Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 5, 1998

УДК 517

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Мосягин

В статье доказана теорема существования единственного решения нелинейной краевой задачи для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве.

Пусть H — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. В пространстве H рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u), \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = X, \tag{2}$$

где параметр $u \in H$; x_0, X — заданные элементы из H; $T > 0$; оператор f действует из $[0,T] \times H \times H$ в H.

Для доказательства разрешимости задачи (1) – (2) в H воспользуемся следующей теоремой из книги [1].

Теорема 1. *Пусть*

1) H — *вещественное гильбертово пространство;*
2) F — *оператор из* H *в* H*;*
3) *существуют такие постоянные* $m > 0$ *и* $M > 0$*, что* $M > m$ *и*

$$||Fv_1 - Fv_2|| \leq M||v_1 - v_2|| \qquad \forall\, v_1,\ v_2 \in H; \tag{3}$$

4) *для всех* v_1, $v_2 \in H$ *справедливо неравенство*

$$(Fv_1 - Fv_2, v_1 - v_2) \geq m\|v_1 - v_2\|^2. \tag{4}$$

Тогда уравнение

$$Fv = g \tag{5}$$

имеет единственное решение для любого $g \in H$ *и его можно получить методом последовательных приближений.*

Укажем достаточные условия, при которых задача (1) – (2) имеет единственное решение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

Н1) *оператор* $f\colon [0,T] \times H \times H \to H$ *непрерывен и удовлетворяет условию Липшица, т. е. существует такая постоянная* $K > 0$, *что для любой пары точек* $(t, x_i, u_i) \in [0,T] \times H \times H$, $(i = 1,2)$

$$\|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\| \leq K(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|); \tag{6}$$

Н2) *для любой непрерывной функции* $x(s)$ *на* $[0,T]$ *и всех* u_1, $u_2 \in H$ *существует такая константа* $L > 0$, *что*

$$\left(\int_0^T f(s,x(s),u_1)\,ds - \int_0^T f(s,x(s),u_2)\,ds, u_1 - u_2\right) \geq$$
$$\geq L\|u_1 - u_2\|^2; \tag{7}$$

Н3) $TK > L$; $\quad (8)$

Н4) $TK\left(1 + \dfrac{KT}{L}\right) = q < 1.$ $\quad (9)$

Тогда задача (1) – (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Разрешимость задачи (1) – (2) будем доказывать методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем любую непрерывную функцию $x^{(0)}$ на $[0,T]$. Докажем, что уравнение

$$Au = \int_0^T f(s, x^{(0)}(s), u)\,ds = X - x_0 \tag{10}$$

однозначно разрешимо в H. С этой целью воспользуемся теоремой 1. Оператор A удовлетворяет условиям этой теоремы. Действительно, для любых u_1, $u_2 \in H$ имеем:

$$\|Au_1 - Au_2\| = \left\| \int\limits_0^T f(s, x^{(0)}(s), u_1) - f(s, x^{(0)}(s), u_2)\, ds \right\| \leq$$
$$\leq TK\|u_1 - u_2\|;$$
$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) =$$
$$= \left(\int\limits_0^T f(s, x^{(0)}(s), u_1)\, ds - \int\limits_0^T f(s, x^{(0)}(s), u_2)\, ds, u_1 - u_2 \right) \geq$$
$$\geq L\|u_1 - u_2\|^2.$$

Кроме того, по условию (8) $TK > L$.

Таким образом, уравнение (10) имеет единственное решение в H. Обозначим его через $u^{(0)}$.

В качестве первого приближения возьмем

$$x^{(1)}(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x^{(0)}(s), u^{(0)})\, ds, \qquad t \in [0, T]. \tag{11}$$

Видно, что

$$x^{(1)}(0) = x_0, \qquad x^{(1)}(T) = X.$$

Пусть построено $(n-1)$-е приближение. Тогда n-е приближение определим следующим образом:

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)})\, ds, \qquad t \in [0, T], \tag{12}$$

где $u^{(n-1)}$ — решение уравнения

$$\int\limits_0^T f(s, x^{(n-1)}(s), u)\, ds = X - x_0.$$

Снова видим, что

$$x^{(n)}(0) = x_0, \quad x^{(n)}(T) = X.$$

Установим сходимость последовательностей $\{x^{(n)}(t)\}$ и $\{u^{(n)}\}$. Для $n \geq 2$ имеем:

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t) = \int_0^t [f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)}) - \\ -f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)})]\, ds + \\ + \int_0^t [f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)})]\, ds. \end{aligned} \tag{13}$$

При $t = T$ из равенства (13) вытекает, что

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T [f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)})]\, ds \right\| \leq \\ \leq \int_0^t \| f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)})] \|\, ds \leq \\ \leq KT \max_{0 \leq t \leq T} \| x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t) \|. \end{aligned} \tag{14}$$

Оценим снизу левую часть неравенства (14), используя условие (7):

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T [f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)})]\, ds \right\| \geq \\ \geq L \| u^{(n-1)} - u^{(n-2)} \|. \end{aligned}$$

Отсюда и из (14) имеем:

$$\| u^{(n-1)} - u^{(n-2)} \| \leq \frac{KT}{L} \max_{0 \leq t \leq T} \| x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t) \|. \tag{15}$$

Теперь из равенства (13) получаем

$$\| x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t) \| \leq K \int_0^t (\| x^{(n-1)}(s) - x^{(n-2)}(s) \| +$$

$$+\|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\|)\,ds \le$$
$$\le TK\left(1 + \frac{KT}{L}\right) \max_{0\le t\le T} \|x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)\|.$$

Отсюда получаем:

$$r_n = \max_{0\le t\le T} \|x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)\| \le KT\left(1 + \frac{KT}{L}\right) r_{n-1} = q r_{n-1}.$$

Последнее равенство показывает, что

$$r_n \le q^{n-1} r_1,$$

что влечет равномерную сходимость последовательности $\{x^{(n)}(t)\}$ на $[0,T]$. Из ее сходимости и неравенства (15) вытекает сходимость последовательности $\{u^{(n)}\}$. Пусть

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t), \quad u = \lim_{n\to\infty} u^{(n)}.$$

При $n \to \infty$ из равенства (12) получаем:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s), u)\,ds.$$

Очевидно, что $\{x(t), u\}$ и является единственным решением задачи (1) – (2). □

Résumé

In this paper we consider the existence of a solution of nonlinear boundary value problem for a differential equation in Hilbert space.

Литература

[1] Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1988. 304 с.