Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 11, 2004

УДК 517

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В статье доказывается локальная разрешимость начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Доказательство проводится методом последовательных приближений.

Пусть $(E, ||\cdot||)$ — вещественное банахово пространство. Через I обозначим отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}$, G — ограниченная область в E, $\overline{G}$ — ее замыкание, $\Omega = I \times \overline{G}$, $f(t, x)$ — нелинейный оператор из Ω в E и (t_0, x_0) — внутренняя точка Ω.

Рассмотрим начальную задачу [1]:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть оператор f непрерывен, ограничен по норме в области Ω, причем $M > 0$ — та константа, для которой $||f(t, x)|| \leq M$, и по переменной x удовлетворяет условию Липшица:*

$$||f(t, x) - f(t, y)|| \leq L||x - y||, \qquad \forall t \in [a, b]. \tag{3}$$

Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение, определенное на отрезке $H = \{t\colon |t - t_0| \leq h\}$, а $h = \min\{\alpha, \dfrac{d}{M}\}$, $d = \rho(x_0, \partial\overline{G})$, $\alpha = \min\{t_0 - a, b - t_0\}$, $\partial\overline{G}$ — граница $\overline{G}$, ρ — метрика в E.

Доказательство. Задача (1)–(2) эквивалентна интегральному уравнению

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \qquad t \in H. \tag{4}$$

в банаховом пространстве E.

Решение уравнения (4) будем искать методом последовательных приближений:

$$x_1(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)\, d\tau,$$

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_k(\tau))\, d\tau, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что значения функций $x_k(t)$ на отрезке H не выходят из области $\overline{G}$. Действительно,

$$||x_1(t) - x_0|| \le M|t - t_0| \le d.$$

Далее, так как $x_1(t) \in \overline{G}$, то справедливо неравенство

$$||x_2(t) - x_0|| \le M|t - t_0| \le d.$$

Следовательно, $x_2(t) \in \overline{G}$.

Пусть $x_k(t) \in \overline{G}$ на отрезке H. Тогда имеем:

$$||x_{k+1}(t) - x_0|| \le M|t - t_0| \le d,$$

то есть $x_{k+1} \in \overline{G}$.

Итак, методом индукции доказано, что значения функций $x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, остаются в области $\overline{G}$ на отрезке H.

Докажем теперь, что последовательность $(x_k(t))$ равномерно сходится на отрезке H. С этой целью рассмотрим ряд:

$$x_0 + (x_1(t) - x_0) + \ldots + (x_k(t) - x_{k-1}(t)) + \ldots \tag{5}$$

Используя условие (3), индуктивным путем получим оценки:

$$||x_1(t) - x_0|| \le M|t - t_0|, qquad||x_(t) - x_1(t)|| \le LM\frac{|t - t_0|}{2!},$$

$$||x_k(t) - x_{k-1}(t)|| \le ML^{k-1}\frac{|t - t_0|^k}{k!}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

из которых вытекает, что ряд (5) мажорируется рядом

$$||x_0|| + \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!} = ||x_0|| + \frac{M}{L}(e^{L|t-t_0|}-1).$$

Отсюда видно, что ряд (5) сходится абсолютно и равномерно на отрезке H. Значит, последовательность $(x_k(t))$ также равномерно сходится на этом отрезке. Пусть $\varphi(t)$ — ее предел. Эта функция непрерывна на отрезке H. Покажем, что $\varphi(t)$ имеет и непрерывную производную на отрезке. Рассмотрим ряд

$$\dot{x}_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty}(\dot{x}_k(t) - \dot{x}_{k-1}(t)) = f(t,x_0) + \sum_{k=2}^{\infty}(f(t,x_k) - f(t,x_{k-1})).$$

Отсюда получаем оценку

$$||\dot{x}_1(t)|| + \sum_{k=2}^{\infty}||\dot{x}_k(t) - \dot{x}_{k-1}(t)|| \le M + L\sum_{k=2}^{\infty}||x_k(t) - x_{k-1}(t)||.$$

Ряд в правой части, как было показано, сходится равномерно на отрезке H. Следовательно, функция $\varphi(t)$ имеет производную, которая является суммой ряда, составленного из производных членов ряда, представляющего функцию $\varphi(t)$. Это дает непрерывность производной.

Заметим, что значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы области $\overline{G}$, так как при любом k $x_k(t) \in \overline{G}$ при $t \in H$.

Покажем теперь, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (4). С этой целью обратимся к равенству

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k-1}(\tau))\,d\tau \tag{6}$$

и перейдем в нем к пределу при $k \to \infty$. Нам нужно обосновать возможность предельного перехода под знаком интеграла, то есть показать, что

$$\lim_{k\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k-1}(\tau))\,d\tau = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau. \tag{7}$$

Из условий теоремы следует неравенство

$$\left\| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{k-1}(\tau))\, d\tau - \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right\| \le L \left| \int_{t_0}^{t} \|x_{k-1}(\tau) - \varphi(\tau)\| d\tau \right|.$$

Так как $x_{k-1} \to \varphi(t)$ при $k \to \infty$, то последний интеграл как угодно мал при $|t - t_0| \le h$, если число k достаточно велико. Следовательно, равенство (7) справедливо.

Переходя теперь в равенстве (6) к пределу при $k \to \infty$, получаем равенство

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \qquad t \in H.$$

Итак, функция $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (4) и, следовательно, уравнению (1) и условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Докажем, что $\varphi(t)$ — единственное решение задачи (1)–(2) на отрезке H. Действительно, пусть существует непрерывная функция $\psi(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\psi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau. \tag{8}$$

Вычитая из этого равенства равенство (6), получим

$$\|\psi(t) - x_k(t)\| \le L \left| \int_{t_0}^{t} \|\psi(\tau) - x_{k-1}(\tau)\|\, d\tau, \right|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Отсюда находим

$$\|\psi(t) - x_1(t)\| \le L \left| \int_{t_0}^{t} \|\psi(\tau) - x_0\|\, d\tau \right|.$$

Обозначим $m = \max\limits_{t \in H} \|\psi(t) - x_0\|$. Тогда

$$\|\psi(t) - x_1(t)\| \le Lm|t - t_0|.$$

Далее,

$$||\psi(t) - x_2(t)|| \le \left| \int_{t_0}^{t} ||\psi(\tau) - x_1(\tau)|| - \, d\tau \right| \le mL^2 \frac{|t - t_0|^2}{2!},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$||\psi(t) - x_k(t)|| \le mL^k \frac{|t - t_0|^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$||\psi(t) - \varphi(t)|| \equiv 0 \quad \text{при} \quad |t - t_0 \le h,$$

то есть $\psi(t) \equiv \varphi(t)$ на отрезке H. Теорема доказана. □

Résumé

In this paper it is prooved local solvability of initial problem for nonlinear differential equation in Banah space.

Библиографический список

[1] Ladas G. *Differential equations in abstract spaces*/ G. Ladas, V. Lakshmikantham. New York; London: Academic Press, 1972.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru