ содержит нечетные степени g и не может быть подгруппой $G(q)$ индекса 2. Следовательно $\Lambda_2(q) = G(q)$.

Равенство $\Lambda_2(N) = G(N)$ для $N = q^r$ и для произвольного N, не делящегося на 6, доказывается так же, как и в [4].

3) Пусть $6|N$. Тогда для любого $x \in G(N)$

$$x^2 + x + 1 \equiv 1 \pmod 6.$$

Но сравнение $x \equiv 5 \pmod 6$ разрешимо в $G(N)$. Следовательно $\Lambda_2(N)$ есть собственная подгруппа $G(N)$. Нам необходимо доказать, что не существует числа p, для которого справедливо равенство (1) теоремы A.

Пусть $p \neq 2$. Тогда для любого $j \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{2j-1} \chi(p^j)p^j \equiv 0 \pmod 2.$$

Поэтому для любого характера X модуля N $\quad X(\sigma(p^{2j-1}, \chi)) = 0$. Следовательно,

$$S_p \stackrel{def}{=} 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\sigma(p^j, \chi))}{p^{j/2}} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\sigma(p^{2j}, \chi))}{p^j} \neq 0,$$

так как

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X(\sigma(p^{2j}, \chi))}{p^j} \right| \leq \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Пусть $p = 2$. Если m (модуль характера χ) четно, то $S_2 = 2$. Пусть m нечетно. Если $\chi(2) = 1$, то

$$\sigma(2^{2j-1}, \chi) = 3 + \sum_{k=2}^{j} (2^{2k-2} + 2^{2k-1}) \equiv 0 \pmod 3.$$

Следовательно, $X(\sigma(2^{2j-1}, \chi)) = 0$, если $j > 0$. Но $\sigma(2^{2j}, \chi) = 1$, если $\sigma(2^{2j}, \chi)$ взаимно просто с N, и равно 0 в противном случае. Следовательно, $S_2 \geq 1$. Если же $\chi(2) = -1$, то $X(\sigma(2^2, \chi)) = 0$ и $S_2 \geq 1/2$.

Итак, простого числа p, для которого $S_p = 0$ для любого неглавного характера, равного 1 на $\Lambda_2(N)$, не существует.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Введем дополнительные обозначения: $T = \exp(\sqrt{\ln x})$, $\sigma_0 = 1 + 2/\ln x$,

$$F(s, X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X(\sigma(n, \chi))}{n^s}, \quad J(x, F) = \frac{1}{2\pi i} \int \sigma_0 - iTsi_0 + iTF(s, X) \frac{x^s}{s}\, ds.$$

Для положительных постоянных α и β обозначим через $\Omega(\alpha, \beta)$ область s-плоскости:

$$s = \sigma + it \quad \sigma \geq \sigma(t) = \alpha - \frac{\beta}{\ln(2 + |t|)}.$$

Используем следующую лемму из работы [3].

Лемма *Для любого $a \in G(N)$ при $x \to \infty$*

$$S(x, N, a) = \frac{1}{\varphi(N)} J(x, X_0) + \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{X \neq X_0} \overline{X} J(x, X) + O(x^{1/M} e^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Из этой леммы видно, что доказательство асимптотических формул сводится к асимптотической оценке интегралов $J(x, X)$, которая, в свою очередь, получается при помощи леммы на с. 180 работы [1], приведенная в статье [3] как теорема Б. Для применения этой леммы нужно изучить $F(s, X)$.

1) N нечетно. Тогда $M = 1$ и при $\sigma > 1$ имеем:

$$F(s, X) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid m} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{X(\sigma(p^j, \chi))}{p^{js}}\right).$$

Обозначим через

$$\Phi(s, X) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{X(\sigma(p, \chi))}{p^s}\right) \sum_{j \geq 0} \frac{X(\sigma(p^j, \chi))}{p^{js}}.$$

Эта функция регулярна при $\sigma > 1/2$, для любого $\varepsilon > 0$ ограничена при $\sigma \geq 1/2 + \varepsilon$ и не равна 0 при $s = 1$. Функция $F(s, X)$ может быть записана в виде:

$$F(s, X) = \Phi(s, X) \prod_{p \nmid m} \left(1 - \frac{X(1 + \chi(p)p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Последнее произведение может быть выражено через L-функции Дирихле характеров h модуля K. Для этого рассмотрим

$$\ln F(s, X) = \ln \Phi + \sum_{p \nmid m} \frac{X(1 + \chi(p))}{p^s} + \sum_{\substack{p \nmid m \\ k \geq 2}} \frac{X^k(1 + \chi(p))}{p^{ks}}. \tag{4}$$

Последняя сумма регулярна при $\sigma > 1/2$ и для любого $\varepsilon > 0$ ограничена при $\sigma \geq 1/2 + \varepsilon$. Первую сумму в формуле (4) представим в виде:

$$\sum_{p \not| m} \frac{X(1+\chi(p))}{p^s} = \sum_{x \in G(K)} \sum_{p \equiv x \pmod K} \frac{X(1+\chi(x)x)}{p^s}. \tag{5}$$

Используя свойства характеров, получим:

$$\sum_{p \not| m} \frac{X(1+\chi(p))}{p^s} = \sum_{h \bmod K} \frac{1}{\varphi(K)} \sum_{x \in G(K)} \overline{h}(x) X(1+\chi(x)x) \sum_p \frac{h(p)}{p^s}.$$

Обозначим через

$$z(X,h) = \frac{1}{\varphi(K)} \sum_{x \in G(K)} \overline{h}(x) X(1+\chi(x)x) \tag{6}$$

и через

$$\Psi(s,X) = -\sum_h z(X,h) \sum_{p,k \geq 2} \frac{h(p^k)}{kp^{ks}}. \tag{7}$$

Последняя функция также регулярна при $\sigma > 1/2$ и ограничена при $\sigma \geq 1/2 + \varepsilon$. Из формул (4)–(7) заключаем:

$$F(s,X) = \Phi_1(s,X) \prod_h \{L(s,h)\}^{z(X,h)}, \tag{8}$$

где функция Φ_1 обладает такими же свойствами, как и Φ. Формула (8) показывает, что существует постоянная $\beta > 0$ и такая регулярная и не обращающаяся в ноль в области $\Omega(1,\beta)$ функция $G(s,X)$, что

$$F(s,X) = G(s,X)(s-1)^{-z(X,h_0)}$$

На основание выше приведенной леммы, а также леммы работы [1] (или теоремы Б работы [3]) получаем: для любого $a \in G(N)$ при $x \to \infty$

$$S(x,N,a) = C\frac{x}{(\ln x)^{1-z(X_0,h_0)}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{1-\mu}}\right).$$

Для завершения доказательства в этом случае осталось вычислить $z(X_0,h_0)$ Обозначим эту величину через λ.

Представим K в виде произведения трех попарно взаимно простых чисел P, Q, и R так, чтобы P содержало простые числа, не делящие m, Q состоит из простых, общих для m и N, а R составлено из простых делителей m, не делящих N. Тогда

$$G(K) = G(P) \times G(Q) \times G(R),$$

а соответствующие проекции $x \in G(K)$ обозначим x_P, x_Q и x_R. Тогда

$$\lambda = \frac{1}{\varphi(K)} \sum_{x_P} X_0(1 + \chi(x)x_P) \sum_{x_Q} X_0(1 + \chi(x)x_Q) \sum_{x_R} X_0(1 + \chi(x)x_R).$$

В первой из трех сумм знак вещественного характера не меняется. При любом его значении получаем

$$\frac{1}{\varphi(P)} \sum_{x_P} X_0(1 + \chi(x)x_P) = \prod_{p|P} \frac{p-2}{p-1}$$

Далее предстоит рассмотреть два варивнта: $R = 1$ и $R \neq 1$. Если $R \neq 1$, каково бы ни было число q, делящее Q, для любого вычета $x_Q \equiv -1 \pmod q$ найдется $\varphi(R)/2$ таких вычетов x_R, что для соответствующего $x \in G(K)$ будем иметь $\chi(x) = 1$. Также и для $x_Q \equiv 1 \pmod q$ найдется столько же вычетов x_R, что $\chi(x) = -1$ для соответствующего x. Поэтому, если $R \neq 1$, то

$$\lambda = \prod_{q|PQ} \frac{q-2}{q-1}.$$

Пусть теперь $R = 1$. Нам нужно вычислить вторую из трех сумм в выражении для λ при условии, что третья сумма отсутствует. Так как значение этой суммы не зависит от того, будет ли $P = 1$ или нет, для удобства будем считать, что $P = 1$ и $x_Q = x$. Обозначим эту сумму через V и разобьем ее на две части — на V^+, содержащую слагаемые с $\chi(x) = 1$, и V^-, содержащую слагаемые с $\chi(x) = -1$. Обозначим через α_i показатель, с которым простое число q_i входит в Q. Чтобы вычислить V^+ нужно из $\varphi(Q)/2$ элементов подгруппы $G(Q)$ индекса 2 вычесть количество тех ее элементов, для которых

$$x \equiv -1 \pmod{q_i}, \tag{9}$$

хотя бы для одного значения i. Это количество равно

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{u}\frac{\varphi(Q)}{q_i-1}.$$

При этом те вычеты, для которых сравнение (9) имеет место для двух различных индексов i и j, будут учтены дважды, и количество таких элементов, равное

$$\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{\varphi(Q)}{\varphi(q_iq_j)},$$

необходимо вернуть, и так далее. Если при этом b_1, количество $q_i \equiv -1 \pmod 4$, четно, то среди вычетов $x \in G(Q)$ с условием $\chi(x) = 1$ имеется такие, для которых сравнение (9) выполняется для всех делителей q_i числа Q. Количество их равно $q_1^{\alpha_1-1}\cdots q_u^{\alpha_u-1}$. Если же b_1 нечетно, то таких вычетов нет. Поэтому, используя определенную на с. 178 величину $\kappa_1(N)$, будем иметь

$$\lambda = \prod_{q|Q}\frac{q-2}{q-1} - \frac{(-1)^u\kappa_1(N)}{\varphi(q_1\cdots q_u)}$$

Из всего сказанного следует, что в общем случае показатель λ определяется формулой (2) на с. 178. Таким образом, доказательство теоремы 2 в случае нечетного N завершено.

2) N четно, но не кратно 3. Нам уже известно, что в этом случае $M = 2$. Показатель $z(X,h)$ имеет вид

$$z(X,h) = \frac{1}{\varphi(K)}\sum_{x\in G(K)}\overline{h}(x)X(x^2+\chi(x)x+1).$$

Обозначим через $\mu = \mu(N) = z(X_0,h_0)$. Рассуждая аналогично первому случаю, выведем, что существуют $\beta > 0$ и регулярная и не обращающаяся в 0 в области $\Omega(\frac{1}{2},\beta)$ функция $G(s,X)$, что

$$F(s,X) = G(s,X)\left(s-\frac{1}{2}\right)^{z(X,h_0)}.$$

Применяя лемму работы (1) (теорему Б работы [3]) получим утверждение теоремы и в этом случае. Для завершения теоремы осталось убедиться, что показатель μ вычисляется по формуле (3).

Заметим, что сравнение

$$x^2+\chi(x)x+1\equiv 0 \pmod q$$

разрешимо тогда и только тогда, когда

$$q\equiv 1 \pmod 3. \tag{10}$$

Как и в первом случае, представим K в виде $K=PQR$ с той разницей, что в Q возьмем степени лишь тех простых делителей (N,m), для которых справедливо сравнение (10). Степени же остальных простых делителей этого числа отнесем к R. Обозначим через $f^+(x)=x^2+x+1$ и $f^-(x)=x^2-x+1$. Учитывая, что знак $\chi(x)$ полностью определяется компонентой x_{PQ}, получим

$$\mu=\frac{1}{\varphi(K)}\sum\nolimits^{+} X_0(f^+(x_{QR}))\sum_{x_P\in G(P)} X_0(f^+(x_P))+$$
$$+\sum\nolimits^{-} X_0(f^-(x_{QR}))\sum_{(x_P\in G(P)} X_0(f^-(x_P)).$$

Повидимому, понятно, что сумма с плюсом означает суммирование по тем элементам группы $G(QR)$, на которых $\chi(x)=1$, а сумма с минусом — по тем, для которых $\chi(x)=-1$. Внутренние суммы уже не зависят от характера и легко просчитываются. Их значения одинаковы и мы их обозначим через μ_P, причем

$$\mu_P=\prod_{\substack{q|P\\ q\equiv 1 \bmod 3}}\frac{q-3}{q-1}.$$

Обозначая внешние суммы вместе с коэффициентом $1/\varphi(QR)$, как и раньше, через V^+ и V^-, имеем:

$$\mu=\mu_P(V^++V^-).$$

Если $q|Q$, то каждое из сравнений

$$x^2+x+1\equiv 0 \pmod q \tag{11}$$

и

$$x^2-x+1\equiv 0 \pmod q \tag{12}$$

имеет два решения. Если α — максимальная степень, с которой q^α делит Q, то существует $q^{\alpha-1}$ вычетов по модулю q^α, удовлетворяющих сравнению (11), и столько же для сравнения (12).

Пусть $q_1, \ldots, q_k$ — все простые делители Q, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — соответствующие степени, с которыми они входят в Q. Если $R \neq 1$, то

$$V^+ = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{2q^{\alpha_i-1}}{\varphi(q^{\alpha_i})} + \sum_{i\neq j} \frac{2^2 q_i^{\alpha_i-1} q_j^{\alpha_j-1}}{\varphi(q_i^{\alpha_i} q_j^{\alpha_j})} - \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^k 2^k q_1^{\alpha_1-1}\cdots q_k^{\alpha_k-1}}{\varphi(Q)}\right) = \frac{1}{2}\prod_{i=1}^{k}\frac{q_i-3}{q_i-1}.$$

Аналогично вычисляется и дает то же значение и V^-. Таким образом, если (N, m) содержит простые делители, либо не удовлетворяющие сравнению (10), либо не делящие N (т. е. $R \neq 1$), то

$$\mu = \prod_{\substack{q|N \\ q\equiv 1 \bmod 3}} \frac{q-3}{q-1}.$$

Рассмотрим теперь случай $R = 1$, т. е. все простые делители m делят N и удовлетворяют сравнению (10). В этом случае в $G(Q)$ существует $2^k q_1^{\alpha_1-1}\cdots q_k^{\alpha_k-1}$ вычетов x с условием $\chi(x) = 1$, так как, если x удовлетворяет сравнению (11), то он является квадратичным вычетом по модулю q. А в виду того, что он является квадратичным вычетом по всем простым делителям числа m, то $\chi(x) = 1$. Следовательно

$$V^+ = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{2q^{\alpha_i-1}}{\varphi(q^{\alpha_i})} + \ldots + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-1}\prod_{j\neq i}\frac{q_j^{\alpha_j-1}}{\varphi(q_j^{\alpha_j})}\right) +$$
$$+ \frac{(-1)^k 2^k q_1^{\alpha_1-1}\cdots q_k^{\alpha_k-1}}{\varphi(Q)}.$$

Для вычисления V^- рассмотрим вычеты x, удовлетворяющие сравнению (12) для всех $q|Q$. Такие вычеты удовлетворяют сравнению

$$x^3 \equiv -1 \pmod q.$$

Следовательно x будет квадратичным невычетом по модулю q в том и только в том случае, если $q \equiv 3 \pmod 4$. Поэтому $\chi(x) = -1$ лишь в том случае, если количество таких q нечетно. Так как эти q еще удовлетворяют сравнению (10), то для них справедливо сравнение

$$q \equiv 7 \pmod{12}$$

Количество таких простых делителей (N, m) на с. 178 было обозначено через b_2.

Итак, если b_2 четно, то вычетов x с условием $\chi(x) = -1$ и удовлетворяющих сравнению (12) для всех $q|Q$ нет. Следовательно,

$$V^- = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{2q^{\alpha_i - 1}}{\varphi(q^{\alpha_i})} + \ldots + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-1} \prod_{j \neq i} \frac{q_j^{\alpha_j - 1}}{\varphi(q_j^{\alpha_j})}\right).$$

Складывая это с V^+, получим

$$\mu = \mu_P \prod_{q|Q} \frac{q-3}{q-1},$$

что соответствует формуле (3) для случая $\kappa_2(N) = 0$.

Если же b_2 нечетно, то количество вычетов, о которых говорилось в предыдущем абзаце, равно $2^k q_1^{al_1 - 1} \cdots q_k^{\alpha_k - 1}/\varphi(Q)$. Поэтому $V^+ = V^-$ и

$$\mu = \mu_P \left(\prod_{q|Q} \frac{q-3}{q-1} + \frac{(-2)^k}{\varphi(q_1 \cdots q_k)}\right),$$

что соответствует формуле (3) в случае $\kappa_2(N) = 1$. Этим и завершается доказательство теоремы 2.

Résumé

The necessary and sufficient condition of weak uniformly distribution in residue classes for generalized function of a sum of divisors $\sigma(n, \chi)$ are obtained. The assimptotic formulaes for values distribution of $\sigma(n, \chi)$ are proved too.

Литература

[1] Широков Б. М. *Распределение значений арифметических функций в классах вычетов*//Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т.121. С.176–186.

[2] Narkievicz W. *On Distribution of Velues of multiplicative Functions in Residue Classes*// Acta Arithm. 1967. V.12 No3. P.269–279.

[3] Широков Б. М. *Распределение* $d(n, \omega)$ *в классах вычетов*// Труды ПГУ, серия “математика”. 1995. Вып.2. С.136–144.

[4] Sliva J. *On Distribution of Values of* $\sigma(n)$ *in Residue Classes*// Coll. Math. 1973. V.XXVII. Fasc.2. P.283–291.