Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 5, 1998

УДК 517

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ С МУЛЬТИВНУТРЕННИМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В статье методом последовательных приближений доказывается существование и единственность решения двухточечной краевой задачи с неразделенными граничными условиями для нелинейного дифференциального уравнения в векторном пространстве с мультивнутренним произведением.

§ 1. Теорема существования для нелинейного операторного уравнения

Пусть X — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Будем называть функцию $f\colon X \times X \to \mathbb{C}$ *полувнутренним произведением* на X, если она удовлетворяет условиям: для любых x, y и $z \in X$

1) $f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x,z) + \beta f(y,z), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
2) $f(x,x) \geq 0$,
3) $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$.

Будем записывать значения $f(x,y)$ как (x,y).

Определение . *Семейство $\mathfrak{F} = \{f_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ полувнутренних произведений на X называется мультивнутренним произведением, если для любого ненулевого элемента $x \in X$ существует такой индекс $\gamma \in \Gamma$, что $(x,x)_\gamma = f_\gamma(x,x) \neq 0$.*

Пространство X с мультивнутренним произведением $\mathfrak{F}$ будем обозначать $\langle X, \mathfrak{F}\rangle$.

Мультивнутреннее произведение $\mathfrak{F}$ порождает семейство полунорм

$$p_\gamma(x) = \sqrt{(x,x)_\gamma} = ||x||_\gamma, \qquad x \in X, \quad \gamma \in \Gamma,$$

с которым пространство X становится хаусдорфовым локально выпуклым линейным топологическим пространством (см., например, [3]). Топологию X обозначим через τ. В дальнейшем будем считать, что $\langle X, \tau\rangle$ — секвенциально полное хаусдорфово локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Пространства с мультивнутренним произведением рассматривались в работе [2].

Приведем теорему, которая обобщает теорему 29.3 монографии [1, с. 202], доказанную для гильбертовых пространств.

Теорема 1. *Если оператор $F\colon X \to X$ удовлетворяет условиям: для любого $\gamma \in \Gamma$ существуют такие числа m_γ и M_γ, что $M_\gamma > m_\gamma$, причем существует такое $\delta > 0$, что для любого $\gamma \in \Gamma$: $m_\gamma/M_\gamma^2 > \delta$, и для любых $x, y \in X$*

$$||Fx - Fy||_\gamma \le M_\gamma ||x-y||_\gamma, \tag{1}$$

$$\mathrm{Re}(Fx - Fy, x-y)_\gamma \ge m_\gamma ||x-y||_\gamma^2, \tag{2}$$

то уравнение $Fu = g$ имеет единственное решение при любом $g \in X$, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Доказательство. Пусть $g \in X$. Выберем δ так, что $0 < \delta \le 2m_\gamma/M_\gamma^2$ для любого $\gamma \in \Gamma$, и для любого $x \in X$ положим

$$A_\delta x = x - \delta(Fx - g).$$

Тогда для любых x и $y \in X$ и $\gamma \in \Gamma$ будем иметь:

$$||A_\delta x - A_\delta y||_\gamma^2 = ||x - y - \delta(Fx - Fy)||_\gamma^2 =$$
$$= ||x-y||_\gamma^2 - 2\delta\,\mathrm{Re}\langle Fx - Fy, x-y\rangle_\gamma + \delta^2 ||Fx - Fy||_\gamma^2.$$

Из условий (1)–(2) следует:

$$||A_\delta x - A_\delta y||_\gamma^2 \le (1 - 2\delta m_\gamma + \delta^2 M_\gamma^2)||x-y||_\gamma^2.$$

Так как при выбранном δ постоянная $(1-2\delta m_\gamma+\delta^2 M_\gamma^2)<1$, то A_δ будет сжимающим по отношению к любой полунорме оператором. Следовательно, существует элемент u, удовлетворяющий уравнению

$$A_\delta u = u - \delta(Fu - g) = u.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

§ 2. Краевая задача

Пусть $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$, E — пространство непрерывных функций $x\colon I\to X$, $f\colon I\times E\times X\to X$, $F\colon X^2\to X$ и

$$\rho_\gamma(x)=\max_{t\in I}\|x(t)\|_\gamma.$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{dx(t)}{dt}=f(t,x(t)), \tag{3}$$

$$F(x(0),x(1))=a, \qquad a\in X. \tag{4}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть оператор f непрерывен на $I\times X$ и для любого $\gamma\in\Gamma$:*

а) *существует такая неотрицательная интегрируемая на I функция ${}_\gamma(t)$, что для любого $t\in I$ и для любых x и $y\in E$ справедливо неравенство:*

$$\|f(t,x(t))-f(t,y(t))\|_\gamma\le_\gamma(t)\|x(t)-y(t)\|_\gamma; \tag{5}$$

б) *существует такая положительная постоянная M_γ, что для любых u, v, u_1 и $v_1\in X$*

$$\|F(u,v)-F(u_1,v_1)\|\le M_\gamma(\|u-u_1\|_\gamma+\|v-v_1\|_\gamma); \tag{6}$$

в) *существует такая положительная постоянная $m_\gamma<M_g$, что для любых u, v, и $w\in X$*

$$\mathrm{Re}\big(F(u,u+w)-F(v,v+w),u-v\big)_\gamma\ge m_\gamma\|u-v\|_\gamma^2; \tag{7}$$

г) *для чисел* $q_\gamma = \int_0^1 \gamma(t)dt,\ M_\gamma,\ m_g$ *выполняется неравенство*

$$q_\gamma \left(1 + \frac{M_\gamma}{m_\gamma}\right) < 1; \tag{8}$$

д) *множество* $\{M_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ *ограничено.*

Тогда существует единственное решение задачи (3)–(4), *которое может быть получено методом последовательных приближений.*

Доказательство. Докажем предварительно, что для любых заданных элементов a и $h \in X$ уравнение

$$F(u, u+h) = a \tag{9}$$

однозначно разрешимо.

Если обозначить $A_h u = F(u, u+h)$, то наша задача — доказать однозначную разрешимость в X уравнения $A_h u = a$. Проверим условия теоремы 1 для оператора A_h. Фиксируем $\gamma \in \Gamma$. Из условия (6) имеем:

$$||A_h u - A_h v||_\gamma = ||F(u, u+h) - F(v, v+h)||_\gamma \leq 2M_\gamma ||u - v||_\gamma.$$

Из условия (7):

$$\mathrm{Re}(u - v, A_h u - A_h v)_\gamma \geq m_\gamma ||u - v)||_\gamma^2.$$

Пусть $C > 0$ — верхняя граница для множества чисел M_γ. Тогда из условия (8) следует, что

$$\frac{m_\gamma}{M_\gamma^2} > \frac{1}{M_\gamma} \cdot \frac{q_\gamma}{1 - q_\gamma} > \frac{1}{C}.$$

Следовательно, уравнение (9) однозначно разрешимо при произвольно фиксированном $h \in X$ для любого $a \in X$.

Обозначим для $x \in E$:

$$g(x) = \int\limits_0^1 f(s, x(s))\, ds.$$

Пусть $x_0(t)$ — произвольный элемент из E. Найдем u_0 из уравнения

$$F(u_0, u_0 + g(x_0)) = a.$$

Как доказано выше, такой элемент u_0 существует и только один. Положим:

$$x_1(t) = \int\limits_0^t f(s, x(s))\,ds + u_0.$$

Допустим, что найдены элементы $x_0(t), x_1(t), \ldots, x_{n-1}(t)$, удовлетворяющие условию (4), и $x_i(t) \in E$. Тогда n-е приближение определим следующим образом:

$$x_n(t) = \int\limits_0^t f(s, x(s))\,ds + u_{n-1}, \tag{10}$$

а u_{n-1} найдем из условия

$$F(u_{n-1}, u_{n-1} + g(x_{n-1})) = a. \tag{11}$$

Как уже показано, такой элемент существует и только один.

Формулы (10) и (11) определяют последовательные приближения решения задачи (3)–(4). Нам осталось показать, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в E, а последовательность $\{u_n\}$ сходится в X. Для этого, используя условие (5), оценим разность между соседними приближениями:

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|_\gamma \le \int\limits_0^1 \gamma(s)\|x_{n-1}(s) - x_{n-2}(s)\|_\gamma\,ds + \|u_{n-1} - u_{n-2}\|_\gamma \le$$
$$\le q_\gamma \rho_\gamma(x_{n-1} - x_{n-2}) + \|u_{n-1} - u_{n-2}\|_\gamma. \tag{12}$$

Из условия (7) следует:

$$\operatorname{Re}\big(F(u_{n-1}, u_{n-1} + g(x_{n-1})) - F(u_{n-2}, u_{n-2} + g(x_{n-1})), u_{n-1} - u_{n-2}\big)_\gamma \ge$$
$$\ge m\|u_{n-1} - u_{n-2})\|_\gamma^2. \tag{13}$$

Из уравнения (11) выводим:

$$F(u_{n-1}, u_{n-1} + g(x_{n-1})) - F(u_{n-2}, u_{n-2} + g(x_{n-1})) =$$

$$= F(u_{n-2}, u_{n-2} + g(x_{n-1})) - F(u_{n-2}, u_{n-2} + g(x_{n-2})).$$

Учитывая это обстоятельство и условие (6) и оценивая сверху левую часть неравенства (13), получим:

$$m||u_{n-1} - u_{n-2}||_\gamma^2 \le M_\gamma ||u_{n-1} - u_{n-2}||_\gamma \, ||g(x_{n-1}) - g(x_{n-2}||_\gamma.$$

Условие (5) нам дает:

$$||u_{n-1} - u_{n-2}|| \le \frac{M_\gamma q_\gamma}{m_\gamma} \rho_\gamma (x_{n-1} - x_{n-2}). \tag{14}$$

Подставим эту оценку в неравенство (12) и получим:

$$\rho_\gamma (x_n - x_{n-1}) \le q_\gamma \left(1 + \frac{M_\gamma}{m_\gamma}\right) \rho_\gamma (x_{n-1} - x_{n-2}).$$

Учитывая, что $q_\gamma(1 + M_\gamma/m_\gamma) < 1$, можем заключить, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в пространстве E к некоторому элементу $x(t) \in E$. Из неравенства (14) легко выводится и сходимость последовательности $\{u_n\}$, так как $M_\gamma q_\gamma / m_\gamma < 1$. Таким образом, существуют такие элементы $x(t) \in E$ и $u \in X$, что

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\, ds + u,$$

$$F(u, u + g(x)) = a.$$

Отсюда следует, что $x(t)$ — решение задачи (3)–(4). Единственность решения очевидна. □

Résumé

It is proved that there is unique soution of a twopointa boundary problem with nonseparated boundary conditions for differetial equation in the linear space with multyinner composition in this paper.

Литература

[1] Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1988. 304 с.

[2] Вересова А. Т., Мосягин В. В. *Пространства с мультивнутренним произведением в теории дифференциальных уравнений*// Труды ПетрГУ. Серия математика. 1996. Вып. 3. С. 25–27.

[3] Иосида К. *Функциональный анализ.* М.: Мир, 1965.