УДК 51

Сборник включает статьи, посвященные современным вопросам фундаментальной и прикладной математики. В статьях сборника рассматриваются различные актуальные проблемы общей топологии, теории функций, функционального анализа, теории вероятностей, теории чисел, дифференциальных уравнений.

The issue includes papers concerning problems of pure and applied mathematics. Some modern problems of general topology, functional analysis, probability theory, function theory, number theory and differential equations are considered.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета университета

$\text{Т}\frac{1602070000}{\text{Д}26(03)-95}105-95$

ISBN 5 – 230 – 09053 – 7

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 517.977

О ПРОИЗВОДНОЙ СКАЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ ПО СИММЕТРИЧНОМУ МАТРИЧНОМУ АРГУМЕНТУ

А. Г. Варфоломеев

В работе предлагается новое определение матричного градиента относительно симметричной матрицы. Показано, что это определение совместимо с известной формулировкой матричного принципа максимума, применяемого в теории оптимального управления.

В теории среднеквадратического оценивания состояний динамических систем часто возникают задачи оптимального управления, в которых дифференциальные связи имеют матричный вид [2,6,8,9]. Как правило, в качестве матриц состояний таких управляемых систем выступают ковариационные матрицы случайных процессов, симметричные по своей природе, а сами дифференциальные уравнения имеют вид линейных уравнений или уравнений Риккати. В таких ситуациях оказывается полезным применение матричного принципа максимума [2,3,4], сформулированного М.Атансом как раз для подобных задач по аналогии с "векторным" принципом максимума Л.С.Понтрягина. При этом появляется необходимость ввода понятия матричного градиента, аналогичного векторному градиенту, играющему важную роль в формулировке принципа максимума Понтрягина.

Производной скалярнозначной функции $\varphi(X)$ по матричному аргументу X размерности $m \times n$, или *матричным градиентом* $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$, называется матрица, имеющая ту же размерность, что и X , элементами которой являются частные производные по соответствующим элементам матрицы X , то есть

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_{ij}}, \qquad i=\overline{1,n}, \qquad j=\overline{1,m}. \tag{1}$$

Предположим, что элементы матрицы X функционально независимы друг от друга. Тогда в соответствии с (1) можно получить некоторые правила вычисления $\frac{\partial\varphi}{\partial X}$, приведенные в работе [4]:

$$\frac{\partial \mathrm{tr}[AX]}{\partial X} = A^T, \qquad \frac{\partial \mathrm{tr}[AX^T]}{\partial X} = A, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{tr}[AXBX]}{\partial X} = A^T X^T B^T + B^T X^T A^T, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathrm{tr}[AXBX^T]}{\partial X} = A^T X B^T + AXB, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathrm{tr}[AX^{-1}B]}{\partial X} = -(X^{-1}BAX^{-1})^T. \tag{5}$$

Здесь tr - след квадратной матрицы, ^{T} - символ транспонирования. Вывод формул (2),(4) приведен в [2]. В работе [6] получены некоторые более общие правила матричного дифференцирования. Отметим, что в соответствии с определением производная скалярной функции по векторному аргументу есть вектор, тогда как некоторые авторы определяют такую производную как строку (см., например, [1],[7]), в связи с чем в указанных работах используется другое определение матричного градиента, в котором

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_{ji}}$$

Пусть теперь квадратная матрица X размерности $n \times n$ симметрична, тогда $X_{ij} = X_{ji} \quad \forall\, i,j=\overline{1,n}$. Следовательно, элементы матрицы X оказываются зависимыми друг от друга. Тогда согласно (1) правило матричного дифференцирования должно иметь вид:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial X_{ij}} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial X_{ji}}, & i \neq j, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial X_{ii}}, & i=j, \end{cases} \tag{6}$$

(Производные в правой части (6) вычисляются в предположении, что X_{ij} и X_{ji} - разные переменные).

Сохраним обозначение $\frac{\partial\varphi}{\partial X}$ за матричным градиентом, вычисляемым в предположении, что все элементы матрицы X независимы друг от друга. Введем новое обозначение $\frac{\partial_B\varphi}{\partial X}$ для градиента относительно симметричной матрицы X, вычисляемого в соответствии с правилом (6). Тогда

$$\frac{\partial_B \varphi}{\partial X} = \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial X^T} - \mathrm{diag}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right), \tag{7}$$

$$\text{где} \quad (\mathrm{diag}\,(X))_{ij} = \begin{cases} X_{ii}, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

Матричный градиент (7) относительно симметричной матрицы был предложен Дж.Бревером в работе [5]. Там же на простом примере вычисления производной определителя симметричной матрицы было показано, что матричный градиент (7) полностью совпадает с векторным градиентом $\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}$, где χ - вектор размерности $\frac{n(n+1)}{2}$, состоящий из элементов X_{ij} симметричной матрицы X , таких, что $i \le j$.

Посмотрим, насколько градиент (7) согласуется с матричным принципом максимума [4].

Пусть мы имеем задачу оптимального управления с дифференциальной связью

$$\dot{X} = F(X, U(t), t), \quad X(t_0) = X_0, \quad t \in [t_0, T], \tag{8}$$

и терминальным критерием качества

$$\min_{U(\cdot)} J\left(X(T)\right),$$

где $X(t)$ - квадратная матрица состояния размерности $n\times n$, $U(t)$ - матрица управления размерности $m \times r$, $F(X,U,t)$, $J(X)$ - соответственно матричнозначная и скалярнозначная функции матричных аргументов.

Пусть $F \equiv F^T$, $X_0 = X_0^T$, задача Коши (8) имеет единственное решение на интервале $[t_0, T]$ при любом допустимом управлении $U(\cdot)$. В таком случае [2] $X(t) \equiv X^T(t) \quad \forall\, t \in [t_0, T]$.

Введем гамильтониан

$$H(X,U,\Lambda,t) = \operatorname{tr}\left[F(X,U,t)\cdot\Lambda^T(t)\right], \qquad (9)$$

тогда для определения матрицы множителей Лагранжа $\Lambda(t)$ необходимо продифференцировать скалярнозначную функцию по симметричному матричному аргументу:

$$\dot\Lambda = -\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \Lambda(T) = \frac{\partial J\left(X(T)\right)}{\partial X} \qquad (10)$$

Применение в подобной ситуации правил (2) – (5) может привести к противоречиям. Например, неясно, какое из двух правил – (3) или (4) – следует предпочесть, поскольку они дают разные результаты, хотя левые части формул при $X = X^T$ совпадают. Кроме того, производные в (10) могут оказаться несимметричными матрицами, несмотря на симметричность аргумента, вследствие чего нарушится ожидаемая симметричность матрицы $\Lambda(t)$. Пусть теперь

$$\dot\Lambda = -\frac{\partial_B H}{\partial X}, \quad \Lambda(T) = \frac{\partial_B J\left(X(T)\right)}{\partial X}. \qquad (11)$$

Заметим, что гамильтониан (9) можно представить в виде

$$H = \sum_{i,j=1}^{n} F_{ij}\cdot\Lambda_{ij}, \qquad (12)$$

где F_{ij}, Λ_{ij} - элементы матриц F и Λ. Учтем теперь, что вследствие применения формул (11) $\Lambda(t) \equiv \Lambda^T(t)$. Поэтому (12) можно переписать следующим образом:

$$H = \sum_{i=1}^{n} F_{ii}\cdot\Lambda_{ii} + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} F_{ij}\cdot\Lambda_{ij}. \qquad (13)$$

Тогда в силу (11) и (6) элементы $\Lambda_{kl}(t)$ матрицы $\Lambda(t)$ будут удовлетворять уравнениям

$$\dot\Lambda_{kl} = -\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F_{ii}}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial F_{ii}}{\partial X_{lk}}\right]\Lambda_{ii} - 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\left[\frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{lk}}\right]\Lambda_{ij},$$

$$\Lambda_{kl}(T) = \left[\frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{lk}}\right], \quad k<l,$$

$$(14)$$

$$\dot\Lambda_{kk} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_{ii}}{\partial X_{kk}}\Lambda_{ii} - 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}\frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{kk}}\Lambda_{ij},$$

$$\Lambda_{kk}(T) = \frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{kk}}, \quad \Lambda_{lk}(t) \equiv \Lambda_{kl}(t).$$

Заменим матричное дифференциальное уравнение (8) векторным, введя вектор $\chi(t)$, состоящий из элементов X_{ij} матрицы $X(t)$, таких, что $i \le j$. Получим $\frac{n(n+1)}{2}$-мерную систему

$$\dot\chi = g\left(\chi, U, t\right). \qquad (15)$$

Сохраним для удобства двойную индексацию у компонент вектора χ. Тогда можно записать уравнение (15) покомпонентно:

$$\dot\chi_{ij} = g_{ij}(\chi, U, t), \quad i,j = \overline{1,n}, \quad i \le j.$$

Если рассмотреть теперь прежнюю задачу оптимального управления с новой дифференциальной связью (15), то можно обычным способом ввести гамильтониан

$$H^V(\chi, U, \lambda, t) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{n} g_{ij}(\chi, U, t)\ \lambda_{ij}(t), \qquad (16)$$

где компоненты $\lambda_{ij}(t)$ векторного $\frac{n(n+1)}{2}$-мерного множителя Лагранжа $\lambda(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot\lambda_{kl} = -\sum_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \chi_{kl}}\cdot\lambda_{ij}, \quad \lambda_{kl}(T) = \frac{\partial G(\chi(T))}{\partial \chi_{kl}}, \qquad (17)$$

$$k,l = \overline{1,n}, \quad k \le l,$$

а функции $g_{ij}(\chi, U, t)$ и $G(\chi)$ - это определенные выше функции $F_{ij}(X, U, t)$, $J(X)$ с отождествленными между собой переменными X_{ij} и X_{ji} , $i \neq j$. Следовательно, уравнения (17) могут быть также записаны в виде

$$\dot{\lambda}_{kl} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{n} \left[\frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{lk}}\right] \lambda_{ij} \ , \quad k < l,$$

$$\dot{\lambda}_{kk} = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{n} \frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{kk}} \Lambda_{ij} \tag{18}$$

с краевыми условиями

$$\lambda_{kl}(T) = \left[\frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{lk}}\right] \ , \quad k < l,$$

$$\lambda_{kk}(T) = \frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{kk}}. \tag{19}$$

Сравнивая (18),(19) с соотношениями (14), полученными с помощью матричного градиента (6)–(7), нетрудно заметить, что $\lambda_{kl}(T) = \Lambda_{kl}(T)$, $k \le l$, но правые части дифференциальных уравнений (14) и (18) не совпадают между собой. Не совпадают между собой и гамильтонианы (13) и (16), так как для их совпадения необходимо, чтобы

$$\lambda_{kl}(t) \equiv \begin{cases} 2\Lambda_{kl}(t) & , \quad k < l, \\ \Lambda_{kk}(t) & , \quad k = l, \end{cases} \tag{20}$$

а это противоречит краевым условиям. Таким образом, можно сделать вывод, что матричный градиент (6)–(7), предложенный в [5], не согласуется с матричным принципом максимума [4]. В такой ситуации появляется необходимость введения специального симметризованного матричного градиента

$$\frac{\partial_S \varphi}{\partial X} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\partial \varphi}{\partial X^T}\right]. \tag{21}$$

Сравнивая (7) и (21), можно сделать вывод, что

$$\left(\frac{\partial_S \varphi}{\partial X}\right)_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{\partial_B \varphi}{\partial X}\right)_{ii} & , \quad i = j, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_B \varphi}{\partial X}\right)_{ij} & , \quad i \neq j. \end{cases} \tag{22}$$

Посмотрим, как изменятся уравнения (14), если для их вывода воспользоваться градиентом (21). Из (22) получим:

$$\dot{\Lambda}_{kl} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F_{ii}}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial F_{ii}}{\partial X_{lk}}\right]\Lambda_{ii} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n}\left[\frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial X_{lk}}\right]\Lambda_{ij},$$

$$\Lambda_{kl}(T) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{kl}} + \frac{\partial J(X(T))}{\partial X_{lk}}\right] \ , \quad k < l, \tag{23}$$

$$\Lambda_{lk}(t) \equiv \Lambda_{kl}(t) \ ,$$

уравнения для Λ_{kk} останутся без изменений.

Сделаем замену функций по формуле

$$\widetilde{\Lambda}_{kl}(t) \equiv 2\Lambda_{kl}(t) \quad , \quad k < l \ , \tag{24}$$

тогда гамильтониан (13) в новых обозначениях примет вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} F_{ii} \cdot \Lambda_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} F_{ij} \cdot \widetilde{\Lambda}_{ij}. \tag{25}$$

Сравнивая теперь (23),(25) с (16),(18),(19) и учитывая замену (24), нетрудно сделать вывод, что

$$\Lambda_{ii}(t) \equiv \lambda_{ii}(t),$$
$$\widetilde{\Lambda}_{ij}(t) \equiv \lambda_{ij}(t) \quad , \quad i < j,$$
$$H(t) \equiv H^V(t).$$

Таким образом, использование симметризованного матричного градиента (21) приводит к тому, что матричный принцип максимума [4] оказывается полностью эквивалентным векторному (обычному) принципу максимума Л.С.Понтрягина [2], поскольку гамильтониан и множители Лагранжа не меняются при переходе от одного принципа максимума к другому. В заключение приведем правила вычисления симметризованного матричного градиента (21), аналогичные правилам (2)–(5):

$$\frac{\partial_S \mathrm{tr}[AX]}{\partial X} = \frac{1}{2}\left[A + A^T\right]. \tag{26}$$

$$\frac{\partial_S \mathrm{tr}[AXBX]}{\partial X} = \frac{1}{2}\left[A^T X B^T + B^T X A^T + AXB + BXA\right], \qquad (27)$$

$$\frac{\partial_S \mathrm{tr}[AX^{-1}B]}{\partial X} = -X^{-1}\cdot\left(\frac{A^T B^T + BA}{2}\right)\cdot X^{-1}. \qquad (28)$$

Как видно, формулы (3) и (4), приводившие в случае симметричной матрицы X к противоречию, сливаются в единое правило (27).

Литература

1. Брайсон А.,Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М., 1972. 544 с.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М., 1978. 552 с.
3. Сейдж Э.,Уайт Ч. Оптимальное управление системами. М., 1982. 392 с.
4. Athans M. The matrix minimum principle // Information and control. 1968. V.11.№ 5/6. P.592-606.
5. Brewer J. W. The gradient with respect to a symmetric matrix // IEEE Trans. on automatic control. 1977. V.22. № 2. P.265-267.
6. Morris J. M. The Kalman filter: a robust estimator for some classes of linear quadratic problems // IEEE Trans. on information theory. 1976. V.22. № 5. P.526-534.
7. Schweppe F. C. Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs. Prentice Hall. 1973. 563 p.
8. Демин Н. С.,Михайлюк В. В. Фильтрация в стохастических динамических системах при аномальных помехах в канале наблюдения. I. Системы с непрерывным временем // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 4. С. 17-27.
9. Варфоломеев А. Г. Оценивание состояния линейной системы с неопределенной составляющей в наблюдении // Труды ПГУ. Сер. Прикладная математика и информатика; Вып.2. Петрозаводск, 1994. С.34-40.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 517.54

ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ *

Я. Годуля (Люблин), В. В. Старков

По аналогии с линейно-инвариантными свойствами аналитических в круге функций, введенных Ch.Pommerenke [1], в этой статье вводятся и изучаются подобные семейства в случае поликруга. Результаты приводятся без доказательств.

В [1] Ch.Pommerenke ввел и изучал понятие *линейно-инвариантного семейства* $\mathfrak{M}$ функций как класса аналитических в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций таких, что

1) $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, f'(z) \neq 0$ в Δ,
2) для каждой $f \in \mathfrak{M}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ $f(ze^{i\theta})e^{-i\theta} \in \mathfrak{M}$,
3) для каждой $f \in \mathfrak{M}$ и $a \in \Delta$

$$f_a(z) = \frac{f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)} = z + \cdots \in \mathfrak{M}.$$

При этом *порядком* функции f, удовлетворяющей условию 1), Ch.Pommerenke называл число

$$\mathrm{ord}\, f = \sup_{a\in\Delta} \frac{|f_a''(0)|}{2},$$

* Эта заметка является кратким вариантом статьи, полный текст которой будет опубликован в "Ann. UMCS" в 1996 г.