Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 16, 2009

УДК 517

В. В. Мосягин

ТЕОРЕМЫ О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ С КОНУСОМ

В работе доказываются теоремы о неподвижных точках в пространствах Фреше с конусом.

1. Пусть (X, τ) — пространство Фреше над полем скаляров Φ ($\Phi = \mathbb{C}$ или R), $\mathcal{P} = \{p_i, i \in \mathbb{N}\}$ — счетная система полунорм в X, определяющая топологию τ в X [1]. θ — нулевой элемент этого пространства.

Система полунорм $\mathcal{P}$ определяет в X инвариантную метрику

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}, \qquad \forall x, y \in X.$$

Пара (X, ρ) является полным линейным метрическим пространством [2].

2. Всюду ниже будем предпологать, что X — вещественное пространство Фреше.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ называется конусом, если $x \in K$, $x \neq \theta$, влечет за собой $\lambda x \in K$ при $\lambda \geq 0$ и $-x \notin K$.

Любой конус $K \subset X$ позволяет ввести в пространстве X полуупорядоченность: $x \geqslant y$, если $x - y \in K$. Элемент $x \geqslant \theta$ (то есть элемент конуса K) называется положительным. Свойство замкнутости конуса K позволяет в неравенствах переходить к пределу: $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — две сходящиеся по полунормам (соответственно к точкам x и y) последовательности в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K, то есть $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$, причем $x_n \leqslant y_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), то $x \leqslant y$.

Наличие полуупорядоченности в X позволяет ввести понятия мажоранты, миноранты, супремума и инфимума.

Если множество $M \subset X$ имеет мажоранту, то его называют ограниченным сверху, если имеет миноранту — ограниченным снизу.

Конусным отрезком в X называется множество

$$\langle v, w\rangle = \{x \in X | v \leqslant x \leqslant w\}. \tag{1}$$

Множество $\langle v, w\rangle$ выпукло и замкнуто. В общем случае $\langle v, w\rangle$ не является ограниченным по полунормам множеством.

Рассмотрим некоторые разновидности конусов в X.

Определение 1. *Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов имеет точную верхнюю границу:*

$$x = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

и сильно миниэдральным, если точная верхняя граница существует у любого ограниченного сверху непустого множества.

Определение 2. *Конус K в X называется правильным, если каждая неубывающая последовательность*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом

$$x_n \leqslant y \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

сходится по полунормам в пространстве X.

Определение 3. *Конус K в пространстве Фреше X называется нормальным, если из неравенств $\theta \leqslant x \leqslant y$ следуют неравенства*

$$p_i(x) \leq p_i(y), \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

В полных линейных метрических пространствах с замкнутым конусом правильный конус нормален [3].

Лемма 1. *Пусть K — правильный конус в пространстве Фреше X и пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — последовательности в X, сходящиеся по полунормам к одному и тому же элементу $z \in X$. Пусть, кроме того,*

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Тогда $p_i(z_n - z) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Из (5) следует, что

$$\theta \leqslant z_n - x_n \leqslant y_n - x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как K нормален, то

$$p_i(z_n - x_n) \leq p_i(y_n - x_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

для каждой полунормы p_i, $(i = 1, 2, \ldots)$. Отсюда

$$p_i(z_n - z) \leq 2p_i(x - z) + p_i(y_n - z), \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

для каждой полунормы p_i, $(i = 1, 2, \ldots)$. Лемма доказана. □

3. Тот факт, что пространство Фреше полуупорядочено при помощи конуса, может использоваться при изучении оператора A, действующего в X, лишь в том случае, когда A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 4. *Оператор A, действующий в пространстве Фреше X, называется*

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $M \subset X$, *если из* $x, y \in M$ *и* $x \leqslant y$ *следует* $A(x) \leqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы, а для линейных — из свойства положительности следует свойство монотонности.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в пространстве Фреше X, могут быть указаны такие элементы v_0 и w_0, что

$$v_0 \leqslant w_0, \quad A(v_0) \geqslant v_0, \quad A(w_0) \leqslant w_0. \tag{6}$$

Тогда оператор A отображает конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в себя. Действительно, из неравенств $v_0 \leqslant x \leqslant$

$$v_0 \leqslant A(v_0) \leqslant A(x) \leqslant A(w_0) \leqslant w_0.$$

Построим последовательности

$$v_n = A(v_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Первая из них, в силу (5), монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому эти последовательности сходятся, если K — правильный конус. Если оператор A непрерывен, то в равенствах (7) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = A(v^*), \quad w^* = A(w^*),$$

где v^*, w^* — пределы последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ соответственно. При этом элементы v^* и w^* могут быть различными.

Приведенное рассуждение показывает, что для доказательства существования решения уравнения $Ax = x$ в пространстве Фреше X с непрерывным и монотонным оператором A и для построения последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_0, w_0, удовлетворяющих соотношениям (6). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — правильный конус в пространстве Фреше X и A — непрерывный монотонный оператор на конусном отрезке $\langle v_0, w_0\rangle$, преобразующий этот отрезок в себя. Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0\rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку. При этом последовательные приближения (7) сходятся к неподвижным точкам оператора A.*

Теорема 2. *Пусть K — правильный конус в пространстве Фреше X, а оператор A обладает свойствами:*

1) *монотонен на конусном отрезке $\langle v_0, w_0\rangle$ и преобразует его в себя;*
2) *непрерывен;*
3) *имеет единственную неподвижную точку x^* на отрезке $\langle v_0, w_0\rangle$.*

Тогда последовательные приближения

$$y_n = A(y_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

сходятся к x^*, каково бы ни было $y_0 \in \langle v_0, w_0\rangle \subset X$.

Доказательство. Последовательности (7) и (8) удовлетворяют неравенствам

$$v_n \leqslant y_n \leqslant w_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Последовательности (7) сходятся и их пределы являются неподвижными точками оператора A. Из единственности неподвижной точки следует, что пределы последовательностей (7) совпадают. Кроме того, в пространстве Фреше правильный конус нормален. Следовательно, последовательность (8) сходится к x^*. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть в пространстве Фреше с конусом K монотонный на конусном отрезке $\langle v_0, w_0\rangle$ оператор A удовлетворяет условиям*

а) $A(v_0) \geqslant v_0, \quad A(w_0) \leqslant w_0;$

б) A непрерывен и компактен.

Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0\rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку.

Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы Шаудера — Тихонова.

Résumé

Some fixed point theorem for nonlinear monotone operators in Freschet space with a cone are pruved.

Список литературы

[1] Larsen R. *Functional analysis. An Introduction* / R. Larsen. New York: Dekker, 1973.

[2] Rolevich S. *Functional Analisis and Control Theory* / S. Rolevich. Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers, 1987.

[3] McArtur C. V. *Convergence of monotone nets in ordered topological vector spaces* / C. V. McArtur // Studia Math. 34 (1970). P. 1–16.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33