Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 14, 2008

УДК 517.518

С. С. Платонов

ОБОБЩЕННЫЕ СДВИГИ БЕССЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙ

В работе рассматриваются некоторые обратные задачи теории приближения функций на полупрямой $[0;+\infty)$ в весовых L_p-пространствах целыми функциями экспоненциального типа. Используемые в задачах модули непрерывности строятся при помощи операторов обобщенного сдвига Бесселя. Получены аналоги некоторых обратных теорем теории приближений, принадлежащих С. Б. Стечкину, А. Ф. Тиману и М. Ф. Тиману.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

В классической теории приближения функций на прямой $\mathbb{R}$ центральную роль играют операторы сдвига $f(x) \mapsto f(x+y)$, $x, y \in \mathbb{R}$. Так, инфинитезимальным оператором сдвига является оператор дифференцирования, преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига. Оператор сдвига используется для построения модулей непрерывности и гладкости, которые являются основными элементами прямых и обратных теорем теории приближений. Различные обобщения операторов сдвига позволяют формулировать естественные аналоги многих задач классической теории приближений. Одним из обобщений операторов сдвига является группа или полугруппа операторов в банаховом пространстве. Различные задачи теории приближений в банаховых пространствах с группой или полугруппой операторов рассматривались, например, в работах [1, 2]. Другим обобщением операторов сдвига являются так называемые «операторы обобщенного сдвига» (см., например, [3, 4]). Эти операторы не обязательно образуют группу или полугруппу, но построенные по ним обобщенные модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функций и наилучшими приближениями этих функций в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты о приближении функций с использованием операторов обобщенного сдвига см. в работах [4–6] и в приведенных там библиографических списках. Отметим, что в большинстве работ этого направления рассматривается приближение функций многочленами на конечном отрезке.

На полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ одним из важнейших операторов обобщенного сдвига является обобщенный сдвиг Бесселя [7–9]. Обобщенный сдвиг Бесселя используется при изучении различных задач, связанных с дифференциальными операторами Бесселя (см. статью Я. И. Житомирского [10], книгу И. А. Киприянова [8] и ее библиографический список). С обобщенным сдвигом Бесселя тесно связан гармонический анализ Фурье — Бесселя, то есть раздел гармонического анализа, в котором изучаются различные задачи, связанные с интегральными преобразованиями Бесселя (Ганкеля).

Обобщенные сдвиги Бесселя и гармонический анализ Бесселя могут быть использованы для изучения различных задач теории приближений функций на полупрямой $[0; +\infty)$ в весовых L_p-пространствах (см., например, [11 – 14]). В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа. В статьях [13, 14] были получены прямые теоремы теории приближений Джексоновского типа для модуля непрерывности произвольного порядка, построенного на основе обобщенного сдвига Бесселя, а также доказаны некоторые аналоги неравенства С. Н. Бернштейна. В настоящей работе получены аналоги некоторых обратных теорем теории приближений, принадлежащих С. Б. Стечкину, А. Ф. Тиману и М. Ф. Тиману.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Всюду далее α — действительное число, удовлетворяющее условию $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Пусть

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_t := \frac{d^2}{dt^2} + \frac{(2\alpha + 1)}{t} \frac{d}{dt} \tag{1.1}$$

— дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(t)$ нормированную функцию Бесселя первого рода, т. е.

$$j_\alpha(t) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\, J_\alpha(t)}{t^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(x)$ — гамма-функция (см. [7]). Функция $y = j_\alpha(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathcal{B}y + y = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$. Функция $j_\alpha(t)$ четная бесконечно дифференцируемая (и даже целая аналитическая).

Мы будем рассматривать функции на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при этом для удобства будем считать, что функции по четности продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$. Пусть $C(\mathbb{R}_+)$ — множество четных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, $C_c(\mathbb{R}_+)$ — множество непрерывных четных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ — множество четных k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_+$ — множество четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Множества $C(\mathbb{R}_+)$, $C_c(\mathbb{R}_+)$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{D}_+$ являются топологическими векторными пространствами с обычными топологиями. Через $\mathcal{D}'_+$ обозначим множество всех четных обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}_+$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'_+$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}_+$ будем обозначать $\langle f, \varphi \rangle$.

Для любого $1 \le p < \infty$ через $L_{p,\alpha}$ обозначим банахово пространство, состоящее из измеримых функций $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} := \left(\int |f(t)|^p\, t^{2\alpha+1}\, dt \right)^{1/p}.$$

Здесь и в дальнейших формулах интегралы берутся по промежутку $[0, +\infty)$, если отсутствуют пределы интегрирования.

При $p = \infty$ обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(t)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}_+$. Норма в пространстве $L_{\infty,\alpha}$ определяется по формуле

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |f(t)|.$$

Пространство $L_{p,\alpha}$ вкладывается в $\mathcal{D}'_+$, если для $f \in L_{p,\alpha}$ и $\varphi \in \mathcal{D}_+$

положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int f(t)\,\varphi(t)\,t^{2\alpha+1}\,dt. \tag{1.2}$$

Следуя Б. М. Левитану [7], для любой функции $f(t) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t) = u(t,s)$, $t, s \in \mathbb{R}_+$, определим как решение следующей задачи Коши:

$$\mathrm{B}_t u(t,s) = \mathcal{B}_s u(t,s); \tag{1.3}$$

$$u(t,0) = f(t), \qquad \frac{\partial u}{\partial s}(t,0) = 0, \tag{1.4}$$

где $\mathcal{B}_t$ и $\mathcal{B}_s$ — дифференциальные операторы Бесселя, примененные по переменным t и s соответственно. Решение задачи Коши (1.3) – (1.4) существует, единственно и может быть записано в явном виде:

$$T^s f(t) = u(t,s) = c_\alpha \int\limits_0^\pi f(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\varphi})\,(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi, \tag{1.5}$$

где

$$c_\alpha = \left(\int\limits_0^\pi (\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi\right)^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}. \tag{1.6}$$

По формуле (1.5) оператор T^s продолжается до непрерывного оператора в пространстве $L_{p,\alpha}$ и при этом для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$ справедливо неравенство (см. [14, §2])

$$\|T^s f\|_{p,\alpha} \le \|f\|_{p,\alpha}. \tag{1.7}$$

Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$ разности $\Delta_h^k f(t)$ порядка k ($k = 1, 2, 3, \ldots$) с шагом $h > 0$ определяются формулами:

$$\Delta_h^1 f(t) = \Delta_h f(t) := f(t) - T^h f(t), \quad \Delta_h^k f(t) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(t)), \quad k > 1. \tag{1.8}$$

Мы можем также написать

$$\Delta_h^k f(t) = (I - T^h)^k f(t), \qquad k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}, \tag{1.9}$$

где I — тождественный оператор.

Обобщенный модуль непрерывности порядка k в $L_{p,\alpha}$-метрике определим формулой:

$$\omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^k f\|_{p,\alpha}, \quad \delta > 0, \quad f \in L_{p,\alpha}. \tag{1.10}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)$, $\nu > 0$, множество всех функций $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\Phi(t)$ — четная целая функция экспоненциального типа ν;
2) $\Phi(t)$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Функции из класса $\mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)$ будут использоваться в качестве средства приближения. Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ функциями из $\mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)$ определяется как

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} := \inf\{\|f-\Phi\|_{p,\alpha} : \Phi \in \mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)\}.$$

Действие дифференциального оператора $\mathcal{B}$ естественным образом расширяется на пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'_+$, если положить

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi\rangle := \langle f, \mathcal{B}\varphi\rangle, \qquad f \in \mathcal{D}'_+, \quad \varphi \in \mathcal{D}_+.$$

Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближения функций (см. [15, гл. 5]).

Теорема 1.1. *Пусть функции $f, \mathcal{B}f, \dots, \mathcal{B}^m f$ $(m \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\dots\})$ принадлежат пространству $L_{p,\alpha}$, где $\mathcal{B}$ — оператор Бесселя. Тогда для любого $\nu > 0$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} \le \frac{c}{\nu^{2m}}\, \omega_k\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu}\right)_{p,\alpha}, \tag{1.11}$$

где $c = c(k,m,\alpha) > 0$ — некоторая постоянная.

Доказательство. См. [14, теорема 1.1]. □

Для доказательства обратных теорем теории приближения используются различные аналоги неравенства Бернштейна. В работе [14] получены аналоги неравенства Бернштейна для дифференциального оператора Бесселя и для дробной степени оператора Бесселя. В частности, доказана следующая теорема (см. [14, теорема 1.3]).

Теорема 1.2. *Для любой функции $f(t) \in \mathfrak{M}(\nu, p, \alpha)$ справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{B}f\|_{p,\alpha} \le (2\alpha + 2)\,\nu^2\,\|f\|_{p,\alpha}. \tag{1.12}$$

Постоянная $(2\alpha + 2)$ в неравенстве (1.12) точная при $p = \infty$.

В настоящей работе рассматриваются некоторые обратные теоремы теории приближений в пространствах $L_{p,\alpha}$ на основе модуля непрерывности (1.10). Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1.3. *Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, и для любого натурального числа n справедливо неравенство*

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \le \frac{c_1}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{2k-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}, \tag{1.13}$$

где $c_1 = c_1(k, \alpha)$ — некоторая положительная постоянная.

Пусть $W^m_{p,\alpha}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ — пространство Соболева, построенное по дифференциальному оператору $\mathcal{B}$, т. е.

$$W^m_{p,\alpha} := \{f \in L_{p,\alpha} : \mathcal{B}^j f \in L_{p,\alpha}, \quad j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Теорема 1.4. *Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, $k, m \in \mathbb{N}$, и справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{2m-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha} < \infty. \tag{1.14}$$

Тогда функция f принадлежит пространству Соболева $W^m_{p,\alpha}$ и для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\omega_k\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{n}\right)_{p,\alpha} \le c_2 \left(\frac{1}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu + 1)^{2k+2m-1} E_\nu(f)_{p,\alpha} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{2m-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}\right), \tag{1.15}$$

где c_2 — некоторая положительная постоянная, зависящая только от k, m, α.

Теоремы 1.3 и 1.4 являются аналогами классических обратных теорем теории приближений, принадлежащих С. Б. Стечкину для случая

$p = \infty$, А. Ф. Тиману и М. Ф. Тиману для случая $1 \le p < \infty$ (см. [16], [17] или [18]).

§ 2. Доказательства теорем 1.3 и 1.4

Основные свойства модуля непрерывности $\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$ собраны в следующем предложении.

Предложение 2.1. *Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$. Для модуля непрерывности $\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$ справедливы следующие свойства:*

1^0. *По переменной t функция $\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$ не убывает на промежутке $(0,+\infty)$.*

2^0. *Функция $\omega_k(f,t)_{p,\alpha}$ непрерывна по t и $\omega_k(f,t)_{p,\alpha} \to 0$ при $t \to 0$.*

3^0. *Для любых $f, g \in L_{p,\alpha}$ выполняется неравенство*

$$\omega_k(f+g,t)_{p,\alpha} \le \omega_k(f,t)_{p,\alpha} + \omega_k(g,t)_{p,\alpha}.$$

4^0. $\omega_k(f,t)_{p,\alpha} \le 2^k \, \|f\|_{p,\alpha}$.

5^0. *Если $l \le k$, $l \in \mathbb{N}$, то*

$$\omega_k(f,t)_{p,\alpha} \le 2^{k-l} \, \omega_l(f,t)_{p,\alpha}.$$

6^0. *Если $f \in W^m_{p,\alpha}$, то для любого $k > m$ справедливо неравенство*

$$\omega_k(f,t)_{p,\alpha} \le c \, t^{2m} \, \omega_{k-m}(\mathcal{B}^m f, t)_{p,\alpha},$$

где $c = c(m,\alpha)$ — некоторая положительная постоянная.

Доказательство. См. [14, предложение 4.1]. $\square$

Замечание 2.1. *При $k = 0$ будем по определению считать, что*

$$\omega_0(f,t)_{p,\alpha} := \|f\|_{p,\alpha}.$$

Тогда свойства 3^0 и 4^0 из предложения 2.1 остаются верными и для $k = 0$, свойство 5^0 справедливо при $l = 0$, а свойство 6^0 будет верным для любых $k \ge m \ge 0$.

Всюду далее через $c_1, c_2, \ldots$ обозначаются положительные постоянные, которые могут зависеть от α и k.

Доказательство теоремы 1.3.

При доказательстве теоремы 1.3 мы будем следовать общей схеме доказательства аналогичной теоремы в классическом случае (см. [18, глава 6]). Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $E_\nu(f)_{p,\alpha}$ — наилучшее приближение функции f функциями из $\mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)$. Пространство $\mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)$ было определено только при $\nu>0$, но удобно доопределить его для $\nu=0$ и считать, что пространство $\mathfrak{M}(0,p,\alpha)$ состоит только из нулевой функции при $1\le p<\infty$, а пространство $\mathfrak{M}(0,\infty,\alpha)$ состоит из всех постоянных функций. Для каждого $\nu=0,1,2,\ldots$ фиксируем функцию $\Phi(t)\in\mathfrak{M}(\nu,p,\alpha)$, удовлетворяющую условию

$$\|f-\Phi_\nu\|_{p,\alpha}\le 2\,E_\nu(f)_{p,\alpha}. \tag{2.1}$$

Для любых $k,n\in\mathbb{N}$ и $m\in\mathbb{Z}_+$, используя свойства 3^0 и 4^0 из предложения 2.1, можно написать неравенства

$$\begin{aligned}\omega_k\big(f,\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}&\le\omega_k\big(f-\Phi_{2^{m+1}},\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}+\omega_k\big(\Phi_{2^{m+1}},\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}\le\\&\le 2^k\,\|f-\Phi_{2^{m+1}}\|_{p,\alpha}+\omega_k\big(\Phi_{2^{m+1}},\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}\le\\&\le 2^{k+1}\,E_{2^{m+1}}(f)_{p,\alpha}+\omega_k\big(\Phi_{2^{m+1}},\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

С учетом замечания 2.1, из свойства 6^0 предложения 2.1 вытекает, что

$$\omega_k\big(\Phi_{2^{m+1}},\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}\le c_1\,\frac{1}{n^{2k}}\,\omega_0\big(\mathcal{B}^k\Phi_{2^{m+1}},\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha}=c_1\,\frac{1}{n^{2k}}\,\|\mathcal{B}^k\Phi_{2^{m+1}}\|_{p,\alpha}. \tag{2.3}$$

Заметим, что

$$\|\mathcal{B}^k\Phi_{2^{m+1}}\|_{p,\alpha}\le\|\mathcal{B}^k\Phi_1\|_{p,\alpha}+\sum_{\nu=0}^{m}\|\mathcal{B}^k\Phi_{2^{\nu+1}}-\mathcal{B}^k\Phi_{2^\nu}\|_{p,\alpha}. \tag{2.4}$$

Оценим слагаемые в (2.4), используя неравенство Бернштейна (1.12):

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{B}^k\Phi_{2^{\nu+1}}-\mathcal{B}^k\Phi_{2^\nu}\|_{p,\alpha}\le c_2\,2^{2k(\nu+1)}\,\|\Phi_{2^{\nu+1}}-\Phi_{2^\nu}\|_{p,\alpha}=\\&=c_2\,2^{2k(\nu+1)}\,\|(f-\Phi_{2^\nu})-(f-\Phi_{2^{\nu+1}})\|_{p,\alpha}\le c_2\,2^{2k(\nu+1)+2}\,E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha},\end{aligned}\tag{2.5}$$

где $c_2=(2\alpha+2)^k$. Так как функция $\Phi_0(t)$ постоянная, то $\mathcal{B}^k\Phi_0=0$ и можно написать, что

$$\|\mathcal{B}^k\Phi_1\|_{p,\alpha}=\|\mathcal{B}^k\Phi_1-\mathcal{B}^k\Phi_0\|_{p,\alpha}\le c_2\|\Phi_1-\Phi_0\|_{p,\alpha}\le$$

$$\leq 4c_2\, E_0(f)_{p,\alpha} \leq c_2\, 2^{4k+2}\, E_0(f)_{p,\alpha}. \tag{2.6}$$

Заметим, что

$$\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2k-1} \geq \left(2^{\nu-1}\right)^{2k-1} 2^{\nu-1} = 2^{2k(\nu-1)}. \tag{2.7}$$

Используя (2.7) и монотонное убывание $E_\mu(f)_{p,\alpha}$ по μ, можно написать неравенство

$$2^{2k(\nu+1}\, E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha} \leq 2^{4k} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2k-1}\, E_\mu(f)_{p,\alpha}. \tag{2.8}$$

Из неравенств (2.3), (2.4), (2.5), (2.6), учитывая неравенство (2.8), получим оценку

$$\omega_k\Big(\Phi_{2^{m+1}}, \frac{1}{n}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{2^{2k+2}c_1c_2}{n^{2k}}\left(E_0(f)_{p,\alpha} + E_1(f)_{p,\alpha} + \sum_{\nu=1}^{m}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2k-1}\, E_\mu(f)\right) \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{2^m} (\nu+1)^{2k-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}. \tag{2.9}$$

Выбираем теперь m так, чтобы $2^m \leq n < 2^{m+1}$, и, подставляя эту оценку в (2.2), придем к неравенству

$$\omega_k\Big(f, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} \leq 2^{k+1}\, E_n(f)_{p,\alpha} + \frac{c_3}{n^{3k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2k-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}. \tag{2.10}$$

Заметим, что

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2k-1} \geq \sum_{\nu\geq n/2-1} (\nu+1)^{2k-1} \geq \Big(\frac{n}{2}\Big)^{2k-1}\, \frac{n}{2} = 2^{-2k} n^{2k},$$

поэтому

$$2^{k+1}\, E_n(f)_{p,\alpha} \leq \frac{c_4}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2k-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}, \tag{2.11}$$

а из (2.10) и (2.11) следует, что

$$\omega_k\big(f,\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha} \le \frac{c_5}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2k-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}, \tag{2.12}$$

что завершает доказательство теоремы 1.3.

Следствие 2.1. *Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, и для некоторого числа $\gamma > 0$ наилучшие приближения $E_\nu(f)_{p,\alpha}$ удовлетворяют соотношению*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = O\big(\frac{1}{\nu^\gamma}\big) \tag{2.13}$$

при $\nu \to \infty$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ при $t \to 0$ справедлива оценка

$$\omega_k(f,t)_{p,\alpha} = \begin{cases} O(t^\gamma) & \text{при } \gamma < 2k, \\ O(t^\gamma(-\log t)) & \text{при } \gamma = 2k, \\ O(t^{2k}) & \text{при } \gamma > 2k \end{cases} \tag{2.14}$$

Доказательство. Из (2.13) и из неравенства (2.12) вытекает, что

$$\omega_k\big(f,\frac{1}{n}\big)_{p,\alpha} \le \frac{c_1}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2k-1} \frac{1}{(\nu+1)^\gamma}. \tag{2.15}$$

Легко видеть, что

$$\sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{2k-\gamma-1} \le c_2 \int_1^n x^{2k-\gamma-1}\,dx = \begin{cases} O(n^{2k-\gamma}) & \text{при } 2k > \gamma, \\ O(\log n) & \text{при } 2k = \gamma, \\ O(1) & \text{при } 2k < \gamma \end{cases} \tag{2.16}$$

Оценка (2.14) вытекает из (2.15) и (2.16). □

Из теоремы 1.1 (для случая $m = 0$) и из следствия 2.1 вытекает следующее следствие.

Следствие 2.2. *Пусть γ — произвольное положительное число, k — натуральное число, удовлетворяющее условию $2k > \gamma$. Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$ условия*

$$\omega_k(f,t)_{p,\alpha} = O(t^\gamma) \qquad \text{при } t \to 0$$

и

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = O\Big(\frac{1}{\nu^\gamma}\Big) \qquad \text{при } \nu \to \infty$$

эквивалентны.

Доказательство теоремы 1.4. Всюду далее будем считать, что $c_1, c_2, \ldots$ — некоторые положительные постоянные, которые могут зависеть только от k, m, α. При доказательстве теоремы 1.4 мы будем следовать общей схеме доказательства аналогичной теоремы из [18, глава 6] и будем использовать обозначения из доказательства теоремы 1.3.

Для любого натурального числа r, удовлетворяющего неравенству $r \le m$, рассмотрим ряд

$$\mathcal{B}^r\Phi_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}\big(\mathcal{B}^r\Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r\Phi_{2^\nu}\big). \tag{2.17}$$

Рассуждая как при доказательстве неравенства (2.5), получаем оценки для отдельных слагаемых из ряда (2.17):

$$\|\mathcal{B}^r\Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r\Phi_{2^\nu}\|_{p,\alpha} \le c_1\, 2^{2r(\nu+1)+2}\, E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha}, \tag{2.18}$$

где $c_1 = (2\alpha+2)^m$. Используя неравенство (2.8), можно написать, что

$$2^{2r(\nu+1)}\, E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha} \le 2^{4r} \sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2r-1}\, E_\mu(f). \tag{2.19}$$

Из последней оценки вытекает сходимость ряда (2.17) по норме пространства $L_{p,\alpha}$, так как

$$\|\mathcal{B}^r\Phi_1\|_{p,\alpha} + \sum_{\nu=0}^{\infty}\|\mathcal{B}^r\Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r\Phi_{2^\nu}\|_{p,\alpha} \le$$

$$\le \|\mathcal{B}^r\Phi_1\|_{p,\alpha} + c_1\, 2^{4r+2}\, E_1(f)_{p,\alpha} + c_1\, 2^{4r+2} \sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu} \mu^{2r-1}\, E_\mu(f)_{p,\alpha} =$$

$$= \|\mathcal{B}^r\Phi_1\|_{p,\alpha} + c_1\, 2^{4r+2}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{2r-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}\right) < \infty.$$

Заметим, что

$$f = \Phi_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}\big(\Phi_{2^{\nu+1}} - \Phi_{2^\nu}\big), \tag{2.20}$$

причем ряд (2.20) сходится в пространстве $L_{p,\alpha}$ и, тем более, в пространстве $\mathcal{D}'_+$ обобщенных функций. Так как оператор $\mathcal{B}$ является линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{D}'_+$, то в пространстве $\mathcal{D}'_+$ справедливо равенство

$$\mathcal{B}^r f = \mathcal{B}^r \Phi_1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} \big(\mathcal{B}^r \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^r \Phi_{2^\nu}\big). \tag{2.21}$$

Из того, что правая часть в формуле (2.21) принадлежит пространству $L_{p,\alpha}$ при $r \le m$, следует, что функция f принадлежит пространству Соболева $W^m_{p,\alpha}$ и, в частности, $\mathcal{B}^m f \in L_{p,\alpha}$.

Для любого числа $s \in \mathbb{Z}_+$ можно написать неравенство

$$\omega_k\Big(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} \le \omega_k\Big(\mathcal{B}^m f - \mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} + \omega_k\Big(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha}. \tag{2.22}$$

Далее, используя свойства модуля непрерывности из предложения 2.1, неравенство (2.18) и формулу (2.21), получим

$$\omega_k\Big(\mathcal{B}^m f - \mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} \le 2^k \, \|\mathcal{B}^m f - \mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}\|_{p,\alpha} \le$$
$$\le 2^k \sum_{\nu=s+1}^{\infty} \|\mathcal{B}^m \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^m \Phi_{2^\nu}\| \le 2^k \sum_{\nu=s+1}^{\infty} c_1\, 2^{2m(\nu+1)+2}\, E_{2^\nu}(f)_{p,\alpha} \le$$
$$\le c_1\, 2^{k+2r+2} \sum_{\mu=2^s+1}^{\infty} \mu^{2m-1}\, E_\mu(f)_{p,\alpha}. \tag{2.23}$$

Из свойства 6^0 предложения 2.1 вытекает, что

$$\omega_k\Big(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} \le \omega_k\Big(\mathcal{B}^m \Phi_1, \frac{1}{n}\Big) + \sum_{\nu=0}^{s} \omega_k\Big(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^m \Phi_{2^\nu}, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} \le$$
$$\le \frac{c_2}{n^{2k}} \left\|\mathcal{B}^{m+k} \Phi_1\right\|_{p,\alpha} + \frac{c_2}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{s} \left\|\mathcal{B}^{m+k} \Phi_{2^{\nu+1}} - \mathcal{B}^{m+k} \Phi_{2^\nu}\right\|.$$

Далее, используя неравенства (2.5), (2.6) и (2.8), получим

$$\omega_k\Big(\mathcal{B}^m \Phi_{2^{s+1}}, \frac{1}{n}\Big)_{p,\alpha} \le \frac{c_3}{n^{2k}} \sum_{\nu=0}^{2^s} (\nu+1)^{2k+2m-1}\, E_\nu(f)_{p,\alpha}. \tag{2.24}$$

Возьмем неотрицательное число s, удовлетворяющее неравенству $2^s \le n < 2^{s+1}$, тогда из (2.22), (2.23) и (2.24) мы получим неравенство (1.15), что завершает доказательство теоремы 1.4.

Используя теорему 1.4 и рассуждая как при доказательстве следствия 2.1, мы получим следующее следствие.

Следствие 2.3. *Пусть $f \in L_{p,\alpha}$, $1 \le p \le \infty$, и существуют числа $m \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$ такие, что наилучшие приближения $E_\nu(f)_{p,\alpha}$ удовлетворяют соотношению*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = O\Big(\frac{1}{\nu^{2m+\gamma}}\Big)$$

при $\nu \to \infty$. Тогда функция f принадлежит пространству Соболева $W^m_{p,\alpha}$ и для любого числа $k \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\omega_k\big(\mathcal{B}^m f, t\big)_{p,\alpha} = \begin{cases} O(t^\gamma) & \text{при } \gamma < 2k, \\ O(t^\gamma(-\log t)) & \text{при } \gamma = 2k, \\ O(t^{2k}) & \text{при } \gamma > 2k \end{cases}$$

при $t \to 0$.

Из теоремы 1.1 и следствия 2.3 вытекает еще одно следствие.

Следствие 2.4. *Пусть γ — произвольное положительное число, m и k — натуральные числа, причем k удовлетворяет условию $2k > \gamma$. Для любой функции $f \in L_{p,\alpha}$ условия*

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = O\Big(\frac{1}{\nu^{2m+\gamma}}\Big) \qquad \text{при } \nu \to \infty$$

и

$$f \in W^m_{p,\alpha}, \qquad \omega_k(\mathcal{B}^m f, t)_{p,\alpha} = O(t^\gamma) \qquad \text{при } t \to 0$$

эквивалентны.

Résumé

The generalized translations of Bessel and the harmonic analysis of Bessel may be used for study some problems of approximations of functions on the half-line $[0, +\infty]$ in the weighted L_p spaces. Using generalized translations of Bessel we can define generalized moduli of continuity and we can consider many natural analogs of classical problems of approximation. As aggregates

of approximation we use certain class of entire functions of exponential type. In this paper we obtain some analogs of classical inverse approximation theorems due to S. B. Stechkin, A. F. Timan and M. F. Timan.

Список литературы

[1] Butzer P. L. *Semi-groups of operators and approximation* / P. L. Butzer, H. Behrens. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.

[2] Терехин А. П. *Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение* / А. П. Терехин. Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратовского гос. университета, 1975. Вып. 2. С. 3–28.

[3] Левитан Б. М. *Теория операторов обобщенного сдвига* / Б. М. Левитан. М.: Наука, 1973.

[4] Löfstróm J. *Approximation theorems connected with generalized translations* / J. Löfstróm, J. Peetre // Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

[5] Потапов М. К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений* / М. К. Потапов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика., механика. 1998. № 3. С. 38–48.

[6] Ditzian Z. *Moduli of smoothness* / Z. Ditzian, V. Totik. New York: Springer–Verlag, 1987.

[7] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* / Б. М. Левитан // Успехи матем. наук. 1951. Т. 6. № 2. С. 102–143.

[8] Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи* / И. А. Киприянов. М.: Наука, Физматлит, 1997.

[9] Trimèche K. *Generalized harmonic analysis and wavelet packets* / K. Triméche. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publ, 2000.

[10] Житомирский Я. И. *Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя* / Я. И. Житомирский // Матем. сб. 1955. Т. 36. № 2. С. 299–310.

[11] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике $L_{2,\alpha}$. I* / С. С. Платонов // Труды ПетрГУ. Сер. математика. 2000. Вып. 7. С. 70–82.

[12] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений функций в метрике $L_{2,\alpha}$. II* / С. С. Платонов // Труды ПетрГУ. Сер. математика. 2001. Вып. 8. С. 1–17.

[13] Платонов С. С. *Аналоги неравенств Бернштейна и Никольского для одного класса целых функций экспоненциального типа* / С. С. Платонов // Доклады АН. 2004. Т. 398. № 2. С. 168–171.

[14] Платонов С. С. *Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой* / С. С. Платонов // Известия РАН. Сер. математика. 2007. Т. 71. № 5. С. 149–196.

[15] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. М.: Наука, 1977.

[16] Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций / С. Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1951. Т. 15. С. 219–242.

[17] Тиман А. Ф. Обобщенный модуль непрерывности и наилучшее приближение в среднем / А. Ф. Тиман, М. Ф. Тиман // Доклады АН СССР. 1950. Т. 71, № 1. С. 17–20.

[18] Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман. М.: Физматгиз, 1960.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33