Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 15, 2009

УДК 517

В. В. Мосягин

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В SF-ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

В работе доказываются теоремы о неподвижных точках в SF-пространствах с конусом.

1. Пусть X — векторное пространство над полем скаляров Φ ($\Phi = \mathbb{C}$ или R), θ — нулевой элемент этого пространства. Рассмотрим функционал $p(x)$, $x \in X$, удовлетворяющий условиям:

1) $p(x) \geq 0$, $p(x) = 0 \iff x = \theta$;
2) $p(\lambda_n x_n - \lambda x) \to 0$ для всех последовательностей $\{\lambda_n\} \subset \Phi$ и $\{x_n\} \subset X$ таких, что $\lambda_n \to \lambda$ в поле Φ и $p(x_n - x) \to 0$;
3) $p(x_n + y_n - x - y) \to 0$ для всех последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ таких, что $p(x_n - x) \to 0$ и $p(y_n - y) \to 0$;
4) $p(\lambda x) = p(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \Phi$, $|\lambda| = 1$;
5) $p(x_n) \to p(x)$ для каждой последовательности $\{x_n\} \subset X$ такой, что $p(x_n - x) \to 0$.

Функционал p называется SF-нормой [1].

Если, кроме того, пространство X является полным по отношению к топологии, порожденной семейством $\{S(x,r)\}$ ($x \in X, r > 0$), где $S(x,r) = \{y \in X,\ p(y-x) < r\}$, то пара (X,p) называется SF-пространством.

Если $p(\lambda_1 x) \geq p(\lambda_2 x)$ при каждом $x \in X$ и $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$, то p называется неубывающей SF-нормой.

Каждое SF-пространство является полным метризуемым линейным топологическим пространством. Все F-пространства являются SF-пространствами [1].

2. В этом пункте будем предполагать, что X — вещественное SF-пространство.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ называется конусом, если $x \in K$, $x \neq \theta$, влечет за собой $\lambda x \in K$ при $\lambda \geq 0$ и $-x \notin K$.

Любой конус $K \subset X$ позволяет ввести в SF-пространстве X полуупорядоченность: $x \geqslant y$, если $x - y \in K$. Элемент $x \geqslant \theta$ (то есть элемент конуса K) называется положительным. Свойство замкнутости конуса K позволяет в неравенствах переходить к пределу: если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две сходящиеся (соответственно к точкам x и y) последовательности в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K, то есть $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$, причем $x_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $x \leqslant y$.

Наличие полуупорядоченности в X позволяет ввести понятия мажоранты, миноранты, супремума и инфимума.

Если множество $M \subset X$ имеет мажоранту, то его называют ограниченным сверху, если имеет миноранту — ограниченным снизу. Конусным отрезком в X называется множество

$$\langle v, w \rangle = \{x \in X | v \leqslant x \leqslant w\}. \tag{1}$$

Множество $\langle v, w \rangle$ выпукло и замкнуто.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядоченность в SF- пространстве X, может обеспечить дополнительные свойства полуупорядоченности. Это обстоятельство, как и в случае банаховых пространств, стимулирует изучение различных классов конусов в X (см. [3]).

Определение 1. *Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов имеет точную верхнюю границу:*

$$x = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

и сильно миниэдральным, если точная верхняя граница существует у любого ограниченного сверху непустого множества.

Определение 2. *Конус K в X называется правильным, если каждая неубывающая последовательность*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \leqslant y \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

сходится в X.

Определение 3. *Конус K в пространстве X называется нормальным, если из условий $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $x_n \to u$, $z_n \to u$ следует, что $y_n \to u$.*

3. Тот факт, что SF-пространство полуупорядочено при помощи некоторого конуса K, может использоваться при изучении оператора A, действующего в X, лишь в том случае, когда A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 4. *Оператор A, действующий в SF-пространстве X, называется*

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $M \subset X$, если из $x, y \in M$ и $x \leqslant y$ следует $A(x) \leqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы, а для линейных — из свойства положительности следует свойство монотонности.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в SF-пространстве X, могут быть указаны такие элементы v_0 и w_0, что

$$v_0 \leqslant w_0, \quad A(v_0) \geqslant v_0, \quad A(w_0) \leqslant w_0. \tag{4}$$

Тогда оператор A отображает конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в себя. Действительно, из неравенств $v_0 \leqslant x \leqslant w_0$ следует

$$v_0 \leqslant A(v_0) \leqslant A(x) \leqslant A(w_0) \leqslant w_0.$$

Построим последовательности

$$v_n = A(v_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Первая из них, в силу (4), монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому эти последовательности сходятся, если K — правильный конус. Если оператор A непрерывен, то в равенстве (5) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = A(v^*), \quad w^* = A(w^*),$$

где v^*, w^* — пределы последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ соответственно. При этом элементы v^* и w^* могут быть различными.

Приведенное рассуждение показывает, что для доказательства существования решения уравнения $Ax = x$ в пространстве X с непрерывным и монотонным оператором A и для построения последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_0, w_0, удовлетворяющих соотношениям (4). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — правильный конус в SF-пространстве X и A — непрерывный монотонный оператор на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$, преобразующий этот отрезок в себя. Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0 \rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку. При этом последовательности (5) сходятся к неподвижным точкам оператора A.*

Теорема 2. *Пусть конус K в SF-пространстве X правильный, а оператор A обладает свойствами:*

1) *монотонен на конусном отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$ и преобразует его в себя;*
2) *непрерывен;*
3) *имеет единственную неподвижную точку на отрезке $\langle v_0, w_0 \rangle$.*

Тогда последовательные приближения

$$y_n = A(y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

сходятся к x^*, каково бы ни было $y_0 \in \langle v_0, w_0 \rangle \subset X$.

Доказательство. Последовательности (5) и (6) удовлетворяют неравенствам

$$v_n \leqslant y_n \leqslant w_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Последовательности (5) сходятся и их пределы являются неподвижными точками оператора A. Из единственности неподвижной точки следует, что пределы последовательностей (5) совпадают. Кроме того, в полных метрических пространствах с замкнутым конусом каждый правильный конус нормален (см. [2]). Следовательно, последовательность (6) сходится к x^*. Теорема доказана. □

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. (Принцип Биркгофа — Тарского [3]). *Пусть конус K в SF-пространстве X сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор A (необязательно непрерывный), оставляющий инвариантным конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$, имеет на $\langle v_0, w_0 \rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку.*

Résumé

Some fixed point theorems for nonlinear monotone operators in SF-space with a cone are proved.

Список литературы

[1] Michenrda B. *Bernstein's "lethargy"theorems in SF-spaces* / B. Michendra // J. for Analysis and its Applications. V. 22 (2003). No 1. P. 3–16.

[2] McArtur C. V. *Convergence of monotone nets in ordered topological vector spaces* / C. V. McArtur // Studia Math. 34 (1970). P. 1–16.

[3] Опойцев В. И. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом* / В. И. Опойцев, Т. А. Хурадзе. Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1984.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33