Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 9, 2002

УДК 517

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В работе получены оценки разности решений нелинейных и полулинейных дифференциальных уравнений в вещественном пространстве Банаха.

1. Рассмотрим интегральное неравенство, которое будет использовано в дальнейшем для оценок разности решений нелинейных дифференциальных уравнений в пространстве Банаха.

Лемма 1[1]. *Пусть $v(t)$ — непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая при $t \geq t_0$ неравенству*

$$v(t) \leq \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} [\beta + \gamma v(\tau)]\, d\tau, \tag{1}$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$. Тогда

$$v(t) \leq \frac{\beta}{\gamma}(e^{\gamma(t-t_0)} - 1) + \alpha e^{\gamma(t-t_0)}. \tag{2}$$

2. В этом пункте получим оценки разности решений нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве E. Далее всюду мы предполагаем, что правые части дифференциальных уравнений удовлетворяют условиям, при которых начальные задачи однозначно разрешимы.

Теорема 1. *Пусть в банаховом пространстве E задано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{3}$$

где нелинейный оператор $f(t,x)$ определен и непрерывен в области

$$Q = \{t \geq 0, x \in G, \quad G \text{ — область в } E\}$$

и $f(t,x) \in \mathrm{Lip}_x(L,G)$, то есть

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||, \quad L > 0, \quad (t,x_1),(t,x_2) \in Q.$$

Пусть, далее, $x(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$x(t_0) = x_0, \qquad (t_0,x_0) \in Q, \tag{4}$$

а $y(t)$ — решение того же уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(t_0) = y_0, \qquad (t_0,y_0) \in Q. \tag{5}$$

Тогда справедлива оценка

$$||x(t) - y(t)|| \leq ||x_0 - y_0||e^{L(t-t_0)}. \tag{6}$$

Доказательство. По условию теоремы имеем:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t,y(t)), \quad y(t_0) = y_0.$$

Следовательно,

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,x(\tau))\,d\tau, y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,y(\tau))\,d\tau.$$

Из двух последних равенств получаем неравенство

$$||x)t) - y(t)|| \leq ||x_0 - y_0|| + L\int\limits_{t_0}^{t} ||x(\tau) - y(\tau)||\,d\tau.$$

Отсюда, в силу леммы 1, получаем оценку (4). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть в банаховом пространстве E заданы два дифференциальных уравнения:*

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{7}$$

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y) + R(t, y), \tag{8}$$

и пусть операторы $F(t, x)$, $R(t, x)$ определены и непрерывны в области Q. Пусть, кроме того, в этой же области $F(t, x) \in \mathrm{Lip}_x(L, Q)$, $R(t, x) \in \mathrm{Lip}(K, Q)$, $||R(t, x)|| \le \delta$.

Тогда для разности решений $x(t)$ и $y(t, x)$ соответственно уравнений (7) и (8), удовлетворяющих одним и тем же начальным условиям $(x(t_0) = y(t_0))$, справедлива оценка:

$$||x(t) - y(t)|| \le \frac{\delta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1). \tag{9}$$

Доказательство. Из (7) и (8) следует, что

$$x(t) = x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

$$y(t) = y(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} F(\tau, y(\tau))\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} R(\tau, y(\tau))\, d\tau.$$

Следовательно,

$$||x(t) - y(t)|| \le \int\limits_{t_0}^{t} (\delta + L||x(t) - y(t)||)\, d\tau.$$

Отсюда, в силу леммы 1, получаем оценку (9). Теорема доказана. □

3. В банаховом пространстве E рассмотрим полулинейную задачу:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

$$x(0) = x_0. \tag{11}$$

Обозначим $J=[0,T]$. Пусть выполнены условия:

H_1) A — инфинитезимальный оператор C_0 полугруппы $S(t)$, $t\geq 0$ на банаховом пространстве E (см. [2]).

H_2) f — нелинейный непрерывный оператор из $J\times E$ в E и $f(x,t)\in \mathrm{Lip}_x(L, J\times E)$.

Если задача (10), (11) имеет классическое решение, то это решение удовлетворяет интегральному уравнению:

$$x(t)=S(t)x_0+\int\limits_{t_0}^{t} S(t-\tau)f(\tau,x(\tau))\,d\tau. \tag{12}$$

Это естественным образом позволяет дать следующее определение (см. [2]):

Определение 1. *Непрерывное решение $x(t)$ интегрального уравнения (12) называется обобщенным решением задачи (10), (11).*

При указанных выше условиях задача (10), (11) имеет единственное обобщенное решение при любом $x_0\in E$, определенное на J (см. [2]).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть в банаховом пространстве E задано полулинейное дифференциальное уравнение (10), выполнены условия H_1, H_2 и $x(t)$ — обобщенное решение уравнения (10), удовлетворяющее условию $x(0)=x_0$, $x_0\in E$, а $y(t)$ — обобщенное решение того же уравнения, удовлетворяющее условию $y(0)=y_0$, $y_0\in E$.*

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$||x(t)-y(t)||\leq M||x_0-y_0||\cdot e^{MLt}, \tag{13}$$

где $M=\sup\limits_{t\in J}||S(t)||$.

Доказательство. Из условий теоремы следуют равенства:

$$x(t)=S(t)x_0+\int\limits_{0}^{t} S(t-\tau)f(s,x(s))\,ds, \tag{14}$$

$$y(t) = S(t)y_0 + \int\limits_0^t S(t-\tau)f(s, y(s))\, ds. \qquad (15)$$

Из равенств (14), (15) следует неравенство

$$||x(t) - y(t)|| \leq M||x_0 - y_0|| + ML\int\limits_0^t ||x(s) - y(s)||\, ds. \qquad (16)$$

Из неравенства (16), в силу леммы 1, получим оценку (13). Теорема доказана. □

4. В этом пункте рассмотрим оценки разности решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве E с нелокальными условиями.

Теорема 4. *Пусть в банаховом пространстве E задано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (17)$$

где $f(x,t)$ — нелинейный непрерывный оператор из $\mathbb{R}^+ \times E$ в E, удовлетворяющий условию Липшица:

$$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L||x_1 - x_2||, \quad L > 0, \quad (t, x_i) \in I \times E, \quad I = [0, t^*].$$

Пусть, далее, $x(t)$ — решение уравнения (17), удовлетворяющее условию

$$x(0) + g(x) = x_0,$$

а $y(t)$ — решение того же уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(0) + g(y) = y_0,$$

где $x_0, y_0 \in E$, g — нелинейный оператор из C в E (C — банахово пространство непрерывных функций $z\colon I \to E$ с нормой $||z||_C = \max\limits_{t\in I} ||z(t)||$), удовлетворяющий условию Липшица

$$||g(z_1) - g(z_2)|| \leq L_1||z_1 - z_2||_C.$$

Тогда справедлива оценка:

$$||x(t) - y(t)|| \leq (||x_0 - y_0|| + L_1||x - y||_C)e^{Lt}. \qquad (18)$$

Доказательство. Из условий теоремы следуют равенства:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad x(0) + g(x) = x_0,$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(0) + g(y) = y_0,$$

для $t \in [0, t^*]$. Следовательно,

$$x(t) = x_0 - g(x) + \int\limits_0^t f(s, x(s))\, ds,$$

$$y(t) = y_0 - g(y) + \int\limits_0^t f(s, y(s))\, ds$$

для тех же значений t. Из двух последних неравенств имеем:

$$||x(t) - y(t)||] \le ||x_0 - y_0|| + L_1||x - y||_C + \int\limits_0^t L||x(s) - y(s)||\, ds.$$

Отсюда, в силу леммы 1, следует оценка (18). □

Résumé

In this paper we consider estimations of difference solutions of nonlinear differential equations in a Banach space.

Библиографический список

[1] Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С. *Устойчивость движения: метод интегральных неравенств.* Киев: Наукова думка, 1989.

[2] Pazi A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York; Berlin; Heidelberg: Springer—Verlag, 1983.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru