Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 17, 2010

УДК 511

Б. М. Широков, А. Г. Иванова

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЕЛИТЕЛЕЙ В КЛАССАХ ВЫЧЕТОВ ПО РАСТУЩЕМУ МОДУЛЮ

В работе устанавливается асимптотическая формула с остаточным членом для распределения значений обобщенной функции делителей в классах вычетов по растущему модулю.

Пусть X — действительный неглавный характер по фиксированному модулю $m \not\equiv 0 \pmod 8$. Обобщенная функция делителей определяется равенством

$$d(n, X) = \sum_{d|m} X(n).$$

Задача о распределении целозначных арифметических функций в классах вычетов рассматривалась И. Нивеном в работе [1]. В 1967 г. В. Наркевич в работе [2] рассмотрел равномерное распределение значений мультипликативных функций в классах вычетов, взаимно простых с модулем и назвал его слабо равномерным распределением в классах вычетов. Приведем его определение, но прежде оговорим обозначения, которые будут использованы в этой работе. Для $x > 0$ и функции $f(n)$ обозначим

$$\nu_a(x, f) = |\{n \le z | f(n) \equiv a \pmod N\}|,$$

где $|A|$ означает количество элементов конечного множества A; $G(N)$ — мультипликативная группа вычетов по модулю N, взаимно простых с N; p и q — простые числа, χ и χ_0 — произвольный и главный характеры по модулю N.

Определение 1. *Целозначная арифметическая функция $f(n)$ называется слабо равномерно распределенной по модулю N, если для любых $a, b \in G(N)$ при $x \to +\infty$*

$$\nu_a(x, f) \sim \nu_b(x, f)$$

при условии, что множество $\{n \mid (f(n), N) = 1\}$ бесконечно.

В работе [2] В. Наркевич приводит условия слабо равномерного распределения функции делителей $d(n)$ и функции Эйлера $\varphi(n)$ и асимптотические формулы, содержащие только главные члены, распределения значений этих функций в классах вычетов. При этом использовалось их свойство полиномоподобности, а для получения асимптотических формул — тауберова теорема Деланжа.

Функция $d(n, X)$, рассматриваемая в этой работе, не является полиномоподобной. Условия ее слабо равномерного распределения даны в работе [3].

Производящие ряды Дирихле, которые используются для получения асимптотических формул распределения значений $d(n, X)$, обладают значительно лучшими свойствами, чем того требует теорема Деланжа. Поэтому мы будем использовать вместо этой теоремы лемму, приводимую ниже. Для ее формулировки потребуются дополнительные обозначения. Для некоторых положительных чисел a и b обозначим на s-плоскости, $s = \sigma + it$,

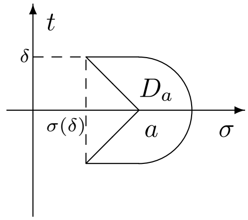
$$\sigma_a(t) = a - \frac{b}{\ln(2 + |t|)}, \ -\infty < t < +\infty;$$
$$\Omega(a) = \left\{ s | \sigma \geq \max\left\{\sigma_a(t), \frac{3a}{4}\right\}, \ -\infty < t < +\infty \right\}.$$

Для комплекснозначной функции $f(n)$ обозначим

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

а через $S(x)$ — сумматорную функцию коэффициентов этого ряда:

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(n).$$



Положим $\delta = 2/\ln x$ и через D_a обозначим область, ограниченную контурами:

$$s-a = e^{i\varphi},\ |\varphi| \le \frac{\pi}{2};\quad t = \pm\delta,\ \sigma_a(\delta) \le \sigma \le a,$$

и двумя отрезками прямых, соединяющими точки $s = \sigma_a(\delta) \pm i\delta$ с точкой $s = a$.

Лемма. *Если $|f(n)| \le 1$ и для некоторого числа $a > 0$ существует такая константа $c_1 > 0$, что в $\Omega(a)$*

$$F(s,N) = O(\ln^{c_1}(2+|t|)), \qquad |t| \ge 1,$$

и существует такое комплексное число z и такая регулярная в $\Omega(a)$ функция $G(s,N)$ с условием $G(a,N) \ne 0$, что в этой области

$$F(s,N) = \frac{G(s,N)}{(s-a)^z},$$

то существует такая константа c, что $0 < c < 1$ и

1) *если $z = 0, -1, \ldots$, то*

$$S(x) = O(x^a e^{-c\sqrt{\ln x}});$$

2) *если $z = 1$, то*

$$S(x) = \frac{G(a,N)}{a} x^a + O(x^a e^{-c\sqrt{\ln x}});$$

3) *если $z \notin \mathbb{Z}$, то*

$$S(x) = \frac{a_0(N)x^a}{(\ln x)^{1-z}} + O\left(\frac{a_1(N)x^a}{(\ln x)^{2-\operatorname{Re} z}}\right),$$

где

$$a_0(N) = \frac{G(a,N)}{a}, \quad a_1(N) = \max_{\overline{D}_a} \frac{G(s,N)}{s}.$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма 1 из работы [5], помещенной в этом же сборнике.

Условия слабо равномерного распределения функции $d(n,X)$ даны в следующей теореме.

Теорема 1. *Функция $d(n,X)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:*

1) $N = 4$,
2) $N = q^k$, $q \geq 3$ *и 2 — первообразный корень по модулю* N,
3) $N = 2q^k$, $q > 3$ *и 3 — первообразный корень по модулю* N.

Эта теорема, как уже говорилось выше, доказана в работе [3].
Результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого* $a \in G(N)$ *при* $x \to \infty$ *при условии, что* $N \leq \sqrt{\dfrac{\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}}$ *справедливы асимптотические равенства:*

1) *если* $N = q^k$, $q > 2$ *и 2 — первообразный корень по модулю* N, *то*

$$\nu_a(x) = \frac{x}{\ln x}\sum_{\chi(2)\neq -1} a_0(\chi)\overline{\chi}(a)(\ln x)^{\chi(2)/2} + O\left(\frac{x\sqrt{\ln\ln x}}{(\ln x)^{3/2}\sqrt{\ln\ln\ln x}}\right);$$

2) *если* $N = 2q^k$, $q > 2$ *и 3 — первообразный корень по модулю* N, *то*

$$\nu_a(x) = \sqrt{\frac{x}{\ln x}}\sum_{\chi(2)\neq -1} a_0(\chi)\overline{\chi}(a)(\ln x)^{\chi(3)/2} + O\left(\frac{\sqrt{x\ln\ln x}}{(\ln x)^{3/2}\sqrt{\ln\ln\ln x}}\right).$$

Доказательство. Упростим наши обозначения: вместо $d(n, X)$ будем писать $f(n)$, а вместо $\nu_a(x, f)$ — $\nu_a(x)$. Кроме того, произвольный характер по модулю m будем обозначать $h(n)$,

$$S(x,\chi) = \sum_{n\leq x}\chi(f(n)).$$

Интересующую нас величину $\nu_a(x)$ представим в виде

$$\nu_a(x) = \frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi \bmod N}\overline{\chi}(a)S(x,\chi). \tag{2}$$

Задача сводится к получению асимптотики суммы коэффициентов ряда

$$F(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(f(n))}{n^s}, \qquad s = \sigma + it,$$

учитывая, что модуль N характера χ может расти вместе с x.

Пусть N пробегает степени q^k, для которых 2 — первообразный корень. При $\sigma > 1$ представим сумму ряда в виде

$$F(s,\chi) = \prod_p \left(1 + \sum_{r+0}^{\infty} \frac{\chi(f(n))}{p^{rs}}\right).$$

Это произведение разобьем на три части: если $p|m$, то $X(p) = 0$ и $\chi(f(p^r)) = 1$; если $X(p) = -1$, то

$$f(p^r) = \begin{cases} 0, & r \quad , \\ 1, & r \quad , \end{cases}$$

а если $X(p) = 1$, то $f(p^r) = r + 1$. Следовательно,

$$F(s,\chi) = \prod_{p|m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{X(p)=-1} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1} \prod_{X(p)=1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi(f(r+1))}{p^{rs}}.$$

Первые два произведения не зависят от N. Обозначим эту часть через $\Phi(s)$. В виду периодичности характера χ можно преобразовать p-й член последнего произведения следующим образом:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi(f(r+1))}{p^{rs}} = \left(1 - \frac{1}{p^{Ns}}\right)^{-1} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\chi(r+1)}{p^{rs}}. \tag{3}$$

Обозначим

$$\Psi_N(s) = \prod_{X(p)=1} \left(1 - \frac{1}{p^{Ns}}\right)^{-1}. \tag{4}$$

И наконец, произведение по простым числам сумм из формулы (3) представим в следующем виде

$$\prod_{X(p)=1} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{\chi(r+1)}{p^{rs}} = K(s,\chi) \prod_{X(p)=1} \left(1 - \frac{\chi(2)}{p^s}\right)^{-1}, \tag{5}$$

где обозначено

$$K(s,\chi) = \prod_{X(p)=1} \left(1 + \sum_{r=2}^{N-1} \frac{\chi(r+1) - \chi(2)\chi(r)}{p^{rs}}\right). \tag{6}$$

Первое произведение в формуле (6) прологарифмируем, выбирая ту ветвь логарифма, которая действительна для главного характера при $t = 0$

$$\ln \prod_{X(p)=1} \left(1 - \frac{\chi(2)}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{X(p)=1} \frac{\chi(2)}{p^s} + \sum_{X(p)=1} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{\chi^r(2)}{rp^{rs}}.$$

Двойную сумму обозначим через $a(s, \chi)$, а первую преобразуем, обозначая через $G_2(m)$ подгруппу квадратичных вычетов по модулю m и используя свойства характеров,

$$\sum_{X(p)=1} \frac{\chi(2)}{p^s} = \sum_{x \in G_2(m)} \sum_{p \equiv x (\operatorname{mod} m)} \frac{\chi(2)}{p^s} = \sum_{h \operatorname{mod} m} \frac{\chi(2)}{\varphi(m)} \sum_{x \in G_2(m)} \overline{h}(x) \sum_{p} \frac{h(p)}{p^s}.$$

Обозначим

$$z(\chi, h) = \frac{\chi(2)}{\varphi(m)} \sum_{x \in G_2(m)} \overline{h}(x)$$

и добавим к последней сумме по простым числам в предыдущем равенстве и вычтем из нее $\ln L(s, h) - \sum_p h(p)p{-}s$. Тогда, потенцируя, получим

$$\prod_{X(p)=1} \left(1 - \frac{\chi(2)}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{h \operatorname{mod} m} \big(L(s, h)\big)^{z(\chi, h)} \cdot R(s, \chi),$$

где обозначено

$$R(s, \chi) = \prod_{h \operatorname{mod} m} \prod_{p} \left(1 - \frac{h(p)}{p^s}\right) e^{-h(p)p^{-s} + a_p(s, \chi)}.$$

Таким образом,

$$F(s, \chi) = \Phi(s)\Psi_N(s)K(s, \chi)R(s, \chi) \prod_{h \operatorname{mod} m} \big(L(s, h)\big)^{z(\chi, h)}. \qquad (7)$$

Все сомножители регулярны в области $\Omega(1)$, кроме одного — $L(s, h_0)$. Но регулярна функция $L(s, \chi_0)(s - 1)$. Заметим, что $z(\chi, h_0) = \chi(2)/2$. Следовательно, в качестве функции $G(s, N)$ леммы может быть взята функция

$$G(s, \chi) = F(s, \chi)(s - 1)^{\chi(2)/2}.$$

Величина $G(1,\chi)$ ограничена относительно N, но для ее производной нужна оценка в круге $|s-1|\le\delta$ с учетом роста N.

Для второго сомножителя в формуле (7) имеем:

$$\Psi'_N(s) = -\Psi_N(s)\sum_{X(p)=1}\frac{N\ln p}{p^{Ns}-1}.$$

Так как $\Psi_N(s)$ ограничена при $\sigma\ge\frac{1}{2}$, то с некоторой константой C из этого равенства следует оценка:

$$|\Psi'_N(s)| \le NC\sum_p\frac{\ln p}{p^{N\sigma}} = O(N). \tag{8}$$

Если $X(2)=1$, то для оценки $K'(S,\chi)$ придется отдельно рассмотреть множитель с $p=2$. Если $\sigma\ge\frac{1}{2}$, то

$$\left|\frac{d}{ds}\sum_{r=2}^{N-1}\frac{\chi(r+1)-\chi(2r)}{2^{rs}}\right| \le \frac{2}{2^{2\sigma}}\sum_{r=2}^{N-1}\frac{r\ln 2}{2^{(r-2)\sigma}} \le \frac{\sqrt{2}\ln 2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2}.$$

В дальнейшем можем считать, что $X(2)\ne 0$. Для сокращения записи введем обозначение

$$\alpha_p(s) = \sum_{r=2}^{N-1}\frac{\chi(r+1)-\chi(2r)}{2^{rs}}.$$

Оценим эту величину сверху для $p\ge 3$:

$$|\alpha_p(s)| \le \frac{2}{p^\sigma(p^\sigma-1)} \le \frac{2}{3^\sigma(3^\sigma-1)} \le \frac{2}{2,5},$$

если $\sigma\ge\frac{\ln 2,5}{\ln 3}$. Значит, $K'(s,N)/K(s,N)$ регулярна в этой полуплоскости. Однако нам нужна оценка K' по отношению к N. Сама функция $K(s,\chi)$ ограничена равномерно относительно N. Поэтому достаточно получить оценку ее логарифмической производной:

$$\left|\frac{K'}{K}\right| \le \sum_{X(p)=1}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2r\ln p}{p^{r\sigma}} = 2\sum_{X(p)=1}\frac{\ln p}{p^\sigma(p^\sigma-1)}.$$

Этот ряд сходится при $\sigma \geq 1/2$. Таким образом, $K'(s,\chi)$ ограничена равномерно по N в $\Omega(1)$.

Функция $R(s,\chi)$ регулярна в области $\sigma \geq 1/2+\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, ограничена равномерно по N, не обращается там в 0 и имеет ограниченную производную. Функции $L(s,\chi)$ при $h \neq h_0$ и функция $L(s,\chi_0)(s-1)$ также регулярны в $\Omega(1)$, не обращаются там в 0 и имеют ограниченные производные в области $|s-1| \leq \delta$, а тем самым и в D_1.

Следовательно, в области D_1 справедлива оценка

$$\frac{d}{ds}\frac{G(s,\chi)}{s} = O(N).$$

Применяя лемму к функции $F(s,\chi)$, получаем

$$S(x,\chi) = \frac{a_0 x}{\ln x}(\ln x)^{\chi(2)/2} + O\left(\frac{Nx(\ln x)^{\operatorname{Re}\chi(2)/2}}{(\ln x)^2}\right).$$

Вернемся к формуле (2). Если $\chi(2) = -1$, то главный член $S(x,\chi)$ оказывается меньше остаточного члена в $S(x,\chi_0)$, поэтому весь вклад от этой суммы пойдет в остаточный член общей формулы. Итак, учитывая условие на N, получим

$$\nu_a(x) = \frac{x}{\ln x}\sum_{\chi(2)\neq -1} a_0(\chi)\overline{\chi}(a)(\ln x)^{\chi(2)/2} + O\left(\frac{x\sqrt{\ln\ln x}}{(\ln x)^{3/2}\sqrt{\ln\ln\ln x}}\right). \tag{9}$$

Так как 2 — первообразный корень по модулю N, то все значения характеров на 2, входящие в главную часть формулы (9), имеют представление

$$\chi_n(2) = e^{2\pi i\frac{n}{\varphi(N)}}, \qquad -\frac{\varphi(N)}{2}+1 \leq n \leq \frac{\varphi(N)}{2}-1.$$

Обозначим $\alpha_N = \cos\frac{2\pi}{\varphi(N)}$.

$$-\operatorname{Re}\chi_n(2) \leq -\cos\left(\frac{2\pi}{\varphi(N)}\left(\frac{\varphi(N)}{2}-1\right)\right) = \alpha_N.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(\ln x)^{1-\operatorname{Re}\chi(2)/2}} \geq \frac{1}{\ln x)^{1+\alpha_n/2}}.$$

Следовательно, для эффективности остаточного члена в формуле (9) должно выполняться соотношение

$$\sqrt{\frac{\ln\ln x}{\ln\ln\ln x}}\frac{1}{\ln^{3/2} x} = o\left(\frac{1}{(\ln x)^{1+\alpha_n/2}}\right).$$

Обозначая для краткости записи первый множитель через $N(x)$, оценим следующее отношение

$$\frac{N(x)}{(\ln x)^{3/2}(\ln x)^{-1-\alpha_n/2}} = \frac{N(x)}{(\ln x)^{(1-\alpha_n)/2}}.$$

При достаточно большом N справедливо неравенство

$$\frac{1-\alpha_N}{2} > \frac{1}{2\varphi^2(N)} \geq \frac{1}{2N^2}.$$

Поэтому

$$\frac{N(x)}{(\ln x)^{1-\alpha_N/2}} \leq \frac{N(x)}{e^{\ln\ln x/(2N^2)}}.$$

В силу условия на модуль N, при $x\to\infty$

$$\frac{N(x)}{(\ln x)^{1-\alpha_N/2}} \leq \frac{N(x)}{\sqrt{e^{\ln\ln\ln x}}} \to 0,$$

что и требовалось. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь $= 2q^k$, $q\geq 5$ и 3 — первообразный корень. Для суммы производящего ряда при $\sigma > 1$ имеем представление

$$F(s,\chi) = \prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{X(p)=-1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}\prod_{X(p)=1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\chi(f(2r+1))}{p^{2rs}}.$$

В последнем произведении преобразуем p-й множитель, используя периодичность характера, а затем умножим и разделим результат на $1-\chi(3)p^{-2s}$. Используя обозначение

$$A_1(s,\chi) = \prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{X(p)=1}\left(1-\sum_{r=2}^{q^k}\frac{\chi(2r+1)-\chi(3)\chi(2r-1)}{p^{2rs}}\right),$$

получим

$$F(s,\chi) = A_1(s,\chi)\Psi_N(s) \prod_{X(p)=1} \left(1 - \frac{\chi(3)}{p^{2s}}\right)^{-1} \prod_{X(p)=-1} \left(1 - \frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

Обозначение Ψ_N было введено в формуле (4). Функция $A_1(s,\chi)$ регулярна, ограничена при $\sigma \geq 1/3$, не обращается там в 0 и имеет ограниченную равномерно по N производную.

Обозначим $l = \varphi(m)/2$, через $a_1, \ldots, a_l$ те вычеты по модулю m, для которых $X(a_i) = 1$, через $b_1, \ldots, b_l$ — остальные вычеты из $G(m)$ и для произвольного характера $h(n)$ по модулю m обозначим

$$z(\chi,h) = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{i=1}^{l} \big(\overline{h}(a_i)\chi(3) + \overline{h}(b_i)\big).$$

Преобразуя $F(s,\chi)$ аналогично первому случаю, получим для нее представление

$$F(s,\chi) = \Psi_N(s) A_2(s,\chi) \prod_{h \bmod m} \big(L(2s,h)\big)^{z(\chi,h)},$$

где $A_2(s,\chi)$ обладает такими же свойствами, как и $A_1(s,\chi)$. Заметим, что

$$z(\chi,h_0) = \frac{1+\chi(3)}{2}.$$

Функции $F(s,\chi)$ и

$$G(s,\chi) = F(s,\chi)\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{(1=\chi(3))/2}$$

удовлетворяют условиям леммы в области $\Omega(\frac{1}{2})$. Для удобства записи введем обозначение $\chi(3)/2 = \alpha(\chi)$. Тогда из леммы получаем

$$S(x,\chi) = \frac{a_0(\chi)\sqrt{x}\,(\ln x)^{\alpha(\chi)}}{\sqrt{\ln x}} + O\left(\frac{N\sqrt{x}\,(\ln x)^{\operatorname{Re}\alpha(\chi)}}{\ln^{3/2} x}\right).$$

Здесь также справедливо замечание относительно неглавного действительного характера, для которого вся асимптотика уходит в остаточный член. Подставляя этот результат в формулу (2) и учитывая условие на модуль N, получим и второе утверждение теоремы. Тем самым теорема полностью доказана. □

Résumé

It had beleaved the asimptotic formula for values distribution in residue classes of generalised function of devisors provided that residue class module was increasing in this paper.

Список литературы

[1] Niven I. *Unifom distribution of sequences of integer* // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 98. P. 52–61.

[2] Narckiewicz W., Rayner F. *Distribution of values of* $\sigma_2(n)$ *in residue classes* // Monatshefte für Mathematik. 1982. V. 94. P. 133–141.

[3] Широков Б. М. *Распределение* $d(n,\omega)$ *в классах вычетов* // Труды ПетрГУ. Серия Математика. 1995. Вып. 2. С. 136–144.

[4] Широков Б. М. *Распределение значений обобщенной суммы делителей* // Труды ПетрГУ. Серия Математика. 1996. Вып. 3. С. 176–189.

[5] Широков Б. М., Ульянова Э. И. *Распределение значений функции Дедекинда в классах вычетов* // Труды ПетрГУ. Серия Математика. 2010. Вып. 17. С. 49–60.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@petrsu.ru