Abstract

I. A. Kolesnikov

Conformal mapping of half-plane onto circular numerable polygon with double symmetry

Key words: *circular numerable polygon, conformal mapping, symmetry of transfer, Schwartz derivative, Gauss equation.*

Recently conformal mapping of the upper half-plane onto simply connected domains of the half-plane type with the symmetry of transfer along the real axis by 2π, with a boundary consisting of circular arcs, straight line segments and rays have been used in mathematical physics. In the paper it is proved that the conformal mapping of the upper half-plane onto such domain that has the additional property of symmetry with respect to the vertical straight $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, is a solution of a differential equation of the third order of Christoffel-Schwarz equation type for circular polygons. The received equation depends on the values of the angles at the finite number of vertices, their counter images, the accessory parameters. The proof is based on the Riemann-Schwarz principle of symmetry and the Christoffel-Schwarz formula for circular polygons. The system of two linear algebraic equations for the accessory parameters has been written. For mapping onto the specific circular numerable-polygon with double symmetry, the differential equation, equivalent to the Fuchs class equation with three singular points, has been reduced to the Gauss equation. The map is represented in terms of hypergeometric integrals.

DOI: 10.15393/j3.art.2013.2383 **Issues of Analysis.** Vol. 2(20), No. 2, 2013

УДК 517.542

И. А. Колесников

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Аннотация. В последнее время конформные отображения верхней полуплоскости на односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, с границей, состоящей из дуг окружностей, отрезков прямых и лучей, находят применение в задачах математической физики. В работе доказано, что конформные отображения верхней полуплоскости на такие области, обладающие дополнительным свойством симметрии относительно вертикальной прямой $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, являются решением дифференциального уравнения третьего порядка типа уравнения Кристоффеля – Шварца для круговых многоугольников. Полученное уравнение зависит от значений углов при конечном количестве вершин, прообразов этих вершин, акцессорных параметров. Доказательство опирается на принцип симметрии Римана – Шварца и формулу Кристоффеля – Шварца для круговых многоугольников. Записана система из двух линейных алгебраических уравнений для акцессорных параметров. Для отображения на конкретный круговой счетноугольник с двойной симметрией записанное дифференциальное уравнение, эквивалентное уравнению класса Фукса с тремя особыми точками, сведено к уравнению Гаусса. Отображение представлено через гипергеометрические интегралы.

Ключевые слова: *круговой счетноугольник, конформное отображение, симметрия переноса, производная Шварца, уравнение Гаусса.*

2010 Mathematical Subject Classification: *30C20.*

Введение

В конце XIX века Г. Шварцем было получено дифференциальное уравнение для конформного отображения верхней комплексной полуплоскости на односвязную область, ограниченную дугами окружностей [1, с. 412].

Теорема 1. *Функция $f(z)$, однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на круговой многоугольник D, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1-\varphi_k^2}{2(z-c_k)^2} + \frac{\widetilde{M}_k}{z-c_k}\right), \tag{1}$$

где $-\infty < c_1 < \ldots < c_{n+1} < +\infty$ — прообразы вершин кругового многоугольника D, $\varphi_1\pi, ..., \varphi_{n+1}\pi$ — углы при этих вершинах.

Уравнение для отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник в случае, когда один из прообразов вершин находится в бесконечно удаленной точке, получено в [4].

Левая часть уравнения (1) — производная Шварца функции f, будем обозначать ее $\{f, z\}$. Значения вещественных постоянных $\widetilde{M}_k$, c_k, $k = \overline{1, n+1}$, называемых акцессорными параметрами, заранее неизвестны. Эти акцессорные параметры связаны условиями:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n+1} \widetilde{M}_k = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n+1}\left(c_k\widetilde{M}_k + \frac{1-\varphi_k^2}{2}\right) = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n+1}\left(c_k^2\widetilde{M}_k + (1-\varphi_k^2)c_k\right) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Для определения акцессорных параметров разработаны различные методы, например, в [2], на основе метода, предложенного П. П. Куфаревым [3], задача определения параметров сводится к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений.

Дифференциальное уравнение (1) для отображения верхней полуплоскости на круговой многоугольник с n вершинами можно свести к дифференциальному уравнению второго порядка класса Фукса с n особыми точками [4].

В прикладных задачах представляют интерес конформные отображения на конкретные многоугольники. Многие задачи математической физики, использующие технику конформных отображений, связаны с нахождением конформных отображений на многоугольники специального вида. В последние десятилетия появился интерес к конформным отображениям верхней полуплоскости на счетноугольники типа полуплоскости с границей, состоящей из дуг окружностей, и обладающих симметрией переноса. J. M. Floryan [5] развивает численные методы, основанные на уравнении Кристоффеля – Шварца, для нахождения конформных отображений полуплоскости на односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса. И. А. Александровым и Л. С. Копаневой [6] получено дифференциальное уравнение типа уравнения Левнера для конформного отображения полуплоскости на односвязные области типа полуплоскости с симметрией переноса. Дифференциальное уравнение Шварца для круговых многоугольников распространено в работе [7] на случай отображения верхней полуплоскости на круговой счетноугольник типа полуплоскости с симметрией переноса.

Конформные отображения на счетноугольники с симметрией переноса используются в гидродинамике при изучении потока жидкостей, задачах теплопроводности и др. Так, I. L. Verbitskii [8], M. Neviere [9] показывают, что задача дифракции на произвольной периодической металлической границе может быть решена с помощью аппарата конформных отображений. Итальянские инженеры A. Baron, M. Quadrio, L. Vigevano [10] изучают с помощью конформных отображений поток вдоль ребристой поверхности с симметрией переноса.

Уравнение для отображения полуплоскости на круговой счетноугольник с двойной симметрией

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, если при линейном преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ область остается неизменной: $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют областью типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w + 2\pi$ среди всех простых концов [1] границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Определение 1. *Круговым счетноугольником с двойной симметрией будем называть односвязную область Δ, обладающую следующими свойствами:*

- Δ — *область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на* 2π*;*
- Δ — *область типа полуплоскости;*
- Δ — *область с симметрией относительно прямой* $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$*;*
- *часть границы области* Δ *от точки* w_0 *до точки* $w_0 + 2\pi$ *состоит из конечного числа дуг окружностей.*

Конечную точку ih_1, где $h_1 = \max\{w \in \mathbb{C} : w = iv, v \in \mathbb{R}\} \bigcap \partial\Delta$, будем считать вершиной счетноугольника Δ, обозначим ее A_1^0. Если бесконечно удаленная точка — единственная вершина счетноугольника Δ на мнимой оси, обозначим ее A_1^0. Аналогично выберем вершину на прямой $\{w \in \mathbb{C} : w = \pi + iv, v \in \mathbb{R}\}$ и обозначим ее A_n^0. Если вершины A_1^0, A_n^0 являются внутренними точками дуг окружностей границы счетноугольника $\partial\Delta$, то угол при этих вершинах равен π.

Обозначим через $A_1^0, A_2^0, ..., A_{2n-2}^0, A_1^1$, $A_1^1 = A_1^0 + 2\pi$, вершины кругового счетноугольника Δ, лежащие в полосе $P_{2\pi} = \{w \in \mathbb{C} : w = = u + iv, u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}\}$, возрастание нижнего индекса соответствует движению вдоль границы кругового счетноугольника Δ в положительном направлении; пусть углы при этих вершинах равны соответственно $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, ..., \alpha_{2n-2}\pi, \alpha_1\pi$. Остальные вершины A_k^m определяются сдвигом вершин A_k^0 вдоль вещественной оси: $A_k^m = A_k^0 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, 2n-2}$. Ясно, что вершина A_{n-s}^0 симметрична вершине A_{n+s}^0, $s = \overline{1, n-2}$ относительно прямой $w = \pi + iv$, $v \in \mathbb{R}$, $A_1^0 + 2\pi = A_1^1$, кроме того, $\alpha_{n-s} = \alpha_{n+s}$, $s = \overline{1, n-2}$. Заметим, что некоторые из вершин A_k^m, $k = \overline{2, n-1}$, $m \in \mathbb{Z}$, могут находиться в бесконечно удаленной точке; некоторые дуги окружностей могут вырождаться в отрезки прямых или лучи.

Согласно теореме Римана [11], существует однолистное и конформное отображение верхней полуплоскости на круговой счетноугольник с двойной симметрией. Для такого отображения в настоящей работе получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* Δ — *круговой счетноугольник с двойной симметрией. Функция* $w(z)$*, однолистно и конформно отображающая верх-*

нюю полуплоскость Π^+ *на счетноугольник* Δ, *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{w'''(z)}{w'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''(z)}{w'(z)}\right)^2 = \frac{\sin^2 z}{2}\left(\frac{4-\alpha_1^2}{4(1-\cos z)^2} + \frac{M_1}{1-\cos z} + \right.$$
$$+ \frac{4-\alpha_n^2}{4(1+\cos z)^2} - \frac{M_n}{1+\cos z} +$$
$$\left. + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1-\alpha_k^2}{(a_k-\cos z)^2} + \frac{M_k}{a_k-\cos z}\right]\right) - 1 - \frac{3}{2}\cot^2 z, \qquad (3)$$

где $a_k = \cos z_k^0$, z_k^0 — *прообразы вершин* A_k^0, $k = \overline{1,n}$, *кругового счетноугольника* Δ, *лежащих в полосе* $P_\pi = \{w \in \mathbb{C} : w = u+iv, u \in [0,\pi], v \in \in \mathbb{R}\}$, $z_1^0 = 0$, $z_n^0 = \pi$; $\alpha_k\pi$ — *углы при этих вершинах*, $\alpha_k \in [0,2]$; M_k, $k = \overline{1,n}$ — *некоторые константы.*

Замечание 1. *Постоянные* M_k, a_k, $k = \overline{1,n}$, *из уравнения (3) связаны условиями:*

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} M_k = 0,\\ \sum_{k=1}^{n} M_k a_k - \sum_{k=2}^{n-1}\left(1-\alpha_k^2\right) - \frac{4-\alpha_1^2-\alpha_n^2}{4} = 0.\end{gathered} \qquad (4)$$

Доказательство теоремы 2. Построим отображение ζ, $\zeta = \zeta(z)$ полуполосы $\Pi^+ \bigcap P'_\pi$, где $P'_\pi = \{z \in \mathbb{C} : z = x+iy, x \in (0,\pi), y \in \mathbb{R}\}$ на полуплоскость Π^+. Пусть $\zeta(0) = 0$, $\zeta(\pi) = \pi$, и бесконечно удаленная точка переходит в бесконечно удаленную, тогда отображение ζ будет иметь вид

$$\zeta(z) = \pi \sin^2 \frac{z}{2}.$$

Построим теперь отображение w, $w = w(\zeta)$, верхней полуплоскости Π^+ на многоугольник $\Delta \bigcap P'_\pi$. Он имеет $n+1$ вершину A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0, A_{n+1}^*, $A_{n+1}^* = \infty$, и углы при вершинах соответственно $\frac{\alpha_1}{2}\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_{n-1}\pi, \frac{\alpha_n}{2}\pi, \alpha_{n+1}^*\pi$, $\alpha_{n+1}^* = 0$. При отображении $w(\zeta)$ вершинам $A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0$ w-плоскости соответствуют некоторые точки $0 = B_1^0, B_2^0, ..., B_n^0 = \pi$ на вещественной оси ζ-плоскости, и бесконечно удаленной точке A_{n+1}^* соответствует бесконечно удаленная точка

B^*_{n+1}. Согласно теореме 1, отображение $w(\zeta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\{w,\zeta\} = \frac{4-\alpha_1^2}{8\big(\zeta - B_1^0\big)^2} + \frac{\widetilde{M}_1}{\zeta - B_1^0} + \frac{4-\alpha_n^2}{8\big(\zeta - B_n^0\big)^2} + \frac{\widetilde{M}_n}{\zeta - B_n^0} + \\ + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1-\alpha_k^2}{2\big(\zeta - B_k^0\big)^2} + \frac{\widetilde{M}_k}{\zeta - B_k^0}\right], \tag{5}$$

которое получается из уравнения (1) при $c_{n+1} = \infty$, $c_k = B_k^0$, $k = \overline{1,n}$, $\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\varphi_n = \frac{\alpha_n}{2}$, $\varphi_k = \alpha_k$, $k = \overline{2,n-1}$.

Заметим, что точкам $B_1^0, B_2^0, ..., B_n^0$ ζ-плоскости при отображении $\zeta(z)$ соответствуют некоторые точки $z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0$ z-плоскости, $\zeta\big(z_k^0\big) = B_k^0$, $k = \overline{1,n}$, причем, $z_1^0 = 0$, $z_n^0 = \pi$, бесконечно удаленной точке B_{n+1}^0 соответствует бесконечно удаленная точка. Композиция $w\big(\zeta(z)\big)$ отображает область $\Pi^+ \bigcap P'_\pi$ на область $\Delta \bigcap P'_\pi$. В уравнении (5) выполним замену $\zeta = \zeta(z)$, пользуясь соотношением

$$\Big\{w\big(\zeta(z)\big),\zeta\Big\} = \frac{\{w,z\} - \{\zeta,z\}}{(\zeta'(z))^2},$$

получим

$$\{w,z\} = \frac{\sin^2 z}{2}\left(\frac{4-\alpha_1^2}{4(1-\cos z)^2} + \frac{\pi\widetilde{M}_1}{1-\cos z} + \frac{4-\alpha_n^2}{4(1+\cos z)^2} - \frac{\pi\widetilde{M}_n}{1+\cos z} + \right. \\ \left. + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\frac{1-\alpha_k^2}{\big(\cos z_k^0 - \cos z\big)^2} + \frac{\pi\widetilde{M}_k}{\cos z_k^0 - \cos z}\right]\right) - 1 - \frac{3}{2}\cot^2 z.$$

Обозначим $\pi\widetilde{M}_k = M_k$, $k = \overline{1,n}$.

По построению отображений $\zeta(z)$ и $w(\zeta)$, отображение $w\big(\zeta(z)\big)$ переводит точки $z_1^0, z_2^0, ..., z_n^0$ в вершины $A_1^0, A_2^0, ..., A_n^0$ многоугольника $\Delta \bigcap P'_\pi$ и бесконечно удаленную точку в бесконечно удаленную. Часть границы области $\Pi^+ \bigcap P'_\pi$ — луч $l = \{z \in \mathbb{C} : z = \pi + iy, y > 0\}$, отображение $w(z)$ переводит в часть границы области $\Delta \bigcap P'_\pi$ — луч $L = \{w \in \mathbb{C} : w = A_n^0 + iv, v > 0\}$. Продолжим отображение $w(z)$ через луч l, согласно принципу симметрии Римана – Шварца. Продолженное отображение $w(z)$ переводит конформно и однолистно область $\Pi^+ \bigcap P'_{2\pi}$ на область $\Delta \bigcap P'_{2\pi}$, $P'_{2\pi} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (0, 2\pi), y \in \mathbb{R}\}$.

Следующим шагом продолжим полученное отображение $w(z)$ через луч $l_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = iy, y > 0\}$, согласно принципу симметрии. Получим конформное, однолистное отображение $w(z)$ области $\Pi^+ \bigcap \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (-2\pi, 2\pi), y \in \mathbb{R}\}$ на область $\Delta \bigcap \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, x \in (-2\pi, 2\pi), y \in \mathbb{R}\}$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим конформное и однолистное отображение $w : \Pi^+ \to \Delta$, удовлетворяющее уравнению (3). □

С помощью алгебраических преобразований из системы (2) получаем эквивалентную ей систему

$$\sum_{k=1}^{n} \widetilde{M}_k - \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{M}_k - \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1 - \varphi_k^2}{2} = 0,$$

$$\frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{M}_k + \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1 - \varphi_k^2}{2} - M_{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \widetilde{M}_k - \sum_{k=1}^{n} c_k \widetilde{M}_k - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1 - \varphi_k^2}{2} + \frac{1}{c_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} c_k \big(1 - \varphi_k^2\big) = 0.$$

Перейдя к пределу при $c_{n+1} \to \infty$ и выполнив подстановку $c_k = \pi \sin^2 \frac{z_k^0}{2}$, $\pi \widetilde{M_k} = M_k$, $k = \overline{1, n}$, $\varphi_{n+1} = 0$, $\varphi_1 = \frac{\alpha_1}{2}$, $\varphi_n = \frac{\alpha_n}{2}$, $\varphi_k = \alpha_k$, $k = \overline{2, n-1}$, получим систему (4), которой удовлетворяют акцессорные параметры M_k, a_k, входящие в уравнение (3).

Пример

Для нахождения конкретного отображения используется следующий результат [1, с. 414].

Замечание 2. *Пусть $f_1(z)$, $f_2(z)$ — два линейно-независимых решения уравнения*

$$f''(z) + R(z) f(z) = 0.$$

Положим $w(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, тогда имеем

$$\{w, z\} = 2R(z).$$

Пусть функция $w(z)$ отображает верхнюю полуплоскость Π^+ на круговой счетноугольник Δ с двойной симметрией. Вершины счетноугольника Δ находятся в точках $2\pi m$, $\pi(2m+1)+i\pi\tan\dfrac{\pi(\psi-\varphi)}{4}$, $m\in\mathbb{Z}$, с углами при них $\varphi\pi$, $\psi\pi$, соответственно, $\varphi\in[0,2]$, $\psi\in(0,2]$.

Уравнение теоремы 2 для данного случая примет вид

$$\{w,z\}=\frac{\sin^2 z}{2}\left(\frac{4-\varphi^2}{4(1-\cos z)^2}+\frac{M_1}{1-\cos z}+\right.$$
$$\left.+\frac{4-\psi^2}{4(1+\cos z)^2}-\frac{M_2}{1+\cos z}\right)-1-\frac{3}{2}\cot^2 z.$$

Найдем константы M_1, M_2, используя систему (4):

$$M_1=-M_2=\frac{4-\varphi^2-\psi^2}{8}.$$

Уравнение для функции $w(z)$ перепишется в виде

$$\{w,z\}=\frac{\left(\psi^2-\varphi^2\right)\cos z+2-\psi^2-\varphi^2}{4\sin^2 z}. \tag{6}$$

Так как

$$\Big\{w\big(\zeta(z)\big),\zeta\Big\}=\frac{\{w,z\}-\{\zeta,z\}}{(\zeta'(z))^2},$$

то после замены $\dfrac{\cos z+1}{2}=\zeta(z)$ уравнение (6) примет вид

$$\{w,z\}=\frac{4\zeta^2+\left(\psi^2-\varphi^2-4\right)+4-\psi^2}{8\zeta^2(\zeta-1)^2}. \tag{7}$$

Согласно замечанию 2, решение уравнения (7) можно искать в виде $w(\zeta)=\dfrac{f_1(\zeta)}{f_2(\zeta)}$, где $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ — два линейно-независимых решения уравнения

$$f''(\zeta)+\frac{4\zeta^2+\left(\psi^2-\varphi^2-4\right)+4-\psi^2}{16\zeta^2(\zeta-1)^2}f(\zeta)=0. \tag{8}$$

Выполнив в уравнении (8) замену $f(\zeta)=\zeta^{\frac{1}{2}-\frac{\psi}{4}}(\zeta-1)^{\frac{1}{2}-\frac{\varphi}{4}}g(\zeta)$, получим уравнение Гаусса [4]

$$\zeta(1-\zeta)g''(\zeta)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)\zeta)g'(\zeta)-\alpha\beta g(\zeta)=0, \tag{9}$$

где $\alpha=\beta=\dfrac{2-\varphi-\psi}{4}$, $\gamma=1-\dfrac{\psi}{2}$.

Если $\psi \neq 0$, то двумя линейно-независимыми интегралами уравнения (9) будут гипергеометрические ряды [4]

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) = F\left(\frac{2-\varphi-\psi}{4}, \frac{2-\varphi-\psi}{4}; 1-\frac{\psi}{2}; \zeta\right),$$

$$\zeta^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1; 2-\gamma; \zeta) = \zeta^{\frac{\psi}{2}} F\left(\frac{2-\varphi+\psi}{4}, \frac{2-\varphi+\psi}{4}; 1+\frac{\psi}{2}; \zeta\right),$$

которые сходятся при $|\zeta| < 1$.

Выражая гипергеометрические функции через определенные интегралы, получим

$$w_1(\zeta) = \zeta^{\frac{\psi}{2}} \frac{\int\limits_1^\infty t^{-1-\nu}(t-1)^\nu (t-\zeta)^\lambda dt}{\int\limits_0^1 t^\mu (t-1)^\lambda (t-\zeta)^\nu dt},$$

где $\zeta(z) = \dfrac{\cos z + 1}{2}$, $\nu = \dfrac{\varphi+\psi-2}{4}$, $\lambda = \dfrac{\varphi-\psi-2}{4}$, $\mu = \dfrac{\psi-\varphi-2}{4}$.

Заметим, что в силу инвариантности производной Шварца относительно дробно-линейного преобразования, искомая функция $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \left(\pi + i\pi \tan\frac{\pi(\psi-\varphi)}{4}\right)\left(e^{i\frac{\pi\varphi}{2}} w_1(\xi(z)) + 1\right).$$

Библиографический список

[1] Александров И. А. *Теория функций комплексного переменного.* Томск: Томск. гос. ун-т, 2002. 510 с.

[2] Александров И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* М.: Наука, Физматлит, 1976. 344 с.

[3] Куфарев П. П. *Об одном методе численного определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца* // ДАН СССР Т. 57, №6. 1947. С. 535–537.

[4] Голубев В. В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* 2-е изд. М.-Л.: ГТТИ, 1950. 436 с.

[5] Floryan J. M. *Schwarz-Christoffel methods for conformal mapping of regions with a periodic boundary* // J. comput. and applied math. №46. 1993. P. 77–102.

[6] Александров И. А., Копанева Л. С. *Левнеровские семейства отображений полуплоскости на области с симметрией переноса* // Вестн. Томск. ун-та. № 284. 2004. С. 5–7.

[7] Колесников И. А. *Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса* // Вестн. Томск. ун-та. № 2(22). 2013. С. 33–44.

[8] Verbitskii I. L. *Quasistatic green function method as a powerful tool of diffraction problems solving* // Mathiarials of the VI international conference «Mathematical methods in electromagnetic theory» on 10–13 Sep. Lviv, Ukraine. 1996. P. 358–361.

[9] Neviere M., Cadilhac M., Petit R. *Application of conformal mapping to the diffraction of electromagnetic waves by a grating* // Antennas propagation V. 21, № 1. 1973. P. 37–46.

[10] Baron A, Quadrio M., Vigevano L. *On the boundary layer/riblets interaction mechanisms and the prediction of turbulent drag reduction* // Int L. J. heat and fluid flow V. 14, № 4. 1993. P. 324–332.

[11] Шабат Б. В. *Введение в комплексный анализ:* в 2 т. Т. 1. 4-е изд. СПб: Лань, 2004. 336 с.

Работа поступила 5 июля 2013 г.

Томский государственный университет,
г. Томск, пр. Ленина, 36.
E-mail: ia.kolesnikov@mail.ru