Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 5, 1998

УДК 515.12

ОБ УПЛОТНЕНИИ СЧЕТНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ НА БИКОМПАКТЫ

Н. С. Стреколовская

В статье строится пример счетно компактного вполне несвязного пространства, уплотняющегося на связный бикомпакт в CH.

Теория уплотнений счетно компактных топологических пространств содержит ряд нерешенных вопросов.

В статье строится пример счетно компактного вполне несвязного пространства, уплотняемого на связный бикомпакт в предположении CH. В работе [1] В. В. Федорчук и А. В. Архангельский в теореме 1 построили класс нормальных счетно компактных пространств, не уплотняющихся на бикомпакты. В частности, авторами работы [1] поставлен вопрос (5): можно ли индуктивно нульмерное счетно компактное пространство уплотнить на связный бикомпакт ?

В настоящей заметке мы построим пример счетно компактного пространства X с близкими свойствами, уплотняемого на связный бикомпакт Y. Отметим, что из связности бикомпакта Y следует, что его размерность $\dim Y(\mathrm{ind}, \mathrm{ind})$ строго положительна. А именно, $\mathrm{ind}\, Y = 1$. Имеет место

Теорема 1. *Существует счетно компактное вполне несвязное пространство X с первой аксиомой счетности,* $\mathrm{ind}\, X = 1$, *которое уплотняется на связный бикомпакт Y в CH.*

Доказательство. Перейдем к построению пространства X. Пусть $Z = W(\omega_1)$ — пространство трансфинитов, меньших первого несчетного порядкового числа в естественной порядковой топологии. Возьмем два экземпляра пространства Z: Z_0 и Z_1 и вклеим в каждый отрезок трансфинитной прямой $[\alpha, \alpha+1]$ отрезок единичной длины. Получим два множества Z_0 и Z_1. На объединении множеств $T = Z_0 \cup Z_1$ введем естественный лексикографический порядок.

Из пространства T сконструируем основное пространство X следующим образом. Обозначим декартово произведение пространств T и канторова совершенного множества C на прямой через T', то есть $T' = T \times C$. Из топологического пространства T' путем склейки каждой пары рациональных точек вида $x \in Z_0$, $x \in Z_1$ в пространствах $T \times \{p\}$ в одну, если p — точка первого рода, а также путем склейки каждой пары иррациональных точек вида $x \in Z_0$, $x \in Z_1$ в одну в пространствах $T \times \{p\}$, если p — точка второго рода, получим фактор-пространство. Обозначим его T_0. Рассмотрим дискретную сумму пространств T_0 и одноточечного пространства $\{1\}$.

Получим пространство $X = \{1\} \cup T_0$. Нетрудно видеть, что полученное пространство X счетно компактно с первой аксиомой счетности и имеет индуктивную размерность $\operatorname{ind} X = 1$. В качестве пространства Y, на которое уплотняется пространство X, возьмем множество X и изменим топологию в одной лишь точке 1. Множества вида $\{1\} \cup (\alpha, \omega_1) \times C$, где (α, ω_1) — сумма двух интервалов в пространствах Z_0, Z_1, образуют базу окрестностей точки $\{1\}$.

В качестве уплотнения $i : X \Rightarrow Y$ возьмем тождественное отображение, т. е. $i(x) = x$ для любой точки $x \in X$. Очевидно, прообраз базисной окрестности точки 1 при отображении i открыт в X, что обеспечивает непрерывность отображения i.

Бикомпактность пространства Y устанавливается непосредственной проверкой.

Покажем, что пространство Y связно. Допустим противное: Y допускает разложение $Y = O_1 \cup O_2$, где O_1, O_2 — непустые открытые дизъюнктные множества. Пусть точка 1 принадлежит множеству O_1 для определенности.

Обозначим

$$\inf\{b : (b, p) \in O_1\} = b_p.$$

Точки p, для которых $b_p = 0$, не могут быть всюду плотным множеством в канторовом совершенном множестве C. Иначе имели бы

$b_p = 0$ для всех точек $p \in C$, откуда вытекает, что $X \subseteq O_1$, $O_2 = \emptyset$. Итак, существует отрезок $[a, b] \subseteq [0, 1]$, что для всех точек множества $C_{ab} = C \cap [a, b]$ имеем $b_p \gg 0$. Если p — точка первого рода, то b_p является иррациональным числом, если p — точка второго рода, то b_p является рациональным числом на множестве C_{ab}. Пусть r_i образуют множество рациональных чисел. Пусть E_n — это множество точек второго рода из множества C_{ab}, для которых $b_p = r_n$. Тогда множество E точек второго рода является счетным объединением $E = \cup E_n$. Тогда множество C_{ab} является счетным объединением множества точек первого рода и множеств E_n. По теореме Бэра существует такой номер n, что множество E_n всюду плотно в куске $C_{a'b'} \subseteq C_{ab}$, где для любой точки p из множества $C_{a'b'}$ $b_p = r_n$. Возьмем точку первого рода $z = (p, r_n)$ из множества $C_{a'b'}$. Тогда точка z может находиться либо в O_1, либо в O_2. В любой окрестности точки z лежат точки множества O_1, а именно, точки $z' = (p', y')$, где $|p - p'|$, $y' - r_n \gg 0$, $p' \in E$ и достаточно мало. Но в любой окрестности точки z имеются точки множества O_2, а именно, точки $z' = (p', y')$, причем $p' \in E, y' - r_n \ll 0$ и достаточно мало. Из замкнутости множества O_2 следует, что точка z лежит в множестве O_2. Аналогично, точка z лежит в множестве O_1. Итак, $z \in O_1 \cap O_2$. Противоречие. Связность бикомпакта Y установлена.

Теорема доказана. □

Résumé

In the paper in assumption CH it is constructed the example of one to one continuous mapping of first countable most disconnected topological space X with dimension $\operatorname{ind} X = 1$ onto connected compact Y.

Литература

[1] Архангельский А. В., Федорчук В. В. *Об уплотнении счетно компактных пространств на бикомпакты*// Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. Вып. 3. С. 52

[2] Александров П. С., Урысон П. С. *Мемуар о компактных топологических пространствах*// М.: Наука, 1971.