Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 14, 2008

УДК 517.54

Е. Г. Ганенкова

ТЕОРЕМА РЕГУЛЯРНОСТИ УБЫВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

В предлагаемой статье доказывается теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функции в поликруге, являющаяся обобщением аналогичного результата для единичного круга.

В 1964 году в [1] Ch. Pommerenke было введено понятие линейно-инвариантного семейства функций, аналитических в единичном круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$. Линейно-инвариантные семейства стали играть важную роль в теории конформных отображений, так как появилась возможность с общих позиций изучать свойства многих классов локально однолистных в Δ функций.

В [2] понятие линейно-инвариантного семейства было обобщено на случай функций, аналитических в поликруге $\Delta^n = \Delta \times \ldots \times \Delta \subset \mathbb{C}^n$.

Будем рассматривать функции

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n), \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \Delta^n,$$

аналитические в поликруге Δ^n. Норму в $\mathbb{C}^n$ будем определять как $\|z\| = \max\limits_k |z_k|$.

Зафиксируем l, $1 \le l \le n$. Приведем четыре определения из [2].

Определение 1. *Семейство $\mathfrak{M}_l$ аналитических в Δ^n функций $f(z)$ называется l-линейно-инвариантным семейством, если для каждой функции из этого семейства выполняются следующие условия:*

1) $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z) \ne 0$ в Δ^n, $f(\mathbb{O}) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 1$, где $\mathbb{O} = (0, \ldots, 0)$;

2) $f(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l} \in \mathfrak{M}_l$ для любой функции $f \in \mathfrak{M}_l$ и любого $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, где $ze^{i\theta} = (z_1e^{i\theta_1}, ..., z_ne^{i\theta_n})$;

3) для любой функции $f \in \mathfrak{M}_l$ и для любого $a = (a_1, ..., a_n) \in \Delta^n$

$$f_a(z) = \frac{f(\varphi_a(z)) - f(\varphi_a(\mathbb{O}))}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a)(1 - |a_l|^2)} \in \mathfrak{M}_l,$$

где

$$\varphi_a(z) = \left(\frac{z_1 + a_1}{1 + \bar{a}_1 z_1}, \dots, \frac{z_n + a_n}{1 + \bar{a}_n z_n}\right)$$

— автоморфизм поликруга Δ^n.

Заметим, что множество указанных автоморфизмов является лишь подгруппой группы всех автоморфизмов поликруга Δ^n.

Пусть

$$\frac{\partial f}{\partial z_l}(z) = 1 + c_1(f)z_1 + \ldots + c_n(f)z_n + o(\|z\|).$$

Определение 2. *Если функция $f(z)$ удовлетворяет условию 1) определения 1, то порядком функции называется число*

$$\mathrm{ord} f = \sup_{a \in \Delta^n} \frac{1}{2} \left\| \nabla \frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbb{O}) \right\| = \frac{1}{2} \sup_{a \in \Delta^n} \|(c_1(f_a), \dots, c_1(f_a))\| .$$

Определение 3. *Порядком линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}_l$ называется число*

$$\mathrm{ord}\, \mathfrak{M}_l = \sup_{f \in \mathfrak{M}_l} \mathrm{ord}\, f.$$

Определение 4. *Универсальным l-линейно-инвариантным семейством $\mathcal{U}^l_\alpha$ порядка α называется объединение всех l-линейно-инвариантных семейств, порядок которых не превосходит α:*

$$\mathcal{U}^l_\alpha = \bigcup \{\mathfrak{M}_\mathfrak{l} : \mathrm{ord}\mathfrak{M}_\mathfrak{l} \le \alpha\}.$$

При $n = 1$ эти определения совпадают с определениями Ch. Pommerenke из [1].

Пусть $\mathbb{T} = \partial\Delta$, $\mathbb{T}^n$ — остов поликруга. Важным для изучения функций, аналитических в Δ^n, является вопрос о поведении этих функций при приближении z к остову $\mathbb{T}^n$.

В случае $n = 1$ для линейно-инвариантных семейств функций, аналитических в единичном круге Δ, существует класс теорем, известных как теоремы регулярности роста. Утверждения данного типа характеризуют порядок роста модулей функций и их производных при приближении z к $\partial\Delta$. Так, например, для одного из самых известных линейно-инвариантных семейств — класса S однолистных в Δ функций — такие теоремы были получены в работах [3–5]. Для универсальных линейно-инвариантных семейств такие утверждения были доказаны в [6–8].

Принимая во внимание вышеописанный класс теорем, естественно было поставить вопрос о порядке убывания подобных величин. Вследствие этого, автором данной статьи была получена теорема регулярности убывания для универсальных линейно-инвариантных семейств функций, аналитических в единичном круге Δ (см. [9–11]).

После того как понятие линейно-инвариантного семейства было обобщено на случай поликруга, появилась возможность ранее известные результаты для одномерного случая, касающиеся регулярности роста, перенести на поликруг. Это и было сделано в [12], была доказана следующая теорема:

обозначим $z = (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n})$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, $I = (1-, \ldots, 1-)$, для аналитической в Δ^n функции $M(r,p) = \max\limits_{\|z\| \le r} |p(z)|$, для $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$

$$F_\theta(\mathbf{r}) = \left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\theta}) \right| \prod_{k=1}^n \left(\frac{1-r_k}{1+r_k} \right)^\alpha (1-r_l^2).$$

Теорема A *(регулярности роста в $\mathcal{U}_\alpha^l$) [12]. Пусть $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$. Тогда*

1) для любого фиксированного θ величины $F_\theta(\mathbf{r})$ и $\max\limits_\theta F_\theta(\mathbf{r})$ не возрастают по каждой переменной $r_k \in (0;1)$; величина

$$M\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1-r)^{\alpha n+1}}{(1+r)^{\alpha n-1}}$$

не возрастает по $r \in (0;1)$;

2) существуют такие $\delta^0 \in [0,1]$ и $\theta^0 \in \mathbf{R}^n$, что

$$\delta^0 = \lim_{r \to I-} \left[M\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1-r)^{\alpha n+1}}{(1+r)^{\alpha n-1}} \right] = \lim_{\mathbf{r} \to I-} \max_\theta F_\theta(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r} \to I-} F_{\theta^0}(\mathbf{r});$$

3) $\delta^0 = 1 \Longleftrightarrow f(z) = K_\theta(z) =$

$$= \frac{e^{i\theta_l}}{2\alpha} \left[\prod_{k=1}^n \left(\frac{1 + z_k e^{-i\theta_k}}{1 - z_k e^{-i\theta_k}} \right)^\alpha - 1 \right] + Q(z_1, \ldots, z_{l-1}, z_{l+1}, \ldots, z_n),$$

где Q — любая аналитическая в Δ^{n-1} функция, такая, что $Q(\mathbf{O}) = 0$.

В данной работе приводится обобщение результатов из [9–11] для случая Δ^n.

Для $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$ обозначим

$$\Phi_\theta(\mathbf{r}) = \left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\theta})\right| \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^\alpha (1-r_l^2),$$

для аналитической в Δ^n функции $m(r,p) = \min\limits_{\|z\| \le r} |p(z)|$.

Теорема 1 (регулярности убывания в $\mathcal{U}_\alpha^l$). *Пусть $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$. Тогда*

1) для любого фиксированного θ величины $\Phi_\theta(\mathbf{r})$ и $\min\limits_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r})$ не убывают по каждой переменной $r_k \in (0;1)$; величина

$$m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}$$

не убывает по $r \in (0;1)$;

2) существуют такие $\delta_0 \in [1,\infty]$ и $\theta_0 \in \mathbf{R}^n$, что

$$\delta_0 = \lim_{r\to I-} \left[m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}\right] = \lim_{\mathbf{r}\to I-} \min_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}\to I-} \Phi_{\theta_0}(\mathbf{r});$$

3) $\delta_0 = 1 \iff f(z) = k_\theta(z) =$

$$= -\frac{e^{i\theta_l}}{2\alpha}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-z_k e^{-i\theta_k}}{1+z_k e^{-i\theta_k}}\right)^\alpha - 1\right] + Q(z_1,\dots,z_{l-1},z_{l+1},\dots,z_n),$$

где Q — любая аналитическая в Δ^{n-1} функция, такая, что $Q(\mathbf{O}) = 0$.

Доказательство. 1) Для доказательства первого пункта теоремы важную роль будет играть формула из [2] для вычисления порядка функции:

$$\mathrm{ord} f = \max_k \sup_{z\in\Delta^n} \left|\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l \partial z_k} \Big/ \frac{\partial f(z)}{\partial z_l}\right) \frac{1-|z_k|^2}{2} - \bar{z}_k \delta_k^l\right|, \tag{1}$$

здесь δ_k^l — символ Кронекера.

Неубывание функции $\Phi_\theta(\mathbf{r})$ по переменной r_k равносильно неубыванию функции $\ln \Phi_\theta(\mathbf{r}) = T(r_k)$.

Докажем, что $\dfrac{\partial T(r_k)}{\partial r_k} \geq 0$, то есть что справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_l}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l^2}\Big/\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right\}+\frac{\alpha+1}{1+r_l}+\frac{\alpha-1}{1-r_l}\geq 0 \quad \text{при } k=l$$

или

$$\operatorname{Re}\left\{e^{i\theta_k}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l\partial z_k}\Big/\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right\}+\frac{\alpha+1}{1+r_l}+\frac{\alpha-1}{1-r_l}\geq 0 \quad \text{при } k\neq l,$$

после домножения обеих частей неравенства на r_k получим

$$\operatorname{Re}\left\{z_l\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l^2}\Big/\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right\}\geq\frac{-2r_l(\alpha-r_l)}{1-r_l^2} \quad \text{при } k=l \tag{2'}$$

или

$$\operatorname{Re}\left\{z_l\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l^2}\Big/\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right\}\geq\frac{-2\alpha r_k}{1-r_k^2} \quad \text{при } k\neq l. \tag{2''}$$

Для доказательства этого неравенства будем использовать формулу (1). Поскольку $\operatorname{ord} f\leq\alpha$, то из (1) будет следовать, что

$$\left|\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l^2}\Big/\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}\right)\frac{1-|z_l|^2}{2}-\bar z_l\right|\leq\alpha \quad \text{при } k=l$$

или

$$\left|\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l\partial z_k}\Big/\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}\right)\frac{1-|z_k|^2}{2}\right|\leq\alpha \quad \text{при } k\neq l.$$

Домножая это неравенство на $|z_k|$ (при соответствующем k) и переходя от модуля к вещественной части, будем иметь:

$$\operatorname{Re}\left\{z_l\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l^2}\Big/\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}\right)\frac{1-|z_l|^2}{2}-|z_l|^2\right\}\geq-\alpha r_l \quad \text{при } k=l$$

или

$$\operatorname{Re}\left\{z_k\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_l\partial z_k}\Big/\frac{\partial f(z)}{\partial z_l}\right)\frac{1-|z_k|^2}{2}-\right\}\geq-\alpha r_k \quad \text{при } k\neq l.$$

После упрощения получим требуемые неравенства (2′) и (2″). Следовательно, величина $\Phi_\theta(\mathbf{r})$ не убывает по каждой переменной r_k, $k=1,\ldots,n$.

Для любых r'_k, r''_k, $0 < r'_k < r''_k < 1$, $k = 1, \dots n$, по доказанному выше получим, что

$$\min_\theta \Phi_\theta(r_1, \dots, r'_k, \dots, r_n) \le \min_\theta \Phi_\theta(r_1, \dots, r''_k, \dots, r_n),$$

т. е. функция $\min\limits_\theta \Phi_\theta(r_1, \dots, r_n)$ не убывает по каждой переменной r_k, $k = 1, \dots, n$. Полагая здесь $r_1 = \dots = r_n = r$, получим неубывание величины $m\left(r, \dfrac{\partial f}{\partial z_l}\right) \dfrac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}$.

2) Так как $m\left(0, \dfrac{\partial f}{\partial z_l}\right) = 1$ и величина $m\left(r, \dfrac{\partial f}{\partial z_l}\right) \dfrac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}}$ не убывает по $r \in (0; 1)$, то существует предел

$$\lim_{r \to 1-} \left[m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r)^{\alpha m+1}}{(1-r)^{\alpha m-1}} \right] = \delta_0 \in [1; \infty].$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$; $r_k \in (0; 1)$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $r' = \min\limits_k r_k$, $r'' = \max\limits_k r_k$. Из неубывания величины $\min\limits_\theta \Phi_\theta(r_1, \dots, r_n)$ по каждой переменной $r_k \in (0; 1)$ следует, что

$$m\left(r', \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r')^{\alpha n+1}}{(1-r')^{\alpha m-1}} \le \min_\theta \Phi_\theta(r_1, \dots, r_n) \le$$

$$\le m\left(r'', \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r'')^{\alpha n+1}}{(1-r'')^{\alpha n-1}}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\mathbf{r} \to I-$, получим

$$\lim_{\mathbf{r} \to I-} \min_\theta \Phi_\theta(\mathbf{r}) = \delta_0.$$

Докажем, что существует $\theta_0 \in \mathbf{R}^n$, для которого выполняется третье равенство пункта 2) теоремы. Выберем возрастающую последовательность чисел $r^{(k)} > 0$, $r^{(k)} \to 1$. Пусть минимум $m\left(r^{(k)}, \dfrac{\partial f}{\partial z_l}\right)$ достигается в точке $z = z^{(k)} = r^{(k)} e^{i\theta^{(k)}} = \left(r^{(k)} e^{i\theta_1^{(k)}}, \dots, r^{(k)} e^{i\theta_n^{(k)}}\right)$. Из $\theta^{(k)}$ выбирем подпоследовательность, сходящуюся к θ_0, и будем считать, что $\theta^{(k)} \to \theta_0$. Для фиксированного вектора $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ существуют такие числа r и $r^{(k)}$, что $0 < r \le \min\limits_m r_m \le \max\limits_m r_m \le r^{(k)}$. Тогда получим

$$m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}} \le \min_\theta \Phi_\theta(r_1, \dots, r_n) \le \Phi_{\theta^{(k)}}(r_1, \dots, r_n) \le$$

$$\leq \Phi_{\theta^{(k)}}(r^{(k)}, \dots, r^{(k)}) = m\left(r^{(k)}, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r^{(k)})^{\alpha m+1}}{(1-r^{(k)})^{\alpha m-1}}.$$

Устремляя здесь $k \to \infty$, в пределе будем иметь

$$m\left(r, \frac{\partial f}{\partial z_l}\right) \frac{(1+r)^{\alpha n+1}}{(1-r)^{\alpha n-1}} \leq \Phi_{\theta^{(0)}}(r_1, \dots, r_n) \leq \delta_0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to 1-$, получим, что

$$\lim_{\mathbf{r}\to I-} \Phi_{\theta_0}(\mathbf{r}) = \delta_0.$$

3) Пусть $\delta_0 = 1$ для какой-то функции $f_0(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$. Преобразованием поворота $e^{-i\theta} f(ze^{i\theta})$ добьемся, чтобы для этой функции $\theta_0 = \mathbf{O}$. Так как величина $\Phi_{\mathbf{O}}(r_1, \dots, r_n)$ не убывает по каждой переменной $r_k \in (0;1)$, $k = 1, \dots, n$, и $\Phi_{\mathbf{O}}(\mathbf{O}) = 1$, то

$$\Phi_{\mathbf{O}}(r_1, \dots, r_n) \equiv 1 \quad \forall r_k \in (0;1),\ k = 1, \dots, n.$$

Этому тождеству удовлетворяет также функция $k_{\mathbf{O}}(z)$. Тогда

$$\frac{\partial f_0}{\partial z_l}(z) = \frac{\partial k_{\mathbf{O}}}{\partial z_l}(z) e^{i\theta(z)},$$

где $\theta(z)$ — аналитическая в Δ^n функция, вещественная при $z_k \in (0;1)$, $k = 1, \dots, n$,

$$\theta(z) = -i \log\left(\frac{\partial f_0}{\partial z_l}(z) \Big/ \frac{\partial k_{\mathbf{O}}}{\partial z_l}(z)\right).$$

Из принадлежности функции $f_0(z)$ семейству $\mathcal{U}_\alpha^l$ следует, что $\operatorname{ord} f_0 \leq \alpha$. С другой стороны,

$$\operatorname{ord} f = \max_k \sup_{z\in\Delta^n} \left| \left(\frac{\partial^2 f_0(z)}{\partial z_l \partial z_k} \Big/ \frac{\partial f_0(z)}{\partial z_l}\right) \frac{1-|z_k|^2}{2} - \bar{z}_k \delta_k^l \right| =$$

$$= \max_k \sup_{z\in\Delta^n} \left| \left(\frac{\partial^2 k_{\mathbf{O}}(z)}{\partial z_l \partial z_k} \Big/ \frac{\partial k_{\mathbf{O}}(z)}{\partial z_l} + i\frac{\partial \theta}{\partial z_k}\right) \frac{1-|z_k|^2}{2} - \bar{z}_k \delta_k^l \right| \geq$$

$$\geq \max_k \left| \left(\frac{\partial^2 k_{\mathbf{O}}}{\partial z_l \partial z_k}(\mathbf{r}) \Big/ \frac{\partial k_{\mathbf{O}}}{\partial z_l}(\mathbf{r}) + i\frac{\partial \theta}{\partial z_k}(\mathbf{r})\right) \frac{1-r_k^2}{2} - r_k \delta_k^l \right| =$$

$$= \max_k \left| -\alpha + i \frac{\partial \theta}{\partial z_k}(\mathbf{r}) \cdot \frac{1 - r_k^2}{2} \right| = \max_k \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z_k}(\mathbf{r}) \frac{1 - r_k^2}{2} \right)^2} \geq \alpha.$$

Следовательно, $\dfrac{\partial \theta}{\partial z_k}(\mathbf{r}) = 0$ для всех $k = 1, \dots, n, \forall \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$; $r_k = |z_k| \in (0; 1)$. То есть $\dfrac{\partial \theta}{\partial z_k}(z)$ обращается в нуль в действительной окрестности точки $z^{(0)} = x^{(0)} + iy^{(0)} \in \Delta^n$, где $y^{(0)} = 0$, $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, $x_k^{(0)} \in (0; 1)$ $\forall k$. Тогда по теореме единственности ([13, с. 32]) следует, что $\dfrac{\partial \theta}{\partial z_k}(z) = 0$ в Δ^n. Поэтому $\theta(z_1, \dots, z_n) \equiv 0$ в Δ^n, откуда получаем, что $f_0(z) \equiv k_{\mathbf{O}}(z)$. $\square$

Определение 5. *Вектор $\theta_0 \in \mathbf{R}^n$ из п. 2) теоремы будем называть направлением максимального убывания (н.м.у.) функции $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$, число δ_0 — числом Хеймана функции $f(z)$.*

Определение 6. *Направлением интенсивного убывания (н.и.у.) функции $f(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l$ будем называть каждый вектор $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $\theta_k \in [0; 2\pi)$, такой, что*

$$\lim_{\mathbf{r} \to I-} \Phi_\theta(\mathbf{r}) = \delta_\theta < \infty,$$

при этом δ_θ будем называть числом Хеймана, соответствующим н.и.у. θ.

Семейство $\mathcal{U}_\alpha^l$ разобьем на непересекающиеся подклассы $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$, $\delta_0 \in [1; \infty]$. Функциям из $\mathcal{U}_\alpha^l(\delta_0)$ соответствует одно и то же число Хеймана δ_0.

Следующие две теоремы дают информацию о том, как изменяются н.и.у. и числа Хеймана функции $f_a(z)$ при изменении $a \in \Delta^n$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathcal{U}_\alpha^l$. Для фиксированного $a = (a_1, \dots, a_n) \in \Delta^n$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ введем обозначения:*

$$R(\mathbf{r}) = (R_1(r_1), \dots, R_n(r_n)) = \left(\left| \frac{r_1 e^{i\varphi_1} + a_1}{1 + \bar{a}_1 r_1 e^{i\varphi_1}} \right|, \dots, \left| \frac{r_n e^{i\varphi_n} + a_n}{1 + \bar{a}_n r_n e^{i\varphi_n}} \right| \right),$$

$$\gamma(\mathbf{r}) = \left(\arg \frac{r_1 e^{i\varphi_1} + a_1}{1 + \bar{a}_1 r_1 e^{i\varphi_1}}, \dots, \arg \frac{r_n e^{i\varphi_n} + a_n}{1 + \bar{a}_n r_n e^{i\varphi_n}} \right).$$

Тогда

1) чтобы φ являлось н.и.у. функции $f_a(z)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$e^{i\varphi} = \left(\frac{e^{i\gamma_1} - a_1}{1 - \bar{a}_1 e^{i\gamma_1}}, \dots, \frac{e^{i\gamma_n} - a_n}{1 - \bar{a}_n e^{i\gamma_n}} \right), \tag{3}$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — н.и.у. функции $f(z)$.

То есть при голоморфном автоморфизме поликруга Δ^n каждое н.и.у функции $f(z)$ переходит в н.и.у. функции $f_a(z)$ и эти векторы связаны равенством (3);

2) $\lim\limits_{r \to I-} \Phi_\gamma(\mathbf{r}) = \lim\limits_{r \to I-} \Phi_{\gamma(\mathbf{r})}(R(\mathbf{r}))$, где γ и φ связаны формулой (3).

Таким образом, предел выражения

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z_l}(z) \right| \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|} \right)^{\alpha} (1 - |z_l|^2)$$

при $z_k \to e^{i\varphi_k}$ вдоль окружностей в широком смысле, ортогональных $\partial\Delta$, не зависит от вида этих окружностей.

Доказательство. 1) **Необходимость.** Пусть φ — н.и.у. функции $f_a(z)$, то есть существует

$$\lim_{\mathbf{r} \to \mathbf{I}-} \left| \frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbf{r} e^{i\varphi}) \right| \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1 + r_k}{1 - r_k} \right)^{\alpha} (1 - r_l^2) \overset{def}{=} \delta_a < \infty.$$

В то же время, так как

$$\frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbf{r} e^{i\varphi}) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}\left(R(\mathbf{r}) e^{i\gamma(\mathbf{r})} \right)}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a) \cdot (1 + \bar{a}_l r_l e^{i\varphi_l})^2}$$

и

$$\lim_{r_k \to 1-} \frac{1 - R_k(r_k)}{1 - r_k} = \lim_{r_k \to 1-} R_k'(r_k) = \frac{1 - |a_k|^2}{|1 + \bar{a}_k e^{i\varphi_k}|^2},$$

то получим, что

$$\delta_a = \lim_{r \to I-} \left[\frac{\left| \dfrac{\partial f}{\partial z_l}\left(R(\mathbf{r}) e^{i\gamma(\mathbf{r})} \right) \right|}{\left| \dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a) \right| \cdot |1 + \bar{a}_l r_l e^{i\varphi_l}|^2} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 + R_k(r_k)}{1 - R_k(r_k)} \right)^{\alpha} (1 - R_k^2(r_k)) \right] \times$$

$$\times \lim_{\mathbf{r}\to I-} \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-R_k(r_k)}{1-r_k} \right)^{\alpha} \left(\frac{1-r_k^2}{1-R_k^2(r_k)} \right) \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)|(1-|a_l|^2)} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-|a_k|^2}{|1+\bar{a}_k e^{i\varphi_k}|^2} \right)^{\alpha} \right] \cdot \lim_{r\to I-} \Phi_{\gamma(\mathbf{r})}(R(\mathbf{r})).$$

Поскольку последнее выражение в квадратных скобках конечно, то существует предел

$$\lim_{r\to I-} \Phi_{\gamma(\mathbf{r})}(R(\mathbf{r})) = \delta < \infty.$$

Величины $R_k(r_k)$ возрастают на некотором интервале $(r_0, 1)$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Поэтому при $r_0 < r_k < r'_k < 1$ по теореме 1 будем иметь

$$\Phi_{\gamma(\mathbf{r}')}(R(\mathbf{r}')) \geq \Phi_{\gamma(\mathbf{r}')}(R(\mathbf{r})),$$

здесь $\mathbf{r}' = (r'_1, \ldots, r'_n)$. Устремляя в этом неравенстве $\mathbf{r}' \to I-$, для всех $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) : r_k \in (r_0; 1)\ \forall k = 1, \ldots, n$ получим, что

$$\delta \geq \Phi_\gamma(R(\mathbf{r})).$$

Следовательно,

$$\hat{\delta} \stackrel{def}{=} \lim_{r\to I-} \Phi_\gamma(\mathbf{r}) = \lim_{r\to I-} \Phi_\gamma(R(\mathbf{r})) \leq \delta < \infty. \tag{4}$$

Это и означает, что γ является н.и.у. функции $f(z)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Обозначим $F(z) = f_a(z)$,

$$A = \{e^{i\gamma} : \gamma \in \mathbf{R}^n \text{ — н.и.у. функции } f(z)\},$$

$$B = \left\{ \left(\frac{e^{i\varphi_1} + a_1}{1+\bar{a}_1 e^{i\varphi_1}}, \ldots, \frac{e^{i\varphi_n} + a_n}{1+\bar{a}_n e^{i\varphi_n}} \right) : (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \text{ — ... } F(z) \right\},$$

$$C = \{e^{i\eta} : \eta \text{ — н.и.у. функции } F_{-a}(z)\}.$$

По доказанному ранее следует, что $C \subset B \subset A$. С другой стороны, $F_{-a}(z) = f(z)$, значит, $A = C$. Следовательно, $A = B$.

2) Возможны два варианта.

а) Если γ не является н.и.у. для функции $f(z)$, то из первого пункта теоремы следует, что

$$\lim_{\mathbf{r}\to I-}\Phi_\gamma(\mathbf{r})=\lim_{\mathbf{r}\to I-}\Phi_{\gamma(\mathbf{r})}(R(\mathbf{r}))=\infty.$$

б) Пусть γ — н.и.у. функции $f(z)$, δ — то же, что и в п.1). Ранее было доказано, что $\hat{\delta}\le\delta<\infty$ (см. (4)). Остается показать, что $\hat{\delta}\ge\delta$.

Введем обозначения:

$$R^-(\mathbf{r})=(R_1^-(r_1),\dots,R_n^-(r_n))=\left(\left|\frac{r_1e^{i\gamma_1}-a_1}{1-\bar{a}_1r_1e^{i\gamma_1}}\right|,\dots,\left|\frac{r_ne^{i\gamma_n}-a_n}{1-\bar{a}_nr_ne^{i\gamma_n}}\right|\right),$$

$$\gamma^-(\mathbf{r})=\left(\arg\frac{r_1e^{i\gamma_1}-a_1}{1-\bar{a}_1r_1e^{i\gamma_1}},\dots,\arg\frac{r_ne^{i\gamma_n}-a_n}{1-\bar{a}_nr_ne^{i\gamma_n}}\right),$$

$$\delta^-=\lim_{\mathbf{r}\to I-}\left[\left|\frac{\partial f_a}{\partial z_l}\left(\frac{r_1e^{i\gamma_1}-a_1}{1-\bar{a}_1r_1e^{i\gamma_1}},\dots,\frac{r_ne^{i\gamma_n}-a_n}{1-\bar{a}_nr_ne^{i\gamma_n}}\right)\right|\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{k=1}^n\left(\frac{1+R_k^-(r_k)}{1-R_k^-(r_k)}\right)^\alpha(1-R_l^-(r_l)^2)\right].$$

Перепишем (4), заменяя в этом неравенстве функцию f на f_a, $\gamma(r)$ на $\gamma^-(r)$, $R(\mathbf{r})$ на $R^-(\mathbf{r})$, δ на δ^- и учитывая связь между γ и φ (см. (3)):

$$\lim_{r\to I-}\left[\left|\frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\varphi})\right|\prod_{k=1}^n\left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^\alpha(1-r_l^2)\right]\le\delta^-,$$

что равносильно

$$\lim_{r\to I-}\left[\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(R(r)e^{i\gamma(\mathbf{r})})\right|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right|\,|1+\bar{a}_lr_le^{i\varphi_l}|^2}\prod_{k=1}^n\left(\frac{1+R_k(r_k)}{1-R_k(r_k)}\right)^\alpha(1-R_l^2(r_l))\right]\times$$

$$\times\lim_{r\to I-}\left[\prod_{k=1}^n\left(\frac{1-R_k(r_k)}{1-r_k}\right)^\alpha\frac{1-r_l}{1-R_l(r_l)}\right]\le\delta^-.$$

Вычисления, аналогичные приведенным при доказательстве необходимости, показывают, что

$$\delta\le\delta^-\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right|(1-|a_l|^2)\prod_{k=1}^n\left(\frac{|1+\bar{a}_ke^{i\varphi_k}|^{2\alpha}}{(1-|a_k|^2)^\alpha}\right).$$

С другой стороны,

$$\delta^- = \lim_{r\to I-}\left[\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\gamma})\right|}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right|\left(1+\bar{a}_l\frac{r_le^{i\gamma_l}-a_l}{1-\bar{a}_lr_le^{i\gamma_l}}\right)^2}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^{\alpha}(1-r_l)^2\right]\times$$

$$\times\lim_{r\to I-}\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-r_k}{1-R_k^-(r_k)}\right)^{\alpha}\frac{1-R_l^-(r_l)}{1-r_l}\right)=$$

$$=\frac{\hat{\delta}}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right||1+\bar{a}_le^{i\varphi_l}|^2}\cdot\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{I}-}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(R_k^-(r_k))'}\right)^{\alpha}\cdot(R_l^-(r_l))'\right]=$$

$$=\frac{\hat{\delta}}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right|(1-|a_l|^2)}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(1-|a_k|^2)^{\alpha}}{|1+\bar{a}_ke^{i\varphi_k}|^{2\alpha}}\right),$$

так как

$$\lim_{r_k\to1-}(R_k^-(r_k))'=\frac{1-|a_k|^2}{|1-\bar{a_k}e^{i\gamma_k}|^2}=\frac{1-|a_k|^2}{\left|1-\bar{a}_k\frac{e^{i\varphi_k}+a_k}{1+\bar{a}_ke^{i\varphi_k}}\right|^2}=\frac{|1+\bar{a}_ke^{i\varphi_k}|^2}{1-|a_k|^2}.$$

Следовательно, $\delta\le\hat{\delta}$. Достаточность доказана. □

Теорема 3. *Пусть $f(z)\in\mathcal{U}_{\alpha}^{l}(\delta_0)$. Тогда*

1) если $\delta_0=\infty$, то $f(z,a)\in\mathcal{U}_{\alpha}^{l}(\infty)$ для любого $a\in\Delta^n$;

2) если $\delta_0\in(1;\infty)$, то для любого $\delta\in(1;\delta_0]$ существует такое $a\in\Delta^n$, что функция $f_a(z)\in\mathcal{U}_{\alpha}^{l}(\delta)$.

Пусть γ — н.и.у. $f(z)$ и ему соответствует по формуле (3) $\varphi(a)$ — н.и.у. $f_a(z)$. Тогда для любого $\delta\in(1;\infty)$ существует такое $a\in\Delta^n$, что δ будет являться числом Хеймана функции $f_a(z)$, соответствующим н.и.у. $\varphi(a)$ этой функции.

3) Пусть $\delta_0\in(1;\infty)$ и существует такое натуральное $q:1\le q\le n$, что $\{\gamma_q:\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$— н.и.у. функции $f(z)\}$ не попадают в некоторый интервал $(x',x'')\subset[0;2\pi)$. Тогда для любого $\delta\in(1;\infty)$ существует такое $a\in\Delta^n$, что $f_a(z)\in\mathcal{U}_{\alpha}^{l}(\delta)$.

Доказательство. 1) Пусть $\delta_0=\infty$. Это означает, что у функции $f(z)$ нет н.и.у. Но, по теореме 2, у функции $f_a(z)$ также не будет н.и.у. Следовательно, $f_a(z)\in\mathcal{U}_{\alpha}^{l}(\infty)$.

2) По теореме 1 для любого $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbf{R}^n$ существует предел $\lim\limits_{\mathbf{r}\to I-} \Phi_\gamma(\mathbf{r}) = \delta_\gamma$.

Для фиксированных $a \in \Delta^n$ и $\gamma \in \mathbf{R}^n$ воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 2 для $R^-(\mathbf{r})$ и $\delta^- = \delta^-_\gamma(a)$. Тогда

$$\delta^-_\gamma(a) = \delta_\gamma \frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right| (1-|a_l|^2)} \prod_{k=1}^n \frac{|1-\bar{a}_k e^{i\gamma_k}|^{2\alpha}}{(1-|a_k|^2)^\alpha}. \tag{5}$$

Пусть γ будет н.и.у. функции $f(z)$ и $a = \rho e^{i\gamma}$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho_k \in (0;1)$ $\forall k = 1, \dots, n$. Тогда (5) будет иметь вид

$$\delta^-_\gamma(a) = \frac{\delta_\gamma}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})\right| (1-\rho_l^2)} \prod_{k=1}^n \left(\frac{1-\rho_k}{1+\rho_k}\right)^\alpha = \frac{\delta_\gamma}{\Phi_\gamma(\rho)}.$$

Из первого пункта теоремы 1 следует, что непрерывная по $a \in \Delta^n$ (если $a = \rho e^{i\gamma}$, $\rho \in (0;1)^n$) функция $\delta^-_\gamma(a)$ принимает все значения из $(1;\delta_\gamma]$.

Число Хеймана функции $f_a(z)$ будет равно

$$\delta^-(a) = \min_\gamma \delta^-_\gamma(a),$$

здесь γ пробегает множество всех н.и.у. функции $f(z)$. Докажем, что функция $\delta^-(a)$ непрерывна в Δ^n. Будем доказывать от противного. Предположим, что $a^{(0)} = (a_1^{(0)}, \dots, a_n^{(0)})$ — точка разрыва функции $\delta^-(a)$. Тогда существует такая последовательность

$$a^{(m)} = (a_1^{(m)}, \dots, a_n^{(0)}) \in \Delta^n, a^{(m)} \to_{m\to\infty} a^{(0)},$$

что $\lim\limits_{m\to\infty} \delta^-(a^{(m)}) \neq \delta^-(a^{(0)})$. Возможны два варианта:

а) существует такое $\varepsilon > 0$, что при достаточно больших m

$$\varepsilon + \delta^-(a^{(0)}) < \delta^-(a^{(m)}).$$

Так как при некотором $\gamma^{(0)}$ имеет место $\delta^-(a^{(0)}) = \delta^-_{\gamma^{(0)}}(a^{(0)})$ и $\delta^-(a^{(m)}) \le \delta^-_{\gamma^{(0)}}(a^{(m)})$, то

$$\varepsilon + \delta^-_{\gamma^{(0)}}(a^{(0)}) = \varepsilon + \delta^-(a^{(0)}) < \delta^-(a^{(m)}) \le \delta^-_{\gamma^{(0)}}(a^{(m)}).$$

То есть при достаточно больших m имеет место неравенство

$$\|\delta^-_{\gamma(0)}(a^{(m)}) - \delta^-_{\gamma(0)}(a^{(0)})\| > \varepsilon,$$

что противоречит непрерывности по a $\delta^-_{\gamma^{(0)}}(a)$;

б) существует такое $\varepsilon > 0$, что при достаточно больших m

$$\varepsilon + \delta^-(a^{(m)}) < \delta^-(a^{(0)}).$$

Поскольку $\delta^-(a^{(m)}) = \delta^-_{\gamma^{(m)}}(a^{(m)})$ для некоторого н.и.у $\gamma^{(m)}$ функции $f(z)$ и $\delta^-(a^{(0)}) \le \delta^-_{\gamma^{(m)}}(a^{(0)})$, то

$$\varepsilon + \delta^-_{\gamma^{(m)}}(a^{(m)}) < \delta^-(a^{(0)}) \le \delta^-_{\gamma^{(m)}}(a^{(0)}). \tag{6}$$

По теореме искажения в $\mathcal{U}^l_\alpha$ (см. [2]) величины $\left|\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a^{(m)})\right|^{-1}$ и $\left|\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(a^{(0)})\right|^{-1}$ ограничены сверху некоторой положительной констан-той M (здесь учитываем, что $\|a^{(m)} - a^{(0)}\| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Тогда с учетом (5) будем иметь:

$$|\delta^-_{\gamma_m}(a^{(m)}) - \delta^-_{\gamma^{(m)}}(a^{(0)})| \le$$

$$\le \delta_{\gamma^{(m)}} M \left| \frac{1}{(1-|a_l^{(m)}|^2)} \prod_{k=1}^{n} \frac{|1-\bar a_k^{(m)} e^{i\gamma_k^{(m)}}|^{2\alpha}}{(1-|a_k^{(m)}|^2)^\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(1-|a_l^{(0)}|^2)} \prod_{k=1}^{n} \frac{|1-\bar a_k^{(0)} e^{i\gamma_k^{(0)}}|^{2\alpha}}{(1-|a_k^{(0)}|^2)^\alpha} \right| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Это противоречит (6).

Значит, $\delta^-(a)$ непрерывна в Δ^n и, следовательно, принимает в Δ^n все значения от 1 до $\delta^*(\mathbf{O}) = \delta_0$.

Для фиксированного γ положим в (5) $a = -\rho e^{i\gamma}$. Тогда будем иметь

$$\delta^-_\gamma(a) = \frac{\delta_\gamma}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(\rho e^{i\gamma})\right| (1-\rho_l^2)} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}\right)^\alpha =$$

$$= \frac{\delta_\gamma \prod\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1+\rho_k}{1-\rho_k}\right)^{2\alpha}}{\Phi_\gamma(\rho)} \underset{\rho\to I-}{\longrightarrow} \infty.$$

Значит, $\delta_\gamma^-(a)$ может принимать сколь угодно большие значения, следовательно, может принимать все значения из $[\delta_\gamma;\infty)$, так как $\delta_\gamma^-(0) = \delta_\gamma$. А с учетом того, что $\delta_\gamma^-(a)$ принимает все значения из промежутка $(1;\delta_\gamma]$, следует, что $\delta_\gamma^-(a)$ принимает все значения из $(1;\infty)$.

3) В случае $\delta \in (1;\delta_0)$ утверждение было доказано в п. 2 без каких-либо ограничений на множество н.и.у. функции $f(z)$.

Остается проверить справедливость п. 3) в случае $\delta \in (\delta_0;\infty)$.

Обозначим $x'' - x' = 2\eta$, $\theta_q = x' + \eta$, θ_k $(k \neq q)$ — любые фиксированные числа из $[0;2\pi)$, $\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n)$, $a = \rho e^{i\theta}$.

Пусть $\varphi = \varphi(a)$ — н.м.у. функции $f_a(z)$. По теореме 2 при голоморфном автоморфизме поликруга Δ^n оно перейдет в некоторое н.и.у. $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ функции $f(z)$ и связь между этими векторами будет определяться по формуле (3). Для фиксированного $a \in \Delta^n$ число Хеймана функции f_a обозначим

$$\delta^-(a) = \lim_{\mathbf{r}\to I-} \left|\frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbf{r}e^{i\varphi})\right| \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1+r_k}{1-r_k}\right)^{\alpha} (1-r_l^2).$$

Применяя теорему 2 (заменяя f на f_a, γ на φ, $R(\mathbf{r})$ на $R^-(\mathbf{r})$, $\gamma(\mathbf{r})$ на $\gamma_{(\mathbf{r})}$) и равенство (5), получим

$$\delta^-(a) = \lim_{\mathbf{r}\to I-} \left[\left|\frac{\partial f_a}{\partial z_l}\left(\frac{r_1e^{i\gamma_1}-a_1}{1-\bar a_1 e^{i\gamma_1}},\ldots,\frac{r_ne^{i\gamma_n}-a_n}{1-\bar a_n e^{i\gamma_n}}\right)\right| \times\right.$$

$$\left.\times \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+R_k^-(r_k)}{1-R_k^-(r_k)}\right)^{\alpha}(1-R_l^-(r_l)^2)\right] =$$

$$= \delta_\gamma \frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right|(1-|a_l|^2)} \prod_{k=1}^{n} \frac{|1-\bar a_k e^{i\gamma_k}|^{2\alpha}}{(1-|a_k|^2)^{\alpha}},$$

здесь $R_k^-(r_k)$ определяется так же, как и в п. 2).

Положим $a = \rho e^{i\gamma}$, γ — н.и.у. функции f. По теореме 1 существует предел

$$\lim_{\rho\to I-}\left[\left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)\right| \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1+\rho_k}{1-\rho_k}\right)^{\alpha}(1-\rho_k)^2\right] \in [1;\infty). \qquad (7)$$

По условию теоремы выполняется неравенство $\|\gamma_q - \theta_q\| \geq \eta$, поэтому

$$\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1-\rho_k}{|1-\rho_k e^{i(\gamma_k-\theta_k)}|} \right)^{2\alpha} \leq \left(\frac{1-\rho_q}{|1-\rho_q e^{i(\gamma_q-\theta_q)}|} \right)^{2\alpha} \underset{\rho \to I-}{\longrightarrow} 0. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что

$$\left| \frac{\partial f_a}{\partial z_l}(a) \right| \prod_{k=1}^{n} \frac{(1-|a_k|^2)^\alpha}{|1-\bar{a}_k e^{i\gamma_k}|^{2\alpha}} \underset{\rho \to I-}{\longrightarrow} 0.$$

Учитывая последнее соотношение, получим, что $\lim\limits_{\rho \to I-} \delta^-(a) = \infty$. Поэтому существует такое $a_0 \in \Delta^n$, что для функции $f_{a_0}(z)$ число Хеймана $\delta^-(a) > \delta$. Тогда по п. 1) теоремы для функции $F(z) = f_{a_0}(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta^-(a))$ существует такое $a \in \Delta^n$, что $F_a(z) \in \mathcal{U}_\alpha^l(\delta)$. $\square$

Résumé

In this paper the theorem of regularity of decrease for linearly invariant families of functions in the unit polydisk was proved. This result generalizes the analogous theorem for the unit disk.

Список литературы

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I* / Ch. Pommerenke // Math. Ann. 1964. Hf. 155. P. 108–154.

[2] Godula J. *Linearly invariant families of holomorphic functions in the unit polydisk*/ J. Godula, V. V. Starkov// Generalizations of Coplex Analisis. Banach Center Publ. N 37. 1996. P. 115-127.

[3] Krzyz J. *On the maximum modulus of univalent functions* / J. Krzyz // Bull. Acad. Polonici Sci. 1955. V. CI. N 3. P. 203–206.

[4] Хейман В. К. *Многолистные функции* / В. К. Хейман. М.: Иностранная литература, 1960.

[5] Bieberbach L. *Einführung in die konforme Abbildung* / L. Bieberbach. Berlin: Sammlung Göschen, 1967.

[6] Campbell D. M. *Locally univalent function with localy univalent derivatives* / D. M. Campbell // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. P. 395–409.

[7] Старков В. В. *Теорема регулярности в универсальных линейно-инвариантных семействах функций* / В. В. Старков // Труды международной конференции по конструктивной теории функций (Варна, 1984). София, 1984. С. 76–79.

[8] Старков В. В. *Теоремы регулярности для универсальных линейно-инвариантных семейств функций* / В. В. Старков // Сердика. 1985. Т. 11. С. 299–318.

[9] Ганенкова Е. Г. *Теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функций* / Е. Г. Ганенкова // Известия вузов. Математика. № 2. 2007. С. 75–78.

[10] Ганенкова Е. Г. *Теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функций* / Е. Г. Ганенкова // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. Математика. Вып. 13. Петрозаводск, 2006. С. 46–59.

[11] Ganenkova E. G. *On the theorem of regularity of decrease for universal linearly invariant families of functions* (в печати).

[12] Годуля Я. *Теорема регулярности для линейно-инвариантных семейств функций в поликруге* / Я. Годуля, В. В. Старков // Известия вузов. Математика. № 8. 1995. С. 21–33.

[13] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ*: В 2 т. Т. 1 / Б. В. Шабат. М.: Наука, 1976.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: g_ek@inbox.ru