$$\frac{\partial_S \mathrm{tr}[AXBX]}{\partial X} = \frac{1}{2}\left[A^T X B^T + B^T X A^T + AXB + BXA\right], \tag{27}$$

$$\frac{\partial_S \mathrm{tr}[AX^{-1}B]}{\partial X} = -X^{-1}\cdot\left(\frac{A^T B^T + BA}{2}\right)\cdot X^{-1}. \tag{28}$$

Как видно, формулы (3) и (4), приводившие в случае симметричной матрицы $X$ к противоречию, сливаются в единое правило (27).

## Литература


1. Брайсон А.,Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М., 1972. 544 с.
2. Ройтенберг Я. Н. Автоматическое управление. М., 1978. 552 с.
3. Сейдж Э.,Уайт Ч. Оптимальное управление системами. М., 1982. 392 с.
4. Athans M. The matrix minimum principle // Information and control. 1968. V.11.№ 5/6. P.592-606.
5. Brewer J. W. The gradient with respect to a symmetric matrix // IEEE Trans. on automatic control. 1977. V.22. № 2. P.265-267.
6. Morris J. M. The Kalman filter: a robust estimator for some classes of linear quadratic problems // IEEE Trans. on information theory. 1976. V.22. № 5. P.526-534.
7. Schweppe F. C. Uncertain dynamic systems. Englewood Cliffs. Prentice Hall. 1973. 563 p.
8. Демин Н. С.,Михайлюк В. В. Фильтрация в стохастических динамических системах при аномальных помехах в канале наблюдения. I. Системы с непрерывным временем // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 4. С. 17-27.
9. Варфоломеев А. Г. Оценивание состояния линейной системы с неопределенной составляющей в наблюдении // Труды ПГУ. Сер. Прикладная математика и информатика; Вып.2. Петрозаводск, 1994. С.34-40.


**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 517.54

# ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛИКРУГЕ *

Я. Годуля (Люблин), В. В. Старков

По аналогии с линейно-инвариантными свойствами аналитических в круге функций, введенных Ch.Pommerenke [1], в этой статье вводятся и изучаются подобные семейства в случае поликруга. Результаты приводятся без доказательств.

В [1] Ch.Pommerenke ввел и изучал понятие *линейно-инвариантного семейства* $\mathfrak{M}$ функций как класса аналитических в круге $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций таких, что

1) $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, f'(z) \neq 0$ в $\Delta$,
2) для каждой $f \in \mathfrak{M}$ и $\theta \in \mathbb{R}$ $f(ze^{i\theta})e^{-i\theta} \in \mathfrak{M}$,
3) для каждой $f \in \mathfrak{M}$ и $a \in \Delta$

$$f_a(z) = \frac{f(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)} = z + \cdots \in \mathfrak{M}.$$

При этом *порядком* функции $f$, удовлетворяющей условию 1), Ch.Pommerenke называл число

$$\mathrm{ord}\, f = \sup_{a\in\Delta} \frac{|f_a''(0)|}{2},$$

* Эта заметка является кратким вариантом статьи, полный текст которой будет опубликован в "Ann. UMCS" в 1996 г.

© Я. Годуля (Люблин), В. В. Старков, 1995

а порядком семейства $\mathfrak{M}$— число

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \operatorname{ord} f;$$

*универсальным линейно-инвариантным семейством* $U_\alpha$ называлось объединение всех линейно-инвариантных семейств $\mathfrak{M}$ таких, что $\operatorname{ord}\mathfrak{M}\le\alpha$:

$$U_\alpha = \bigcup\{\mathfrak{M} : \operatorname{ord}\mathfrak{M}\le\alpha\}.$$

Линейно-инвариантные семейства играют большую роль в теории конформных отображений. Интерес к ним возрастает из-за связи семейств $U_\alpha$ с классом Блоха (см.[2], краткий вариант в [3]).

Целью этой работы является перенесение понятия линейно-инвариантного семейства на функции, аналитические в поликруге $\Delta^m = \Delta\dots\Delta\subset\mathbb{C}^m$, и изучение свойств этих семейств.

Таким образом, будем рассматривать аналитические в $\Delta^m$ функции

$$f(z) = f(z_1,\dots,z_m),\ z = (z_1,\dots,z_m)\in\Delta^m,$$

норму в $\mathbb{C}^m$ определим как $\|z\| = \max_{1\le k\le m}|z_k|$. Обозначим $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_m})$, $\mathbb{O} = (0,0,\dots,0)\in\mathbb{C}^m$; для произвольной точки $a = (a_1,\dots,a_m)\in\Delta^m$ обозначим автоморфизмы полукруга $\Delta^m$

$$\varphi_a(z) = (\varphi_1(z_1),\dots,\varphi_m(z_m)),$$

где

$$\varphi_j(z_j) = \frac{z_j + a_j}{1+\overline{a_j}z_j},\qquad j = 1,\cdots,m$$

(как известно, эти автоморфизмы $\varphi_a(z)$ не исчерпывают всех автоморфизмов $\Delta^m$).

Определение 1. Пусть $l$ — фиксированное натуральное число, $1\le l\le m$. Семейство $\mathfrak{M}_l$ аналитических в $\Delta^m$ функций $f(z)$ называется $l$-линейно-инвариантным семейством, если

1) $f(\mathbb{O}) = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 1,\quad \frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\ne 0\quad$ для $z\in\Delta^m$,

2) $\forall\ f\in\mathfrak{M}_l$ и $\forall\ \theta = (\theta_1,\cdots,\theta_m)\in\mathbb{R}^m\quad f(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l}\in\mathfrak{M}$, где $ze^{i\theta} = (z_1e^{i\theta_1},\cdots,z_me^{i\theta_m})$,



3) $\forall\ f\in\mathfrak{M}_l$ и $\forall\ a = (a_1,\cdots,a_m)\in\Delta^m$

$$f_a(z) = \frac{f(\varphi_a(z)) - f(\varphi_a(\mathbb{O}))}{\frac{\partial f}{\partial z_l}(a)(1-|a_l|^2)}\ \in\ \mathfrak{M}_l.$$

Примеры

а) $K_l$ — класс аналитических в $\Delta^m$ функций, удовлетворяющих условию 1) определения 1 и отображающих $\Delta^m$ на выпуклую область.

б) $S_l^*$ — класс аналитических в $\Delta^m$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию 1) определения 1 и таких, что существует точка $w_f\in f(\Delta^m)$, относительно которой $f(\Delta^m)$ звездообразна.

в) $S_l^k$, где $k = 1,\dots,m$ фиксировано, — класс всех аналитических в $\Delta^m$ функций $f_k(z)$, удовлетворяющих условию 1) определения 1 и таких, что $F(z) = (f_1(z),\dots,f_m(z))$ — биголоморфное отображение из $\Delta^m$ в $\mathbb{C}^m$ для некоторых аналитических в $\Delta^m$ функций $f_1,\dots,f_{k-1},f_{k+1},\dots,f_m$.

Обозначим

$$\frac{\partial f}{\partial z_l}(z) = 1 + c_1(f)z_1 + c_2(f)z_2 + \ldots + c_m(f)z_m + o(\|z\|).$$

Определение 2. Пусть $f$ удовлетворяет условию 1) определения 1, порядком функции $f$ называется число

$$\operatorname{ord}_l f = \sup_{a\in\Delta^m}\frac{1}{2}\|\nabla\frac{\partial f_a}{\partial z_l}(\mathbb{O})\| = \frac{1}{2}\sup_{a\in\Delta^m}\|(c_1(f_a),\cdots,c_m(f_a))\|.$$

Порядком $l$-линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}_l$ назовем число

$$\operatorname{ord}_l\mathfrak{M}_l = \sup_{f\in\mathfrak{M}_l}\operatorname{ord}_l f.$$

Примеры

г) $\mathfrak{M}_l = \{f(z) = \Phi(z_l) : \Phi\in U_\alpha\}$ — $l$-линейно-инвариантное семейство порядка $\alpha$.

д) Пусть $k \neq l$ и $\Phi_k(z_k)$ — аналитические в $\Delta$ функции, $\Phi_k(0) = 0$. Тогда

$$\mathfrak{M}_l = \{f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Phi_k(z_k): \quad \Phi_l \in U_\alpha,\ \lambda_k \in \mathbb{C},\ \lambda_l = 1\} -$$

$l$-линейно-инвариантное семейство порядка $\alpha$.

е) Пусть

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\alpha}\left(\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1+z_k}{1-z_k}\right)^{\alpha} - 1\right),$$

тогда для каждого $l = 1, \ldots, m$ множество функций

$$\{\Psi_a(ze^{i\theta})e^{-i\theta_l} \ : \ a \in \Delta^m,\ \theta \in \mathbb{R}^m\}$$

образует $l$-линейно-инвариантное семейство порядка $\alpha$.

Аналогично случаю $m = 1$ (см. [1]) может быть получена

Теорема 1. *Если $f \in \mathfrak{M}_l$, то*

$$\operatorname{ord}_l f = \max_{1 \le k \le m} \sup_{z \in \Delta^m} \left| \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z_l \partial z_k}}{\dfrac{\partial f}{\partial z_l}(z)} \frac{1 - |z_k|^2}{2} - \overline{z_k}\delta_k^l \right| =$$

$$= \sup_{a \in \Delta^m} \|\frac{1}{2}\nabla \log(\frac{\partial f}{\partial z_l} \circ \varphi_a)(\mathbb{O}) - (0, \cdots, 0, \overline{a_l}, 0, \cdots, 0)\|,$$

*где $\delta_k^l$ — символы Кронекера.*

Определение 3. Универсальным $l$-линейно-инвариантным семейством порядка $\alpha$ назовем объединение всех $l$-линейно-инвариантных семейств $\mathfrak{M}_l$ таких, что $\operatorname{ord}_l \mathfrak{M}_l \le \alpha$; будем обозначать его $U_\alpha^l$.

Очевидно, что $U_\alpha^l$ — множество всех функций $f(z)$, удовлетворяющих условию 1) определения 1 и таких, что $\operatorname{ord}_l f \le \alpha$. При $m = 1$ это определение совпадает с классическим определением из [1].



Теорема 2. *Для любой функции $f \in U_\alpha^l$ и любого $z \in \Delta^m$*

$$|\log((1 - |z_l|^2)\frac{\partial f}{\partial z_l}(z))| \le \alpha \log \prod_{k=1}^{m} \frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|}$$

$$\frac{1}{1 - |z_l|^2} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1 - |z_k|}{1 + |z_k|}\right)^{\alpha} \le \left|\frac{\partial f}{\partial z_l}(z)\right| \le \frac{1}{1 - |z_l|^2} \prod_{k=1}^{m} \left(\frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|}\right)^{\alpha}. \quad (1)$$

Неравенства точные и достигаются для функции $\Psi(z)$ из примера е) при вещественных $z_k$.

При $m = 1$ теорема 2 дает известный [1] результат в $U_\alpha$.

Следствие 1. *В определении $U_\alpha^l$ $\alpha \ge 1$, поэтому $U_\alpha^l = \emptyset$ при $\alpha < 1$.*

Теорема 3. *$U_\alpha^l$ состоит из множества всех аналитических в $\Delta^m$ функций, удовлетворяющих условиям 1),2),3) определения 1 и неравенству (1) в некоторой окрестности $\mathbb{O}$.*

При $m = 1$ теорема 3 дает известный [4] результат в $U_\alpha$.

Для $x \in [0; 1)$, $q \in [-1; 1]$ обозначим

$$\Xi(x, q) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - q^2 t^2}}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{1 - q^2} \log \frac{\sqrt{1 - q^2 x^2} + x\sqrt{1 - q^2}}{\sqrt{1 - q^2 x^2} - x\sqrt{1 - q^2}} +$$

$$+ q \arcsin x \le \frac{1}{2}\sqrt{1 - q^2} \log \frac{1 + x}{1 - x} + \arcsin x.$$

Следующая теорема 4 обобщает известный результат Ch.Pommerenke на случай $m > 1$.

Теорема 4. *Для любой функции $f \in U_\alpha^l$ и любого вещественного $\lambda$*

$$|Re\{e^{-i\lambda} \log \frac{\partial f}{\partial z_l}(z)(1 - |z_l|^2)\}| \le \alpha \left(\log \prod_{k \ne l} \frac{1 + |z_k|}{1 - |z_k|} + 2\Xi\left(|z_l|, \frac{|\sin \lambda|}{\alpha}\right)\right).$$

Здесь $\log \frac{\partial f}{\partial z_l}(\mathbb{O}) = 0$ и $\log \frac{\partial f}{\partial z_l}(z)$ непрерывно меняется при непрерывном изменении $z$.

Следствие 2. $f \in U^l_\alpha \Longrightarrow$

$$|\arg \frac{\partial f}{\partial z_l}(z)| \le \alpha \left( \log \prod_{k\neq l} \frac{1+|z_k|}{1-|z_k|} + 2\Xi\left(|z_l|, \frac{1}{\alpha}\right)\right) \le$$

$$\alpha \log \prod_{k\neq l} \frac{1+|z_k|}{1-|z_k|} + \sqrt{\alpha^2-1}\log\frac{1+|z_l|}{1-|z_l|} + 2\arcsin|z_l|.$$

Это неравенство не является точным, однако пример функции

$$\Psi_0(z) = \frac{1}{2i\sqrt{\alpha^2-1}}\left[\prod_{k\neq l}\left(\frac{1+z_k}{1-z_k}\right)^{i\alpha}\left(\frac{1+z_l}{1-z_l}\right)^{i\sqrt{\alpha^2-1}} - 1\right], \quad \alpha > 1,$$

$\mathrm{ord}_l\, \Psi_0 = \alpha$,

$$\arg \Psi_0(r_1, \ldots, r_m) = \alpha \log \prod_{k\neq l}\frac{1+r_k}{1-r_k} + \sqrt{\alpha^2-1}\log\frac{1+r_l}{1-r_l}$$

показывает, что неравенство из следствия 2 является асимптотически точным при $\alpha \to \infty$ и при $|z_k| \to \infty$.

Как известно, аналитическая в $\Delta^m$ функция $g(z)$ называется *функцией Блоха*, если конечна ее норма Блоха, т.е.

$$||g||_{\mathcal{B}} = |g(\mathbb{O})| + \max_{k=1,\cdots,m}\sup_{z\in\Delta^m}|\frac{\partial g}{\partial z_k}(z)(1-|z_k|^2)| < \infty.$$

Через $\mathcal{B}$ будем обозначать множество всех функций Блоха. Следующие теоремы 5 и 6 обобщают результаты авторов [2], полученные в случае $m = 1$.

Теорема 5. *Пусть $[1, m] \ni l$ — фиксированное натуральное число. Тогда следующие условия эквивалентны:*

*(i)* $g \in \mathcal{B}$,

*(ii)* $\exists\, f \in \bigcup_{\alpha<\infty} U^l_\alpha$ *такая, что*

$$g(z) - g(\mathbb{O}) = \log\frac{\partial f}{\partial z_l}(z), \quad \alpha = \mathrm{ord}_l\, f,$$



*причем*

$$2(\alpha-1) \le ||g(z) - g(\mathbb{O})||_{\mathcal{B}} \le 2(\alpha+1),$$

*(iii) семейство функций $\{g(\varphi_a(z)) - g(a) : a \in \Delta^m\}$ конечно нормально.*

Теорема 6. *Чтобы аналитическая в $\Delta^m$ функция $g$ принадлежала классу $\mathcal{B}$, необходимо и достаточно существование положительной постоянной $C_g$ такой, что для всех $z \in \Delta^m$*

$$\sup_{a\in\Delta^m}|g(\varphi_a(z)) - g(a) - 2\log(1+\overline{a_l}z_l) + \log(1-|z_l|^2)| \le$$
$$\le C_g \log \prod_{k=1}^m \frac{1+|z_k|}{1-|z_k|}; \tag{2}$$

*наименьшее значение постоянной $C_g$ здесь равно*

$$\mathrm{ord}_l \int_0^{z_l} \exp g(z_1, \ldots, z_{l-1}, s, z_{l+1} \ldots, z_m)\, ds.$$

Следствие 3. *Условие (2) можно переписать в эквивалентной форме*

$$\sup_{a\in\Delta^m}|g(\varphi_a(z)) - g(a)| \le \frac{K_g}{2}\log\prod_{k=1}^m\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|},$$

где *наименьшее значение константы $K_g$ равно $||g(z) - g(\mathbb{O})||_{\mathcal{B}}$.*

Следствие 4. *Пусть $g \in \mathcal{B}$, $\lambda \in [0, 2\pi)$. Тогда функция $g(z) - g(\mathbb{O})$ отображает поликруг $\{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}^m$ на область, ограниченную кривой*

$$\alpha e^{i\lambda}\left(\prod_{k\neq l}\frac{1+|z_k|}{1-|z_k|} + 2\Xi\left(r, \frac{\sin\lambda}{\alpha}\right)\right) - \log(1-|z_l|^2), \ \lambda \in [0, 2\pi].$$

Установим некоторые свойства частных производных функций из $U^l_\alpha$.

Определение 4. $\dot{U}_\alpha^l = \{\frac{\partial f}{\partial z_l} : f \in U_\alpha^l\}$.

Теорема 7. *Для любых* $\alpha \geq 2$ *и целых* $l, k, n \in [1, m]$

$$\dot{U}_{\alpha-1}^n \subset \dot{U}_\alpha^l \subset \dot{U}_{\alpha+1}^k.$$

Заметим, что нельзя ожидать, что $\dot{U}_1^k \subset \dot{U}_\alpha^l$ для $\alpha < 2$ при $k \neq l$. Об этом говорит пример функции

$$h_o(z) = \frac{1}{(1-z_k)^2} = \frac{\partial}{\partial z_k}\frac{z_k}{1-z_k} \in \dot{U}_1^k;$$

для этой функции коэффициент $c_k(a) = 2\frac{1-|a_k|^2}{1-a_k}$ и $\sup\limits_{a\in\Delta^m} |c_k(a)| = 4$.

Таким образом, в правой части включения $\dot{U}_\alpha^l \subset \dot{U}_{\alpha+1}^k$ вместо $(\alpha+1)$ нельзя поставить меньшую постоянную.

Теорема 8. *При каждом целом* $l \in [1, m]$, $\alpha \geq 1$ $\dot{U}_\alpha^l$ *образуют секвенциально компактные семейства относительно равномерной сходимости внутри* $\Delta^m$.

Заметим, что в отличие от случая $m = 1$ семейства $U_\alpha^l$ не являются секвенциально компактными при $m \geq 2$.

### Литература


1. Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen // Math. Ann. V. 155 (1964). P. 108–154.
2. Godula J., Starkov V. Applications of ideas of Möbius invariance to obtaining equivalent definitions of Bloch functions // Annales Univ. Mariae Curia-Sklodowska (to appear).
3. Годуля Я., Старков В.В. Применение идей линейной инвариантности для получения эквивалентных определений функций Блоха // Труды 7-й зимней Саратовской школы. 1994. (В печати).
4. Starkov V. V. Equivalent definitions of universal linearly-invariant families // Materiały XI Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych. Łódź, 1990. P. 34–38.


Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 2, 1995

УДК 62.50

# СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛОВ НА РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ю. В. Заика, М. М. Кручек

**Предлагается вычислительный алгоритм среднеквадратичного оценивания линейных функционалов на решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием и случайными возмущениями по результатам измерений. Используются общие методы оценивания линейных функционалов в гильбертовых пространствах и техника сопряженных уравнений.**

## §1. Постановка задачи

Пусть движение объекта моделируется функционально-дифференциальным уравнением [1,2]

$$\frac{dx}{dt}(t) = \sum_{j=0}^{N} A_j x(t-h_j) + \int_{-h}^{0} A(\theta)x(t+\theta)d\theta + Bu(t) + D\mu(t), \qquad (1)$$

$$t \geq 0,\ 0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N = h,$$

$$x(0) = x^0,\ x(\tau) = x_0(\tau),\ \tau \in [-h, 0),$$

$$\widehat{x}_0 = (x^0, x_0(\cdot)) \in M_2 = R^n \times L_2([-h, 0], R^n).$$

Матрицы $A_j$, $B$, $D$ размерностей $n \times n$, $n \times n_1$, $n \times n_2$ постоянны, элементы $A(\cdot)$ и компоненты заданной вектор-функции (программного управления) $u(\cdot)$ кусочно-непрерывны, помехи $\mu(\cdot) \in L_2([0, T], R^{n_2})$ и начальные данные $\widehat{x}_0$ точно не известны.

© Ю. В. Заика, М. М. Кручек, 1995