Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 11, 2004

УДК 517.5

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. С. Платонов

Доказана теорема о полноте системы собственных функций для некоторых функционально-дифференциальных краевых задач.

§ 1. Функционально-дифференциальные операторы с отражениями

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как евклидово пространство со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Каждый ненулевой вектор $\alpha \in \mathbb{R}^n$ определяет отражение σ_α относительно гиперплоскости ортогональной α. Это отражение задается формулой

$$\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Для любой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$ полагаем

$$(\sigma_\alpha f)(x) := f(\sigma_\alpha(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Оператор σ_α называется оператором отражения относительно вектора α. При $n = 1$ оператор отражения $\sigma = \sigma_\alpha$ имеет наиболее простой вид: $(\sigma f)(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

В современной математической физике возникают задачи, в которых используются функционально-дифференциальные операторы, получаемые комбинацией дифференциальных операторов и операторов отражений. Наиболее известными операторами такого типа являются операторы Данкля (см. [1]–[3]) в пространстве $\mathbb{R}^n$. При $n = 1$ оператор Данкля имеет вид

$$(\mathcal{D}f)(x) = \frac{df}{dx}(x) + \frac{k}{x}(f(x) - f(-x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

где k — произвольное комплексное число. Разложение по собственным функциям оператора Данкля приводит к некоторым интегральным преобразованиям (несимметричные преобразования Ганкеля; [3]), и при этом возникает множество интересных задач неклассического гармонического анализа.

В настоящей работе мы рассматриваем функционально-дифференциальные операторы вида

$$\delta = -i\frac{d}{dx} + p(x)\,\sigma, \tag{1.1}$$

где σ — оператор отражения, $p(x)$ — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ (всюду в дальнейшем $i = \sqrt{-1}$ и все функции предполагаются комплекснозначными). Основной целью (не реализованной пока до конца) является изучение разложения функций по собственным и присоединенным функциям следующей краевой задачи на конечном отрезке $[-a, a]$:

$$-i\,y'(x) + p(x)\,y(-x) = \lambda\,y(x), \tag{1.2}$$

$$c_1\,y(-a) + c_2\,y(a) = 0, \tag{1.3}$$

где $p(x) \in C[-a, a]$, c_1 и c_2 — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_1| + |c_2| \neq 0$.

Основным результатом статьи является доказательство теоремы о полноте системы собственных функций краевой задачи (1.2)–(1.3) для случая, когда $p(x) \in C^{(1)}[-a, a]$, и краевая задача (1.2)–(1.3) самосопряженная. Условие самосопряженности краевой задачи эквивалентно следующему: $p(-x) = \overline{p(x)}$ и $|c_1| = |c_2|$. Вспомогательными результатами являются теорема о существовании, единственности и аналитической зависимости от параметра λ решения задачи Коши для уравнения (1.2) и построение оператора преобразования оператора δ в оператор $\delta_0 = -i\frac{d}{dx}$. Полученные результаты во многом аналогичны классическим результатам о разложении по собственным функциям дифференциальных операторов Штурма — Лиувилля (см. работы [4]–[6]), и основные идеи доказательств возникли при изучении теории операторов Штурма — Лиувилля.

§ 2. Задача Коши для функционально-дифференциального уравнения

Всюду в дальнейшем функционально-дифференциальный оператор имеет вид

$$\delta = -i\frac{d}{dx} + p(x)\,\sigma, \tag{2.1}$$

где $p(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция на отрезке $[-a, a]$, σ — оператор отражения (т. е. $(\sigma f)(x) = f(-x)$). Рассмотрим следующую задачу Коши: найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\delta y = \lambda y \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$y(0) = \alpha. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Для любых чисел $\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $y = y(x) \in C^{(1)}[-a, a]$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условию (2.3). Для каждого x функция $y(x)$ является целой функцией параметра λ.*

Доказательство. Уравнение (2.2) с начальным условием (2.3) эквивалентно интегральному уравнению

$$y(x) = \alpha + \int\limits_0^x (i\lambda y(t) - p(t)y(-t))\,dt. \tag{2.4}$$

Уравнение (2.4) похоже на классическое уравнение Абеля (см., например, [7]), поэтому доказательство существования и единственности решения будем проводить по схеме соответствующих доказательств для уравнения Абеля.

А) Существование решения.

Определим последовательность функций: $y_0(x) = \alpha$ и для $n = 1, 2, \dots$ $y_n(x) = \int\limits_0^x (i\lambda y_{n-1}(t) - p(t)y_{n-1}(-t))\,dt$, $\quad x \in [-a, a]$. Пусть $|p(x)| \le M$ при $x \in [-a, a]$, и пусть $|\lambda| \le N$. Индукцией по n проверим, что

$$|y_n(x)| \le |\alpha| \frac{(M+N)^n |x|^n}{n!}. \tag{2.5}$$

При $n = 0$ неравенство (2.5) выполняется. Если оно справедливо для $n = k - 1$, то

$$|y_k(x)| \le \Big| \int\limits_0^x (M+N)|y_{k-1}(t)|\,dt \Big| \le \frac{(M+N)^k |\alpha|}{(k-1)!} \Big| \int\limits_0^x |t|^{k-1}\,dt \Big| = \\ = \frac{|\alpha|(M+N)^k |x|^k}{k!},$$

т. е. неравенство (2.5) справедливо и при $n = k$.

Из неравенства (2.5) следует, что $|y_n(x)| \le |\alpha| \dfrac{(M+N)^n a^n}{n!}$, поэтому ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{2.6}$$

сходится равномерно по λ для $|\lambda| \le N$ и равномерно по x для $|x| \le a$. Так как $y_n(x) \in C[-a, a]$, то $y(x) \in C[-a, a]$. Из равномерной сходимости ряда (2.6) следует, что ряд можно почленно интегрировать, откуда легко видеть, что $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (2.4) и, следовательно, $y(x) \in C^{(1)}[-a, a]$. Так как каждая функция $y_n(x)$ является при фиксированном x многочленом относительно λ и для любого N ряд (2.6) равномерно сходится при $|\lambda| \le N$, то его сумма $y(x)$ будет целой функцией относительно λ.

Б) Единственность решения.

Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — два решения интегрального уравнения (2.4), и пусть $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$. Тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \int_0^x (i\lambda\varphi(t) - p(t)\varphi(-t))\,dt. \tag{2.7}$$

Пусть $|p(x)| \le M$ при $x \in [-a, a]$, и пусть $|\lambda| \le N$. Обозначим

$$C := \sup_{-a \le x \le a} |\varphi(x)|.$$

Из равенства (2.7) следует, что $|\varphi(x)| \le C(M+N)|x|$. Подставляя эту оценку в правую часть равенства (2.7), получим новую оценку

$$|\varphi(x)| \le C\frac{(M+N)^2}{2!}|x|^2.$$

И так далее. После k-го шага имеем оценку

$$|\varphi(x)| \le C\frac{(M+N)^k|x|^k}{k!} \le C\frac{(M+N)^k a^k}{k!}. \tag{2.8}$$

Так как правая часть в неравенстве (2.8) стремится к нулю при $k \to \infty$, то, переходя к пределу, получим, что $\varphi(x) = 0$. □

§ 3. Операторы преобразования

Как и в § 2, мы будем рассматривать функционально-дифференциальные операторы вида

$$\delta = -i\frac{d}{dx} + p(x)\sigma, \tag{3.1}$$

но с дополнительным ограничением $p(x) \in C^{(1)}[-a, a]$. Напомним общее определение оператора преобразования (см., например, книгу [9]). Пусть E — линейное топологическое пространство, A и B — линейные (не обязательно непрерывные) операторы из пространства E в E. Линейный оператор $X : E \mapsto E$ называется оператором преобразования для пары операторов A и B, если имеет место равенство

$$XA = BX.$$

В настоящем параграфе будет построен оператор преобразования для случая, когда A и B — операторы вида (3.1) с различными функциями $p(x)$. Более точно: даны операторы

$$(\delta_1 y)(x) = -i\frac{dy}{dx}(x) + p_1(x)y(-x), \tag{3.2}$$

$$(\delta_2 y)(x) = -i\frac{dy}{dx}(x) + p_2(x)y(-x), \tag{3.3}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — произвольные комплекснозначные функции из класса $C^{(1)}[-a,a]$.

Теорема 3.1. *Существует единственный оператор преобразования для пары операторов δ_1 и δ_2, имеющий вид*

$$(Xf)(x) = f(x) + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)f(t)\,dt, \tag{3.4}$$

где $K(x,t)$ — некоторая функция из класса $C^{(1)}\big([-a,a]\times[-a,a]\big)$, которая называется ядром оператора X.

Доказательство. А) Пусть X — оператор вида (3.4). Чтобы X был оператором преобразования для пары операторов δ_1 и δ_2, должно выполняться соотношение

$$X(\delta_1 f) = \delta_2(Xf), \quad f(x) \in C^{(1)}[-a,a]. \tag{3.5}$$

Выписываем явный вид $X(\delta_1 f)$:

$$X(\delta_1 f)(x) = -if'(x) + p_1(x)f(-x) - i\int\limits_{-x}^{x} K(x,t)f'(t)\,dt + \\ + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)p_1(t)f(-t)\,dt. \tag{3.6}$$

Проинтегрировав в правой части формулы (3.6) по частям и сделав замену переменных в последнем слагаемом, получим, что

$$X(\delta_1 f)(x) = -if'(x) + p_1(x)f(-x) - iK(x,x)f(x) +$$
$$+ iK(x,-x)f(-x) + i\int\limits_{-x}^{x} K'_t(x,t)f(t)\,dt + \int\limits_{-x}^{x} K(x,-t)p_1(-t)f(t)\,dt. \quad (3.7)$$

Выписываем явный вид $\delta_2(Xf)$:

$$\delta_2(Xf)(x) = -if'(x) - iK(x,x)f(x) - iK(x,-x)f(-x) -$$
$$- i\int\limits_{-x}^{x} K'_x(x,t)f(t)\,dt + p_2(x)f(-x) - p_2(x)\int\limits_{-x}^{x} K(-x,t)f(t)\,dt. \quad (3.8)$$

Приравнивая правые части в равенствах (3.7) и (3.8) и учитывая, что $f(x)$ — произвольная функция из $C^{(1)}[-a,a]$, получаем, что функция $K(x,t)$ должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} K'_t(x,t) + K'_x(x,t) &= i(p_1(-t)K(x,-t) + p_2(x)K(-x,t)) \\ K(x,-x) &= \dfrac{i}{2}(p_1(x) - p_2(x)). \end{cases} \quad (3.9)$$

Сделаем замену переменных $x = u + v$, $t = u - v$, и пусть $R(u,v) := K(u+v, u-v) = K(x,t)$. Тогда $R'_u = K'_x + K'_t$ и система (3.9) принимает вид

$$\begin{cases} R'_u(u,v) &= i(p_1(v-u)R(v,u) + p_2(u+v)R(-v,-u)), \\ R(0,v) &= \dfrac{i}{2}(p_1(v) - p_2(v)). \end{cases} \quad (3.10)$$

Система (3.10) эквивалентна интегральному уравнению

$$R(u,v) = \frac{i}{2}(p_1(v)-p_2(v)) + i\int\limits_0^u \big(p_1(v-s)R(v,s) + p_2(v+s)R(-v,-s)\big)\,ds, \quad (3.11)$$

где точки (u,v) принадлежат множеству

$$\mathcal{D}_a := \{(u,v) : |u+v| \le a, \quad |u-v| \le a\}.$$

Так как уравнение (3.11) похоже на интегральное уравнение Абеля, то будем доказывать существование и единственность решения этого уравнения по схеме соответствующих доказательств для уравнения Абеля.

Б) Существование решения.

Пусть $R_0(u,v) = \frac{i}{2}(p_1(v) - p_2(v))$, а для $n \geq 1$ полагаем

$$R_n(u,v) = i\int\limits_0^u \big(p_1(v-s)R_{n-1}(v,s) + p_2(v+s)R_{n-1}(-v,-s)\big)\,ds, \quad (3.12)$$

где $(u,v) \in \mathcal{D}_a$. Пусть $M > 0$ — произвольное число, такое, что

$$|p_1(x)| \leq M, \quad |p_2(x)| \leq M \quad \text{при} \quad x \in [-a,a]. \quad (3.13)$$

Индукцией по n проверим, что при $(u,v) \in \mathcal{D}_a$ справедливы следующие неравенства:

$$|R_{2n}(u,v)| \leq \frac{4^{2n}M^{2n+1}|u|^n|v|^n}{(n!)^2}, \quad (3.14)$$

$$|R_{2n+1}(u,v)| \leq \frac{4^{2n+1}M^{2n+2}|u|^{n+1}|v|^n}{n!(n+1)!}. \quad (3.15)$$

При $n = 0$ неравенство (3.14) принимает вид $|R_0(u,v)| \leq M$, что верно в силу условия (3.13). Из равенства (3.12) следует:

$$|R_1(u,v)| \leq \int\limits_{-|u|}^{|u|} 2M|R_0(v,s)|\,ds \leq 4M^2|u|,$$

что доказывает неравенство (3.15) при $n = 0$.

Предположим, что неравенства (3.14) и (3.15) справедливы при $n = k$, тогда

$$|R_{2k+2}(u,v)| \leq \int\limits_{-|u|}^{|u|} M\big(|R_{2k+1}(v,s)| + |R_{2k+1}(-v,-s)|\big)\,ds \leq$$

$$\leq 2M \frac{4^{2k+1}M^{2k+2}}{k!(k+1)!} \int\limits_{-|u|}^{|u|} |v|^{k+1}|s|^k\, ds = \frac{4^{2k+2}M^{2k+3}|u|^{k+1}|v|^{k+1}}{((k+1)!)^2}.$$

Аналогично проверяем: $|R_{2k+3}(u,v)| \leq \dfrac{4^{2k+3}M^{2k+4}|u|^{k+2}|v|^{k+1}}{(k+1)!(k+2)!}$, что доказывает неравенства (3.14) и (3.15) при $n = k+1$.

Из неравенств (3.14) и (3.15) следует, что

$$|R_{2n}(u,v)| \leq \frac{4^{2n}M^{2n+1}a^{2n}}{(n!)^2}, \quad |R_{2n+1}(u,v)| \leq \frac{4^{2n+1}M^{2n+2}a^{2n+1}}{n!(n+1)!}$$

при $(u,v) \in \mathcal{D}_a$, поэтому ряд

$$R(u,v) := \sum_{n=0}^{\infty} R_n(u,v) \tag{3.16}$$

равномерно сходится на множестве $\mathcal{D}_a$. Так как все функции $R_n(u,v)$ непрерывны на множестве $\mathcal{D}_a$, то функция $R(u,v)$ тоже непрерывна на множестве $\mathcal{D}_a$. Из равномерной сходимости ряда (3.16) следует, что его можно почленно интегрировать, откуда легко видеть, что функция $R(u,v)$ удовлетворяет интегральному уравнению (3.11). Из уравнения (3.11) следует, что функция $R(u,v)$ имеет непрерывную частную производную $R'_u(u,v)$ и эта производная равна

$$R'_u(u,v) = i\big(p_1(v-u)R(v,u) + p_2(v+u)R(-v,-u)\big).$$

А так как функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ непрерывно дифференцируемы, то существует и непрерывная производная $R'_v(u,v)$. Следовательно, $R(u,v) \in C^{(1)}(\mathcal{D}_a)$.

В) Единственность решения. Пусть $T_1(u,v)$ и $T_2(u,v)$ — два решения уравнения (3.11), и пусть $T(u,v) = T_1(u,v) - T_2(u,v)$. Тогда функция $T(u,v)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению

$$T(u,v) = i\int\limits_0^u \big(p_1(v-s)T(v,s) + p_2(v+s)T(-v,-s)\big)\, ds. \tag{3.17}$$

Пусть $C = \max\limits_{(u,v)\in\mathcal{D}_a} |T(u,v)|$, тогда из уравнения (3.17) следует, что $|T(u,v)| \le 4CM|u|$. Подставляя эту оценку в правую часть уравнения (3.17), мы получим новую оценку

$$|T(u,v)| \le C(4M)^2|u||v|.$$

И так далее. После $2n$ шагов получим оценку

$$|T(u,v)| \le \frac{C(4M)^{2n}|u|^n|v|^n}{(n!)^2} \le \frac{C(4M)^{2n}a^n}{(n!)^2}. \tag{3.18}$$

Так как правая часть в неравенстве (3.18) стремится к нулю при $n \to \infty$, то, переходя к пределу, получим, что $T(u,v) = 0$, следовательно, $T_1(u,v) = T_2(u,v)$. $\square$

Пусть δ — функционально-дифференциальный оператор (3.1), $p(x) \in C^{(1)}[-a,a]$. По теореме 2.1 для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственная функция $y(x) = \varphi(x,\lambda)$ класса $C^{(1)}[-a,a]$ по переменной x, удовлетворяющая условиям:

$$(\delta y)(x) = \lambda y(x), \tag{3.19}$$

$$y(0) = 1. \tag{3.20}$$

Следствие 3.1. *Функцию $\varphi(x,\lambda)$ можно представить в виде*

$$\varphi(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{i\lambda t}\,dt, \tag{3.21}$$

где $K(x,t)$ — некоторая функция, принадлежащая классу $C^{(1)}\big([-a,a]\times[-a,a]\big)$.

Доказательство. Пусть $k(x,t)$ — ядро оператора преобразования X, построенного для операторов $\delta_1 = -i\frac{d}{dx}$ и $\delta_2 = \delta$. Если

$$y(x) = e^{i\lambda x} + \int\limits_{-x}^{x} K(x,t)e^{i\lambda t}\,dt,$$

то очевидно, что функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (3.19) и начальному условию (3.20), поэтому $y(x) = \varphi(x,\lambda)$. $\square$

§ 4. Полнота системы собственных функций оператора δ (самосопряженный случай)

Для оператора $\delta = -i\dfrac{d}{dx} + p(x)\sigma$ определим оператор $\delta^* = -i\dfrac{d}{dx} + \overline{p(-x)}\sigma$, где черта обозначает комплексное сопряжение. Обычным образом определяется скалярное произведение функций $y_1(x), y_2(x) \in L_2[-a,a]$:

$$\langle y_1, y_2\rangle := \int\limits_{-a}^{a} y_1(x)\overline{y_2}(x)\,dx.$$

Для любых функций $y_1(x), y_2(x) \in C^{(1)}[-a,a]$ с помощью интегрирования по частям проверяется соотношение

$$\langle \delta y_1, y_2\rangle = \langle y_1, \delta^* y_2\rangle - i\big(y_1(a)\overline{y_2}(a) - y_1(-a)\overline{y_2}(-a)\big). \tag{4.1}$$

В этом параграфе мы рассматриваем случай, когда функция $p(x) \in C^{(1)}[-a,a]$ удовлетворяет соотношению

$$p(-x) = \overline{p(x)}, \quad x \in [-a,a], \tag{4.2}$$

а числа c_1 и c_2 из краевого условия (1.3) такие, что $|c_1| = |c_2|$. Без ограничения общности можно считать, что $c_1 = 1$, а $c_2 = -\alpha$, $|\alpha| = 1$. Тогда краевое условие принимает вид

$$y(-a) = \alpha y(a), \quad |\alpha| = 1. \tag{4.3}$$

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют краевому условию (4.3), а $p(x)$ — условию (4.2), то из соотношения (4.1) следует, что

$$\langle \delta y_1, y_2\rangle = \langle y_1, \delta y_2\rangle, \tag{4.4}$$

поэтому такой случай будем называть самосопряженным.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \delta y &=& \lambda y, \\ y(-a) &=& \alpha y(a), \end{array}\right. \tag{4.5}$$

где функция $p(x)$ удовлетворяет условию (4.2) и $|\alpha| = 1$. Если существует ненулевая функция $y(x)$, удовлетворяющая системе (4.5), то естественно число λ назвать собственным значением задачи (4.5), а функцию $y(x)$ — собственной функцией, соответствующей собственному значению λ. Обычным образом доказывается следующее предложение.

Предложение 4.1.

1) *Все собственные значения λ задачи (4.5) действительные.*
2) *Собственные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т. е. $\langle y_1, y_2\rangle = 0$.*

Из теоремы 2.1 вытекает, что существует единственная функция $y = \varphi(x,\lambda)$, $x \in [-a,a]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, такая, что $\varphi(x,\lambda) \in C^{(1)}[-a,a]$ по переменной x и удовлетворяет задаче Коши:

$$\begin{cases} \delta\varphi(x,\lambda) &= \lambda\varphi(x,\lambda), \\ \varphi(0,\lambda) &= 1. \end{cases}$$

При каждом значении x функция $\varphi(x,\lambda)$ является целой функцией параметра λ.

Пусть $\omega(\lambda) = \varphi(-a,\lambda) - \alpha\varphi(a,\lambda)$. Тогда $\omega(\lambda)$ — целая функция переменной λ. Очевидно, что $\omega(\lambda_0) = 0$ (т. е. λ_0 является нулем функции $\omega(\lambda)$) тогда и только тогда, когда число λ_0 является собственным значением задачи (4.5). Следовательно, все нули функции $\omega(\lambda)$ действительные.

Предложение 4.2. *Все нули функции $\omega(\lambda)$ простые.*

Доказательство. Предположим, что λ_0 — кратный нуль функции $\omega(\lambda)$. Тогда $\omega(\lambda_0 + it) = O(t^2)$ при $t \to 0$. Пусть $\lambda = \lambda_0 = it$, $y(x) = \varphi(x, \lambda_0 + it)$. Так как $\delta y = (\lambda_0 + it)y$, то

$$\langle \delta y, y\rangle - \langle y, \delta y\rangle = 2it\langle y, y\rangle. \tag{4.6}$$

С другой стороны, из соотношения (4.1) следует:

$$\langle \delta y, y\rangle - \langle y, \delta y\rangle = i\big(|y(-a)|^2 - |y(a)|^2\big).$$

Легко видеть, что

$$|y(-a)|^2 - |y(a)|^2 = \omega(\lambda)\overline{\varphi(-a,\lambda)} + \alpha\varphi(a,\lambda)\overline{\omega(\lambda)} = O(t^2).$$

Поэтому

$$\langle \delta y, y\rangle - \langle y, \delta y\rangle = O(t^2). \tag{4.7}$$

Соотношения (4.6) и (4.7) противоречат друг другу, следовательно, число λ_0 не может быть кратным корнем. □

Так как число нулей целой функции не более чем счетно, то и множество собственных значений задачи (4.5) не более чем счетно. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — все собственные значения задачи (4.5), а $y_n(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Множество собственных функций $y_1(x), y_2(x), \ldots$ самосопряженной краевой задачи (4.5) образует полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2[-a,a]$.*

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1. *Для любой функции $f(x) \in L_1[-a,a]$ справедливо равенство*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|} \int_{-a}^{a} f(x) e^{i\lambda x}\, dx = 0. \tag{4.8}$$

Доказательство. Доказательство проводится по схеме доказательства классической теоремы Римана — Лебега.

А) Пусть $f(x) \in C^{(1)}[-a,a]$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-a}^{a} f(x) e^{i\lambda x}\, dx = \frac{i}{\lambda}\bigg(- f(a)e^{-i\lambda a} + f(-a)e^{i\lambda a} + \int_{-a}^{a} f'(x) e^{i\lambda x}\, dx \bigg). \tag{4.9}$$

Так как $|e^{i\lambda x}| \le e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}$ при $x \in [-a,a]$, то из равенства (4.9) вытекает:

$$\bigg|\int_{-a}^{a} f(x) e^{i\lambda x}\, dx\bigg| \le \frac{1}{|\lambda|} e^{a|\operatorname{Im}\lambda|} \bigg(|f(a)| + |f(-a)| + \int_{-a}^{a} |f'(x)|\, dx \bigg),$$

откуда следует равенство (4.8).

Б) Пусть $f(x) \in L_1[-a,a]$. Так как множество $C^{(1)}[-a,a]$ всюду плотно в пространстве $L_1[-a,a]$, то для любого $\varepsilon > o$ найдется функция $g(x) \in C^{(1)}[-a,a]$, такая, что

$$\int_{-a}^{a} |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Тогда из пункта А) следует, что

$$\int_{-a}^{a} g(x)e^{i\lambda x}\,dx = e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|}\varphi(\lambda),$$

где функция $\varphi(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Далее

$$\left|\int_{-a}^{a} f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \le \left|\int_{-a}^{a} (f(x)-g(x))e^{i\lambda x}\,dx\right| +$$
$$+\left|\int_{-a}^{a} g(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \le e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}(\varepsilon + |\varphi(\lambda)|). \tag{4.10}$$

Так как число ε сколь угодно мало, а $|\varphi(\lambda)| \to 0$, то из неравенства (4.10) вытекает равенство (4.8) $\square$

Лемма 4.2. *Для любой функции $f(x) \in L_1[-a,a]$ справедливо равенство*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|}\int_{-a}^{a} f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx = 0. \tag{4.11}$$

Доказательство. По следствию 3.1 функцию $\varphi(x,\lambda)$ можно представить в виде

$$\varphi(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)e^{i\lambda t}\,dt, \tag{4.12}$$

где $K(x,t)$ — некоторая функция, принадлежащая классу $C^{(1)}\big([-a,a]\times\times[-a,a]\big)$.

Используя равенство (4.12) мы можем написать, что

$$\int_{-a}^{a} f(x)\varphi(x,\lambda)\,dx = I_1(\lambda) + I_2(\lambda),$$

где

$$I_1(\lambda) = \int_{-a}^{a} f(x)e^{i\lambda x}\,dx, \quad I_2(\lambda) = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-x}^{x} f(x)K(x,t)e^{i\lambda t}\,dt\right)dx.$$

Из леммы 4.1 следует:

$$e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|} I_1(\lambda) \to 0 \tag{4.13}$$

при $|\lambda| \to \infty$. В формуле для $I_2(\lambda)$, изменяя порядок интегрирования, получим

$$I_2(\lambda) = \int\limits_{-a}^{a} \biggl(\int\limits_{|x| \geq |t|} f(x) K(x,t) e^{i\lambda t}\, dt \biggr)\, dx.$$

Легко видеть, что функция

$$F(t) = \int\limits_{|x| \geq |t|} f(x) K(x,t) e^{i\lambda t}\, dt$$

принадлежит классу $L_1[-a,a]$, поэтому из леммы 4.1 следует:

$$e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|} I_2(\lambda) \to 0 \tag{4.14}$$

при $|\lambda| \to \infty$. Окончательно, из соотношений (4.13) и (4.14) вытекает равенство (4.11). □

Пусть $S(r) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r\}$ — окружность радиусом r с центром в точке 0. В дальнейших выкладках $C, C_1, C_2, \ldots$ — положительные постоянные, которые не зависят от переменной λ.

Лемма 4.3. *Существует постоянная $C > 0$ и такая последовательность окружностей $S(r_n)$, с неограниченно возрастающими радиусами r_n, на которых выполняется неравенство $|\omega(\lambda)| > Ce^{a|\operatorname{Im}\lambda|}$.*

Доказательство. По определению

$$\omega(\lambda) = \varphi(-a,\lambda) - \alpha\varphi(a,\lambda), \quad |\alpha| = 1.$$

Из формулы (4.12) вытекает, что

$$\omega(\lambda) = \bigl(e^{-i\lambda a} - \alpha e^{i\lambda a}\bigr) - \int\limits_{-a}^{a} \bigl[K(-a,t) + \alpha K(a,t)\bigr] e^{i\lambda t}\, dt. \tag{4.15}$$

Пусть

$$F(a,t) = K(-a,t) + \alpha K(a,t).$$

Тогда равенство (4.15) можно переписать в виде

$$\omega(\lambda) = \omega_1(\lambda) + \omega_2(\lambda), \tag{4.16}$$

где

$$\omega_1(\lambda) = e^{-i\lambda a} - \alpha e^{i\lambda a}, \tag{4.17}$$

$$\omega_2(\lambda) = -\int\limits_{-a}^{a} F(a,t)e^{i\lambda t}\,dt. \tag{4.18}$$

Пусть $\alpha = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Все нули функции $\omega_1(\lambda)$ задаются формулой

$$\lambda_n = -\frac{\theta}{2a} - \frac{\pi n}{a}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $B_\rho(w) = \{\lambda : |\lambda - w| < \rho\}$ — открытый круг радиусом ρ с центром в точке w. Через K_ρ обозначим следующее множество:

$$K_\rho := \mathbb{C} \setminus \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B_\rho(\lambda_n)\Big),$$

где ρ — любое положительное число, заключенное в пределах $0 < \rho < \frac{\pi}{2a}$ (тогда замыкания кругов $B_\rho(\lambda_n)$ не пересекаются).

Докажем, что существует такая постоянная $C_1 > 0$, что на множестве K_ρ выполняется неравенство

$$|\omega_1(\lambda)| > C_1 e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}. \tag{4.19}$$

Пусть

$$K_\rho^+ = K_\rho \cap \{Im\lambda \geq 0\}, \quad K_\rho^- = K_\rho \cap \{Im\lambda \leq 0\}.$$

При $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ функцию $\omega_1(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega_1(\lambda) = e^{-i\lambda a}h(\lambda), \quad \text{где} \;\; h(\lambda) = 1 - \alpha e^{2i\lambda a}.$$

Тогда $\left|e^{-i\lambda a}\right| = e^{a\operatorname{Im}\lambda} = e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}$. Функция $h(\lambda)$ периодическая с периодом $\dfrac{\pi}{a}$. Очевидно, что $h(\lambda) \to 1$ при $\operatorname{Im}\lambda \to +\infty$ и $h(\lambda) \neq 0$ на множестве K_ρ^+. Из принципа максимума для регулярной функции $\frac{1}{h(\lambda)}$ на множестве

$$K_\rho^+ \cap \left\{\lambda : 0 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq \frac{\pi}{a}\right\}$$

следует, что $|h(\lambda)| \geq C_2$ на этом множестве, а из периодичности вытекает, что $|h(\lambda)| \geq C_2$ для всех $\lambda \in K_\rho^+$. Поэтому

$$|\omega_1(\lambda)| > C_2 e^{a|\operatorname{Im}\lambda|} \quad \text{при} \quad \lambda \in K_\rho^+. \tag{4.20}$$

При $\operatorname{Im}\lambda \leq 0$ функцию $\omega_2(\lambda)$ можно представить в виде

$$\omega_1(\lambda) = e^{i\lambda a}\widetilde{h}(\lambda), \quad \text{где } \widetilde{h}(\lambda) = e^{-2i\lambda a} - \alpha.$$

Тогда $\left|e^{i\lambda a}\right| = e^{-a\operatorname{Im}\lambda} = e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}$. Функция $\widetilde{h}(\lambda)$ периодическая с периодом $\dfrac{\pi}{a}$ и $\widetilde{h}(\lambda) \to -\alpha$ при $\operatorname{Im}\lambda \to -\infty$. Из этого, рассуждая, как выше, получаем, что $|\widetilde{h}(\lambda)| \geq C_3$ для $\lambda \in K_\rho^-$ и

$$|\omega_1(\lambda)| > C_3 e^{a|\operatorname{Im}\lambda|} \quad \text{при} \quad \lambda \in K_\rho^-. \tag{4.21}$$

Из неравенств (4.20) и (4.21) вытекает неравенство (4.19).

Интегрируя по частям в формуле (4.18), получим:

$$\omega_2(\lambda) = \frac{i}{\lambda}\bigl(F(a,a) - F(a,-a)\bigr) - \frac{i}{\lambda}\int_{-a}^{a} F_t'(a,t)e^{i\lambda t}\,dt. \tag{4.22}$$

Так как функция $F_t'(a,t)$ непрерывна по t, то из леммы 4.1 и равенства (4.22) следует:

$$|\omega_2(\lambda)| \leq \frac{C_4}{|\lambda|} + C_5\varepsilon(\lambda)e^{a|\operatorname{Im}\lambda|}, \tag{4.23}$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$.

Из формулы (4.16) и оценок (4.20) и (4.23) вытекает, что

$$|\omega(\lambda)| > Ce^{a|\operatorname{Im}\lambda|} \tag{4.24}$$

при $\lambda \in K_\rho$ для достаточно больших значений $|\lambda|$. В качестве окружностей $S(r_n)$ можно взять любые окружности с центром в точке 0, радиусы которых стремятся к бесконечности и которые целиком содержатся во множестве K_ρ. □

Доказательство теоремы 4.1.

Ортогональность системы собственных функций $\{y_n(x)\}$ вытекает из предложения 4.1. Для доказательства полноты системы функций

$\{y_n(x)\}$ достаточно доказать, что если $f(x) \in L_2[-a,a]$ и $\langle f, y_n\rangle = 0$ для всех n, то $f(x) = 0$ почти всюду.

Рассмотрим функцию

$$F(\lambda) := \int_{-a}^{a} \overline{f}(x)\varphi(x,\lambda)\,dx.$$

Функция $F(\lambda)$ является целой, и $F(\lambda_n) = \overline{\langle f, y_n\rangle} = 0$, т. е. точки λ_n являются нулями функции $F(\lambda)$. Так как точки λ_n — это нули функции $\omega(\lambda)$ и все эти нули простые, то функция $\dfrac{F(\lambda)}{\omega(\lambda)}$ тоже является целой. Покажем, что она тождественно равна нулю. По лемме 4.3 на окружности $S(r_n)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{F(\lambda)}{\omega(\lambda)}\right| \le C_5 e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|}|F(\lambda)|.$$

Из леммы 4.2 и принципа максимума следует:

$$\max_{|\lambda|\le r_n}\left|\frac{F(\lambda)}{\omega(\lambda)}\right| \le C_5 e^{-a|\operatorname{Im}\lambda|}|F(\lambda)| \to 0$$

при $n \to \infty$. По теореме Лиувилля отсюда вытекает, что целая функция $\dfrac{F(\lambda)}{\omega(\lambda)}$ тождественно равна нулю.

Используя формулу (4.12), представим функцию $F(\lambda)$ в виде

$$F(\lambda) = \int_{-a}^{a} \overline{f}(x)\left[e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K(x,t)e^{i\lambda t}\,dt\right]dx =$$

$$= \int_{-a}^{a} \overline{f}(x)e^{i\lambda x}\,dx + \int_{-a}^{a}\left[\int_{|t|\ge|x|} \overline{f}(x)K(x,t)\,dx\right]e^{i\lambda t}\,dt =$$

$$= \int_{-a}^{a} g(x)e^{i\lambda x}\,dx,$$

где

$$g(x) = \overline{f}(x) + \int_{|x|\ge|t|} \overline{f}(t)K(t,x)\,dt.$$

Очевидно, что функция $g(x)$ принадлежит классу $L_1[-a,a]$. Так как $F(\lambda) \equiv 0$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} g(x)e^{i\lambda x}\,dx = 0. \tag{4.25}$$

В силу единственности преобразования Фурье $g(x) = 0$ почти всюду на отрезке $[-a,a]$.

Таким образом, получено:

$$\overline{f}(x) + \int\limits_{|x|\geq|t|} \overline{f}(t)K(x,t)\,dt = 0. \tag{4.26}$$

Равенство (4.26) представляет собой интегральное уравнение Абеля. Из единственности решения интегрального уравнения Абеля следует, что $f(x) = 0$ почти всюду на отрезке $[-a,a]$, что и требовалось доказать.

Résumé

We prove the completness of the eigenfunctions of some boundary function-differental problems.

Библиографический список

[1] Dunkl Ch. F. *Differential-difference operators associated to reflection groups* / Ch. F. Duncl // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 311. № 1. P. 167–183.

[2] Rösler M. *Dunkl operators: theory and applications* / M. Rösler // Lect. Notes. Math. 2003. V. 1817. P. 93–135.

[3] Cherednik I. *Hankel transform via double Hecke algebra* / I. Cherednik, Y. Markov // Архив математических статей: [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/004116.

[4] Титчмарш Э. Ч. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Часть 1* / Э. Ч. Титчмарш. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[5] Левитан Б. М. *Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака* / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. М.: Наука, 1988.

[6] Марченко В. А. *Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения* / В. А. Марченко. Киев: Наукова думка, 1977.

[7] Трикоми Ф. *Интегральные уравнения* / Ф. Трикоми. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

[8] Колмогоров А. Н. *Элементы теории функций и функционального анализа* / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1976.

[9] Левитан Б. М. *Обратные задачи Штурма — Лиувилля* / Б. М. Левитан. М.: Наука, 1984.

Петрозаводский государственный
университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33

Поступила в июне 2004 г.