**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 513.83

# ПРАВИЛЬНОСТЬ В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОСТРАНСТВ БЛИЗОСТИ

Н. С. Стреколовская

Основной результат статьи — теорема: сильное произведение правильных близостей есть правильная близость.

В работе [1] Ю. М. Смирнов показал, что все метризуемые и все компактные пространства близости правильны. Однако построены примеры неправильных пространств близости.

Напомним, что пространство близости называется правильным, если среди равномерных пространств, совместимых с этим пространством близости, есть наибольшее.

Основной вопрос, касающийся свойства правильности произведений следующий: будет ли правильным произведение правильных пространств близости?

Настоящая заметка мотивирована изучением этого вопроса. Все рассматриваемые пространства предполагаются тихоновскими. Для удобства будем считать равномерности, заданными на топологических пространствах и состоящими из открытых покрытий.

Приведем аксиомы равномерности $\mathcal{U}$, состоящей из открытых покрытий $\mathcal{A}$ пространства $X$.

A1. Если $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ и $\mathcal{A}$ вписано в некоторое покрытие $\mathcal{A}'$ пространства $X$, то $\mathcal{A}' \in \mathcal{U}$.

A2. Для любых $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{U}$ существует $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$, которое вписано и в $\mathcal{A}_1$, и в $\mathcal{A}_2$.

A3. Для любого $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ существует $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{U}$, сильно звездно вписанное в $\mathcal{A}$.

А4. Для любой точки $x \in X$ и для любой ее окрестности $O$ существует покрытие $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ такое, что $\mathrm{st}_{\mathcal{A}} x \subseteq O$.

Любая равномерность $\mathcal{U}$ на пространстве $X$ порождает близость $\delta$ по формуле: $\delta(A, B) = 1$ (множества $A$ и $B$ далеки), если существует покрытие $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$ такое,что $\mathrm{st}_{\mathcal{A}} A \cap B = \emptyset$.

На множестве равномерностей, совместимых с данным пространством $X$ существует естественный порядок: $\mathcal{U} \geq \mathcal{U}'$, если $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}'$. При этом $\delta_{\mathcal{U}} \geq \delta_{\mathcal{U}'}$ относительно естественного порядка близостей.

Докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пространство $X$ с близостью $\delta$ правильно тогда и только тогда, когда для любых равномерностей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, совместимых с ним, база равномерности $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$*[1] *индуцирует близость $\delta$ на $X$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть на пространстве $X$ задана правильная близость $\delta$. Тогда среди равномерностей, совместимых с близостью $\delta$, есть наибольший элемент $\mathcal{U}$. Из включений $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}_2$ и из аксиом А1, А2 для равномерности следует, что база равномерности $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$ содержится в $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}$. Аксиомы равномерности А2-А4 для покрытий $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$ проверяются непосредственно.

Ввиду выполнения аксиомы А1 для равномерности $\mathcal{U}$ равномерность $\mathcal{U}'$ с базой $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$ содержится в $\mathcal{U}$, то есть $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$. Так как $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$, то индуцированные близости связаны соотношением $\delta_{\mathcal{U}_1} \leq \delta_{\mathcal{U}'} \leq \delta_{\mathcal{U}}$. Поскольку $\delta_{\mathcal{U}_1} = \delta_{\mathcal{U}} = \delta$, то из последнего неравенства имеем $\delta_{\mathcal{U}'} = \delta$, что и требовалось установить.

Достаточность. Пусть $\mathcal{U}_\alpha$ — семейство равномерностей, индуцирующих близость $\delta$ на $X$, где любое семейство покрытий вида $\mathcal{A}_{\mathcal{U}_\alpha} \wedge \mathcal{A}_{\mathcal{U}_{\alpha'}}$ совместимо с близостью $\delta$ на $X$, $\alpha \in A$. Проверим аксиомы равномерности для $\mathcal{U}$— верхней грани равномерностей $\mathcal{U}_\alpha$. Пусть покрытие $\mathcal{A} \in \mathcal{U}$. Тогда $\mathcal{A} \in \mathcal{U}_\alpha$ для некоторого $\alpha$. Если $\mathcal{A}$ вписано в некоторое покрытие $\beta$, то $\beta \in \mathcal{U}_\alpha$, а значит, $\beta \in \mathcal{U}$. Аксиома А1 выполнена. Пусть $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{U}_{\alpha 1}, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{U}_{\alpha 2}$. По условию, семейство покрытий вида $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$ — база некоторой равномерности, совместимой с близостью $\delta$. Тогда покрытие $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \in \mathcal{U}'' \in \mathcal{U}$ и вписано в $\mathcal{A}_1$ и в $\mathcal{A}_2$. Аксиома А2 выполнена. Аксиомы А3 и А4 выполнены, поскольку они справедливы для любой равномерности, входящей в $\mathcal{U}$. Покажем, что $\mathcal{U}$

[1] $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2 = \{\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 = \{Uc_1 \cap Uc_2, Uc_1 \in \mathcal{A}_1, Uc_2 \in \mathcal{A}_2\}, \mathcal{A}_1 \in \mathcal{U}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{U}_2\}$.

индуцирует близость $\delta$ на $X$. Так как $\mathcal{U} \geq \mathcal{U}_\alpha$ для любого $\alpha \in A$, имеем $\delta_\mathcal{U} \geq \delta_{\mathcal{U}_\alpha = \delta}$. Пусть $\delta(A, B) = 1$. Тогда найдется покрытие $\mathcal{A} \in \mathcal{U}_\alpha$ для некоторого $\alpha$ такое, что $\mathrm{st}_\mathcal{A} A \cap B = \emptyset$, то есть $\delta(A, B) = 1$. Неравенство $\delta_\mathcal{U} \leq \delta$ проверено. Итак, имеем совпадение близостей $\delta_\mathcal{U} = \delta$, что и требовалось доказать. Лемма доказана. □

Теперь докажем основное утверждение. Предварительно напомним определение сильного произведения пространств близостей (см. [2]). Сильное произведение пространств близостей определяется как слабейшая близость произведения, в которой произведение любого конечного числа равномерных покрытий пространств-сомножителей является равномерным покрытием.

Определение. *Пусть $\{X_\alpha\}$ — система пространств близостей, $\alpha \in A$. Множества $A$ и $B$ произведения пространств $X = \prod X_\alpha$ называются отделимыми, если декартово произведение конечного числа некоторых равномерных покрытий $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ пространств $X_{\alpha_i}$ таково, что ни один элемент его не пересекается одновременно и с $A$, и с $B$. Равномерные покрытия суть элементы какой-нибудь равномерности, совместимой с данным пространством близости.*

Сильным произведением пространств близостей $X_\alpha$ называется пространство $\prod X_\alpha$ с близостью, в которой два множества $A$ и $B$ далеки тогда и только тогда, когда существуют конечные системы множеств $A_i$ и $B_j$ такие, что $A = \cup A_i$, $B = \cup B_j$ и при любых $i$ и $j$ множества $A_i$ и $B_j$ отделимы (см. [2]). Слабое произведение пространств близостей (определение принадлежит Ли Ги Ену) — это близость из произведения их бикомпактных расширений.

Теорема 1. *Сильное произведение правильных близостей является правильной близостью.*

Доказательство. Пусть $X = \prod X_\alpha$ — тихоновское произведение пространств $X_\alpha, \alpha \in C$, с правильными близостями $\delta_\alpha$. Обозначим сильное произведение близостей $\delta_\alpha$ через $\delta$, $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — естественная проекция. Из результатов Полякова В. З. (см. [2]) следует, что декартово произведение максимальных равномерных пространств, порождающих близости $\delta_\alpha$, индуцирует сильное произведение близостей $\delta$ на произведении $X$. Пусть декартово произведение минимальных равномерных пространств $X_\alpha$, совместимых с близостями $\delta_\alpha$, индуцирует близость $\delta_0$ на произведении $X$. Тогда декартово произведение произвольных равномерностей, индуцирующих близости $\delta_\alpha$ на сомножителях $X_\alpha$, индуцирует близость, заключенную между $\delta_0$ и $\delta$.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что пересечение любых двух равномерностей $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$, индуцирующих близость $\delta$ на произведении, индуцирует близость $\delta$ согласно лемме. С одной стороны, база равномерности $Uc_1 \wedge Uc_2$ индуцирует близость $\delta_1 \geq \delta$.

Покажем, что, с другой стороны, $\delta_1 \leq \delta$.

Сопоставим всякой равномерности на произведении $X$ декартово произведение равномерностей на пространствах $X_\alpha$. Пусть множество $V$ — элемент покрытия $\mathcal{A}$ равномерности $\mathcal{U}$ пространства $X$. Тогда множество $V$ есть сумма наибольших по включению прямоугольников вида $U_1 \times U_2 \ldots U_n$, множества $U_i$ открыты в пространствах $X_{\alpha_i}$, остальные координаты произвольны. Рассмотрим проекции этих прямоугольников множеств $V$ покрытия $\mathcal{A}$ на соответствующие грани $X_{\alpha_i}$. Они образуют покрытие $\pi_{\alpha_i}\mathcal{A}$ соответствующей грани. Для покрытий $\pi_\alpha\mathcal{A}$ выполняются все аксиомы равномерности, поскольку они справедливы для равномерности $\mathcal{U}$. Равномерность $\mathcal{U}_\alpha = \pi_\alpha\mathcal{A}$ индуцирует близость $\delta_\alpha$ на пространстве $X_\alpha$.

В самом деле, очевидно, что множества $A$ и $B$ далеки $\delta_\alpha(A, B) = 1$ тогда и только тогда, когда $\delta(\pi_\alpha^{-1}A, \pi_\alpha^{-1}B) = 1$, где $\delta$ — сильное произведение близостей $\delta_\alpha$ на пространствах $X_\alpha$. Если множества $\pi_\alpha^{-1}A$ и $\pi_\alpha^{-1}B$ далеки в близости $\delta$, то найдется покрытие $\mathcal{A}$ из равномерности $\mathcal{U}$ такое, что $st_{\mathcal{A}}\pi_\alpha^{-1}A \cap \pi_\alpha^{-1}B = \emptyset$. Тогда $st_{\pi_\alpha\mathcal{A}}A \cap B = \emptyset$, то есть множества $A$ и $B$ далеки в равномерности $\pi_\alpha\mathcal{U}$. Обратная импликация рассматривается аналогично.

Итак, каждой равномерности $\mathcal{U}$ на произведении $X$ с близостью $\delta$ сопоставлено декартово произведение равномерностей $\mathcal{U} = \pi_\alpha\mathcal{U}$, причем равномерность $\mathcal{U}_\alpha$ индуцирует близость $\delta_\alpha$ на пространстве $X_\alpha$. Так как элементы покрытия из равномерности $\mathcal{U}$ есть сумма элементов некоторого покрытия декартова произведения равномерностей $\pi_\alpha\mathcal{U}$, то близость, индуцированная этим декартовым произведением $\delta'$, больше близости $\delta$, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, т. е. $\delta' \geq \delta$. Базе равномерности $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$ на произведении, где равномерность $\mathcal{U}_i, i = 1, 2$, порождает близость $\delta$, соответствует декартово произведение баз равномерностей $\pi_\alpha\mathcal{U}_1 \wedge \pi_\alpha\mathcal{U}_2$. Поскольку близость $\delta_\alpha$ правильная, то база равномерности $\pi_\alpha\mathcal{U}_1 \wedge \pi_\alpha\mathcal{U}_2$ индуцирует близость $\delta_\alpha$. Имеем оценку для близостей $\delta_1 \leq \delta' \leq \delta$, где база равномерности $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$ индуцирует близость $\delta'$. Откуда заключаем, что близость $\delta_1 \leq \delta$. Учитывая соотношение $\delta_1 \geq \delta$, имеем совпадение близостей $\delta = \delta_1$.

Согласно лемме, утверждение теоремы доказано.

## Résumé

The main result of this paper is the theorem: The strong product of correct proximities is a correct proximity.

## Литература

[1] Смирнов Ю. М. *О пространствах близости*// Матем. сб. 1952. 31(73). С. 543–574.

[2] Поляков В. З. *Правильность и произведение пространств близости*// Матем. сб. 67(109). 1965. Ѓ 3. С. 428–439.

[3] Isbell J.R. *Uniform spaces*. London: Providence. 1964.