Определение 4. $\dot{U}^l_\alpha = \{\frac{\partial f}{\partial z_l} : f \in U^l_\alpha\}$.

Теорема 7. *Для любых* $\alpha \geq 2$ *и целых* $l, k, n \in [1, m]$

$$\dot{U}^n_{\alpha-1} \subset \dot{U}^l_\alpha \subset \dot{U}^k_{\alpha+1}.$$

Заметим, что нельзя ожидать, что $\dot{U}^k_1 \subset \dot{U}^l_\alpha$ для $\alpha < 2$ при $k \neq l$. Об этом говорит пример функции

$$h_o(z) = \frac{1}{(1-z_k)^2} = \frac{\partial}{\partial z_k}\frac{z_k}{1-z_k} \in \dot{U}^k_1;$$

для этой функции коэффициент $c_k(a) = 2\frac{1-|a_k|^2}{1-a_k}$ и $\sup\limits_{a\in\Delta^m} |c_k(a)| = 4$.

Таким образом, в правой части включения $\dot{U}^l_\alpha \subset \dot{U}^k_{\alpha+1}$ вместо $(\alpha+1)$ нельзя поставить меньшую постоянную.

Теорема 8. *При каждом целом* $l \in [1, m]$, $\alpha \geq 1$ $\dot{U}^l_\alpha$ *образуют секвенциально компактные семейства относительно равномерной сходимости внутри* Δ^m.

Заметим, что в отличие от случая $m = 1$ семейства U^l_α не являются секвенциально компактными при $m \geq 2$.

Литература

1. Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analytischer Funktionen // Math. Ann. V. 155 (1964). P. 108–154.

2. Godula J., Starkov V. Applications of ideas of Möbius invariance to obtaining equivalent definitions of Bloch functions // Annales Univ. Mariae Curia-Sklodowska (to appear).

3. Годуля Я., Старков В.В. Применение идей линейной инвариантности для получения эквивалентных определений функций Блоха // Труды 7-й зимней Саратовской школы. 1994. (В печати).

4. Starkov V. V. Equivalent definitions of universal linearly-invariant families // Materiały XI Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych. Łódź, 1990. P. 34–38.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 62.50

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛОВ НА РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Ю. В. Заика, М. М. Кручек

Предлагается вычислительный алгоритм среднеквадратичного оценивания линейных функционалов на решениях дифференциальных уравнений с запаздыванием и случайными возмущениями по результатам измерений. Используются общие методы оценивания линейных функционалов в гильбертовых пространствах и техника сопряженных уравнений.

§1. Постановка задачи

Пусть движение объекта моделируется функционально-дифференциальным уравнением [1,2]

$$\frac{dx}{dt}(t) = \sum_{j=0}^{N} A_j x(t-h_j) + \int_{-h}^{0} A(\theta)x(t+\theta)d\theta + Bu(t) + D\mu(t), \qquad (1)$$

$$t \geq 0,\ 0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N = h,$$

$$x(0) = x^0,\ x(\tau) = x_0(\tau),\ \tau \in [-h, 0),$$

$$\widehat{x}_0 = (x^0, x_0(\cdot)) \in M_2 = R^n \times L_2([-h, 0], R^n).$$

Матрицы A_j, B, D размерностей $n \times n$, $n \times n_1$, $n \times n_2$ постоянны, элементы $A(\cdot)$ и компоненты заданной вектор-функции (программного управления) $u(\cdot)$ кусочно-непрерывны, помехи $\mu(\cdot) \in L_2([0,T], R^{n_2})$ и начальные данные $\widehat{x}_0$ точно не известны.

Равенство в (1) понимаем в смысле почти всюду на рассматриваемом отрезке времени $[0,T]$ (достаточно большом по сравнению с $[0,h]$), фазовым пространством считаем $M_2 = R^n \times L_2$,

$$\widehat{x}_t = (x(t), x_t) = (x(t), x(t+\cdot)) \in M_2.$$

Зависимость от начальных данных обозначаем стандартным образом: $x(t;\widehat{x}_0,0)$, $\widehat{x}_t(\widehat{x}_0,0)$. В отличие от $x_t(0)$ $(t>0)$ векторы $x(0)$, $x_0(0)$, вообще говоря, различны. Изменение значений $x_0(\tau)$ на множестве меры нуль в $[-h,0]$ не меняет движения $x(t)$, $t\geq 0$.

Информация о движении доставляется значениями (измерениями) вектор-функции

$$y(t) = Gx(t) + L\nu(t),\ t\geq 0, \tag{2}$$

где G, L — матрицы $m\times n$, $m\times m_1$, $rang\, G = m < n$, компоненты $\nu(t)$ имеют смысл ошибок измерений.

Фиксируем натуральное $r\geq 1$ и рассмотрим функционал

$$J = p^{0\prime}x(rh) + \int_{-h}^{0} p'(\tau)x(rh+\tau)d\tau + \int_{0}^{rh} w'(\tau)\mu(\tau)d\tau = \tag{3}$$

$$= (\widehat{p},\widehat{x}_{rh})_{M_2} + (w,\mu)_{L_2},$$

$$rh\leq T,\ \widehat{p} = (p^0, p(\cdot)) \in M_2,\ w(\cdot)\in L_2([0,rh],R^{n_2}).$$

Если $p(\cdot)=0$, $w(\cdot)=0$ (нули линейных пространств обозначаем одним символом), то, варьируя $p^0\in R^n$, получаем компоненты (проекции) положения $x(s)$ в момент времени $s=rh$; при $p^0=0$, $w(\cdot)=0$ — проекции x_{rh} в L_2 (интересующие нас коэффициенты Фурье); при $p^0=0$, $p(\cdot)=0$ — проекции помехи $\mu(\cdot)$. Таким образом, значения J имеют важный с точки зрения приложений смысл.

Далее, поскольку хранение континуума значений $y(t)$ затруднительно, считаем, что по мере поступления информации $y(t)$ на отрезке времени $[0,(r-1)h]$ вычисляются функционалы

$$J_i = \sum_{j=1}^{r-1}(\widehat{k}_{ij},\widehat{y}_{ij}) = \sum_{j=1}^{r-1}\left(k_{ij}^{0\prime}\,y(jh) + \int_{-h}^{0} k'_{ij}(\tau)y(jh+\tau)d\tau\right), \tag{4}$$

$$i=\overline{1,l},\ \widehat{y}_{jh} = (y(jh), y(jh+\cdot)),$$

$$\widehat{k}_{ij} = (k_{ij}^0, k_{ij}(\cdot)) \in \tilde{M}_2 = R^m\times L_2([-h,0],R^m).$$

Некоторые векторные весовые коэффициенты k_{ij}^0 и функции $k_{ij}(\cdot)$ могут быть нулевыми, если, например, измерения на соответствующем промежутке времени не используются. В частности, на практике могут использоваться только дискретные измерения $y(jh)$ и тогда все $k_{ij}(\cdot)=0$. Элементы $\widehat{k}_{ij}\in\tilde{M}_2$ определяются конкретными характеристиками интегрирующих устройств.

В дальнейшем будем считать x^0 случайным вектором, а $x_0(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ — векторными случайными процессами с реализациями, которые являются суммируемыми с квадратом на соответствующих отрезках времени. При этом функционалы J, J_i будут случайными величинами.

Уточним постановку задачи. Пусть реализовались конкретные значения $J_i=\gamma_i$, $i=\overline{1,l}$. Построим алгоритм, позволяющий по любой возможной выборке γ_i получать среднеквадратичную оценку вида

$$E(J-\varphi_1)^2 \leq \varphi_2, \tag{5}$$

где $\varphi_i = \varphi_i(\gamma_1,\ldots\gamma_l)$, E — символ математического ожидания. Если φ_2 достаточно мало, то имеем возможность, образно говоря, идентифицировать интересующий нас функционал J (наиболее вероятные значения J близки к числу φ_1). Последнее обстоятельство приводит к целесообразности выбора оптимальных в минимаксном смысле весовых элементов в интегральных операциях обработки измерений (4):

$$\varphi_3 = \max_{\{\gamma_i\}}\varphi_2 \to \min_{\{\widehat{k}_{ij}\}}.$$

Чтобы задача стала содержательной, требуется статистическая информация о случайных элементах модели. Для получения неравенств вида (5) нам будет достаточно совместной оценки

$$E\{x_0'Q^0x_0 + \int_{-h}^{0} x_0'Q(\tau)x_0(\tau)d\tau + \int_{0}^{rh}\mu'(\tau)\mu(\tau)d\tau + \tag{6}$$

$$+\sum_{j=1}^{r-1}\left[\nu'(jh)\nu(jh) + \int_{-h}^{0}\nu'(jh+\tau)\nu(jh+\tau)d\tau\right]\} \leq \xi,$$

где Q^0, $Q(t)$ — положительно определенные матрицы (в частности, единичные), элементы $Q(\cdot)$ кусочно-непрерывны на $[-h,0]$. Такую оценку нетрудно получить, когда известны оценки

$$E\|x^0\|^2_{R^n},\quad E\|x_0(\cdot)\|^2_{L_2(-h,0)},\quad E\|\mu(\cdot)\|^2_{L_2(0,rh)},$$
$$E\|\nu(jh)\|^2_{R^{m_1}},\quad E\|\nu(\cdot)\|^2_{L_2(0,(r-1)h)}.$$

Если используются только дискретные измерения $y(jh)$ или, наоборот, в (4) $k^0_{ij}=0$, то соответствующие слагаемые в (6) следует опустить.

Более детальное рассмотрение задачи мы вынуждены перенести в §3, после того как в §2 будут приведены необходимые формальные преобразования функционалов J, J_i.

§2. Преобразования функцоналов J, J_i

Определим для однородной системы (1) ($u(\cdot)=0$, $\mu(\cdot)=0$) оператор сдвига $T: M_2\to M_2$, $T\widehat{x}_0=\widehat{x}_h(\widehat{x}_0,0)$ и сопряженный оператор $T^*: M_2\to M_2$ в смысле $(\widehat{a},T\widehat{b})_Q=(T^*\widehat{a},\widehat{b})_Q$ $\forall\,\widehat{a},\widehat{b}\in M_2$. Скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_Q$ определяется следующим образом:

$$(\widehat{a},\widehat{b})_Q=a^{0\prime}Q^0b^0+\int\limits_{-h}^{0}a'(\tau)Q(\tau)b(\tau)d\tau,$$

$$\widehat{a}=(a^0,a(\cdot)),\ \widehat{b}=(b^0,b(\cdot))\in M_2=R^n\times L_2.$$

Найдем удобное представление оператора T^*. Для любой вектор-функции $V(\cdot)\in H^1(-h,0)$ справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
(\widehat{a},T\widehat{b})_Q &= a^{0\prime}Q^0x(h;\widehat{b},0)+\int\limits_{-h}^{0}a'(\tau)Q(\tau)x(h+\tau;\widehat{b},0)d\tau+\\
&+\int\limits_{-h}^{0}V'(\tau)\Bigg(\dot{x}(h+\tau)-\sum_{j=0}^{N}A_jx(h-h_j+\tau)-\\
&-\int\limits_{-h}^{0}A(\theta)x(h+\tau+\theta)d\theta\Bigg)\,d\tau=\\
&=a^{0\prime}Q^0x(h)+\int\limits_{0}^{h}a'(s-h)Q(s-h)x(s)ds+\\
&+V'(0)x(h)-V'(-h)x(0)-\int\limits_{0}^{h}\dot{V}'(s-h)x(s)ds-\\
&-\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{-h_j}^{h-h_j}V'(s-h+h_j)A_jx(s)ds-\\
&-\int\limits_{-h}^{0}V'(\tau)\left(\int\limits_{\tau}^{h+\tau}A(s-h-\tau)x(s)ds\right)d\tau=\\
&=a^{0\prime}Q^0x(h)+V'(0)x(h)-V'(-h)x(0)+\\
&+\int\limits_{0}^{h}\left(a'(s-h)Q(s-h)-\dot{V}'(s-h)\right)x(s)ds-\\
&-\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{-h_j}^{0}V'(s-h+h_j)A_jx(s)ds-\\
&-\sum_{j=0}^{N}\int\limits_{0}^{h-h_j}V'(s-h+h_j)A_jx(s)ds-
\end{aligned}$$

$$-\int_{-h}^{0} V'(\tau)\left(\int_{\tau}^{0} A(s-h-\tau)x(s)ds\right)d\tau-$$

$$-\int_{-h}^{0} V'(\tau)\left(\int_{0}^{h+\tau} A(s-h-\tau)x(s)ds\right)d\tau.$$

Доопределим $A(\cdot)$ и $V(\cdot)$ нулем вне $[-h,0]$ и выберем $V(\cdot)$ на $[-h,0]$ так, чтобы в последнем равенстве не встречались значения $x(t)$, $t\in(0,h]$. Это требование приводит к следующему уравнению:

$$\frac{dV}{dt}(t) = -\sum_{j=0}^{N} A'_j V(t+h_j) - \int_{-h}^{0} A'(t-\tau)V(\tau)d\tau + Q(t)a(t), \tag{7}$$

$$t\in[-h,0],\ V(0)=-Q^0a^0,\ V(\tau)=0,\ A(\tau)=0,\ \tau\notin[-h,0],$$

которое интегрируется (по крайней мере,численно) справа налево на отрезке $[-h,0]$. В силу (7) получаем:

$$(\hat a, T\hat b)_Q = -V'(-h)x(0) - \sum_{j=0}^{N}\int_{-h}^{0} V'(s-h+h_j)A_j x(s)ds-$$

$$-\int_{-h}^{0} V'(\tau)\left(\int_{-h}^{0} A(s-h-\tau)x(s)ds\right)d\tau = (\hat c,\hat b)_Q,$$

$$\hat c = (c^0, c(\cdot)),\quad c^0 = -Q^{0^{-1}}V(-h),$$

$$c(t) = -Q^{-1}(t)\left(\sum_{j=0}^{N} A'_j V(t-h+h_j) + \int_{-h}^{0} A'(t-h-\tau)V(\tau)d\tau\right),$$

откуда

$$T^*\hat a = \hat c. \tag{8}$$

Преобразуем с помощью T^* функционал J на решениях возмущенной системы (1):

$$J = J^0 + (w,\mu)_{L_2},\quad J^0 = (\hat p, \hat x_{rh})_{M_2} = (\hat Q^{-1}\hat p, \hat x_{rh})_Q,$$

$$\hat Q^{-1}\hat p \stackrel{\text{def}}{=} (Q^{0^{-1}}p^0, Q^{-1}(\cdot)p(\cdot)),$$

$$J^0 = (\hat Q^{-1}\hat p, \hat x_{rh})_Q = (T^*\hat Q^{-1}\hat p, \hat x_{(r-1)h})_Q -$$

$$-\int_{-h}^{0} V'_r(\tau)(Bu(rh+\tau)+D\mu(rh+\tau))d\tau =$$

$$= (T^{*2}\hat Q^{-1}\hat p, \hat x_{(r-2)h})_Q - \int_{-h}^{0} V'_r(\tau)(Bu(rh+\tau)+D\mu(rh+\tau))d\tau-$$

$$-\int_{-h}^{0} V'_{r-1}(\tau)(Bu((r-1)h+\tau)+D\mu((r-1)h+\tau))d\tau = \ldots =$$

$$= (T^{*r}\hat Q^{-1}\hat p, \hat x_0)_Q - \sum_{j=1}^{r}\int_{-h}^{0} V'_j(\tau)(Bu(jh+\tau)+D\mu(jh+\tau))d\tau.$$

Здесь вектор-функция $V_r(\cdot)$ определяется как решение системы (7) с начальными данными $V(0)=-p^0$ и неоднородностью $p(t)$ (вместо $Q(t)a(t)$), а $V_{r-1}(\cdot),\ldots,V_1(\cdot)$ — рекуррентно ($\hat a = T^{*r-i}\hat Q^{-1}\hat p$):

$$\frac{dV_i}{dt}(t) = -\sum_{j=0}^{N} A'_j V_i(t+h_j) - \int_{-h}^{0} A'(t-\tau)V_i(\tau)d\tau-$$

$$-\sum_{j=0}^{N} A'_j V_{i+1}(t-h+h_j) - \int_{-h}^{0} A'(t-h-\tau)V_{i+1}(\tau)d\tau, \tag{9}$$

$$t\in[-h,0],\ V_i(0)=V_{i+1}(-h),$$

$$V_i(\tau)=0,\ A(\tau)=0,\ \tau\notin[-h,0],\ i=r-1,\ldots,1.$$

Определив непрерывную на $[0,rh]$ вектор-функцию $b(\cdot)$ "склеиванием" $V_i(\cdot)$ ($b(ih+\tau)=V_i(\tau)$, $\tau\in[-h,0]$, $i=\overline{1,r}$), получим представление

$$J = \int_0^{rh} w'(\tau)\mu(\tau)d\tau + (T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p},\widehat{x}_0)_Q - \int_0^{rh} b'(\tau)(Bu(\tau)+ \qquad (10)$$

$$+ D\mu(\tau))d\tau = (T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p},\widehat{x}_0)_Q - (B'b,u)_{L_2} - (D'b - w,\mu)_{L_2},$$

смысл которого состоит в следующем. Функционал J теперь явно представлен через "входные" данные $\widehat{x}_0$, $\mu(\cdot)$ и, кроме того, вычисленные $T^{*r}Q^{-1}\widehat{p}$, $b(\cdot)$ позволяют судить о чувствительности значений J к вариациям начальных данных $\widehat{x}_0$, управления $u(\cdot)$ и возмущения $\mu(\cdot)$. Если, например, структура возмущений (матрица D) и вектор-функции $b(\cdot)$, $w(\cdot)$ таковы, что значения $D'b(t) - w(t)$ пренебрежимо малы, то данный функционал J естественно назвать инвариантным к возмущениям $\mu(\cdot)$.

Преобразуем теперь аналогичным образом функционалы J_i:

$$J_i = \sum_{j=1}^{r-1}(\widehat{k}_{ij},\widehat{y}_{jh}) = \sum_{j=1}^{r-1}(G'\widehat{k}_{ij},\widehat{x}_{jh}) + \sum_{j=1}^{r-1}(L'\widehat{k}_{ij},\widehat{\nu}_{jh}),$$

$$P\widehat{k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (Pk^0, Pk(\cdot)),$$

$$(G'\widehat{k}_{ij},\widehat{x}_{jh}) = (\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_{ij},\widehat{x}_{jh})_Q = (T^{*j}\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_{ij},\widehat{x}_0)_Q -$$

$$-\sum_{s=1}^{j}\int_{-h}^{0} V_{ijs}(\tau)(Bu(sh+\tau)+D\mu(sh+\tau))d\tau.$$

Здесь $V_{ijj}(\cdot)$ определяется системой (7) с начальными данными $V(0) = -G'k_{ij}^0$ и неоднородностью $G'k_{ij}(t)$, а $V_{ij\,j-1}(\cdot),\dots,V_{ij1}(\cdot)$ — рекуррентно по уравнениям (9) (по третьему индексу), т.е. в (7)

$$\widehat{a} = T^{*j-s}\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_{ij}, \quad s = j-1,\dots,1.$$

Обозначая

$$b_i(t) = \sum_{j=1}^{r-1} b_{ij}(t),\ b_{ij}(t) = V_{ijs}(t-sh),\ t\in[(s-1)h,sh],\ s=\overline{1,j},$$

$$b_{ij}(t) = 0,\ t\in(jh,rh],\ \widehat{q}_i = \sum_{j=1}^{r-1}T^{*j}\widehat{Q}^{-1}G'\widehat{k}_{ij},$$

получим

$$J_i = (\widehat{q}_i,\widehat{x}_0)_Q - \int_0^{rh} b_i'(\tau)(Bu(\tau)+D\mu(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^{r-1}(L'\widehat{k}_{ij},\widehat{\nu}_{jh}) =$$

$$= (\widehat{q}_i,\widehat{x}_0)_Q - (B'b_i,u)_{L_2} - (D'b_i,\mu)_{L_2} + \langle \Delta_i,\nu \rangle,$$

$$b_i(\tau) = 0,\ \tau\in[(r-1)h,rh],$$

$$\Delta_i = (L'\widehat{k}_{i1},\dots,L'\widehat{k}_{i\,r-1}),\ \nu = (\widehat{\nu}_h,\dots,\widehat{\nu}_{(r-1)h}).$$

Конкретный вид того или иного скалярного произведения ясен из контекста. Выбором $\widehat{k}_{ij}$ можно влиять на чувствительность функционалов J_i к вариациям $u(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$, $\widehat{x}_0$.

Следует подчеркнуть, что практически все расчеты однотипны и характеризуются периодическим обращением к одной и той же подпрограмме численного интегрирования системы (7) с фиксированным набором начальных данных и неоднородностей.

§3. Среднеквадратичное оценивание J

Вернемся к исходной задаче. В гильбертовом пространстве

$$H = (R^n\times L_2([-h,0],R^n))\times L_2([0,rh],R^{n_2})\times(R^{m_1}\times L_2([-h,0],R^{m_1}))^{r-1}$$

элементов $z = (\widehat{x}_0,\mu(\cdot),\nu)$ со скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_H = (\cdot,\cdot)_Q + (\cdot,\cdot)_{L_2} + \langle\cdot,\cdot\rangle$$

функционалы J, J_i имеют представление (см. (10),(11))

$$J = (g,z)_H - \psi, \quad \psi = (B'b,u)_{L_2},$$

$$J_i = (g_i,z)_H - \psi_i, \quad \psi_i = (B'b_i,u)_{L_2},$$

где

$$g = (\widehat{q}, w - D'b, 0), \quad \widehat{q} = T^{*r}\widehat{Q}^{-1}\widehat{p},$$

$$g_i = (\widehat{q}_i, -D'b_i, \Delta_i), \quad i = \overline{1,l}.$$

Поскольку управление $u(\cdot)$ известно, рассмотрим функционалы

$$I = J + \psi = (g,z)_H,\ I_i = J_i + \psi_i = (g_i,z)_H,\ i = \overline{1,l}.$$

Считаем элементы $g, g_1, \ldots, g_l$ линейно-независимыми (достаточно независимости Δ_i и $g \neq 0$, что естественно считать выполненным по смыслу задачи).

Пусть реализовались значения $I_i = \alpha_i$, $i = \overline{1, l}$. Тогда с учетом общей теории аппроксимации линейных функционалов [3, гл. II, §3] имеет место точное неравенство

$$(I - I_*)^2 \leq F_1 F_2. \tag{12}$$

Здесь

$$I_* = -\det \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \sigma & \Gamma \end{pmatrix} / \det \Gamma, \ \Gamma = \Gamma\{g_1, \ldots, g_l\},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)', \ \sigma = ((g, g_1)_H, \ldots, (g, g_l)_H)',$$

$$F_1 = \det \Gamma\{g, g_1, \ldots, g_l\} / \det \Gamma\{g_1, \ldots, g_l\},$$

$$F_2 = (z, z)_H + \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \alpha & \Gamma \end{pmatrix} / \det \Gamma,$$

$\Gamma\{d_1, \ldots, d_s\}$ — матрица Грама элементов $d_i \in H$.

Из (12) и (6) $(E(z,z)_H \leq \bar{\xi})$ получаем искомую среднеквадратичную оценку

$$E(J - J_*)^2 \leq F_1 F_3, \ J_* = I_* - \psi, \tag{13}$$

$$F_3 = \bar{\xi} + \det \begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ \alpha & \Gamma \end{pmatrix} / \det \Gamma.$$

На практике вычисление определителей для каждой реализации α_i нерационально. Определим биортогональную систему элементов $z_j = \beta_{j1} g_1 + \ldots + \beta_{jl} g_l$ условием $(g_i, z_j)_H = \delta_{ij}$, что приводит к решению относительно β_{js} систем линейных уравнений с положительно определенной матрицей $\Gamma\{g_1, \ldots, g_l\}$. Тогда после некоторых преобразований найдем, что

$$I_* = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \xi_j, \quad \xi_j = (g, z_j)_H,$$

$$F_1 = (g, g)_H - \sum_{i=1}^{l} (g, g_i)_H (g, z_i)_H, \tag{14}$$

$$F_3 = \bar{\xi} - \sum_{i,j=1}^{l} \alpha_i \alpha_j \xi_{ij}, \quad \xi_{ij} = (z_i, z_j)_H.$$

Суммируя вышеизложенное, сформулируем теперь поэтапно предварительную конструкцию алгоритма:

1) вычислим, интегрируя одну и ту же систему (7) с различными $\widehat{a}$, элементы $\widehat{q}, \widehat{q}_i \in M_2$, вектор-функции $b(\cdot), b_i(\cdot)$ в представлениях $J(z)$, $J_i(z)$ из (10),(11) и интегралы $\psi = (B'b, u)_{L_2}$, $\psi_i = (B'b_i, u)_{L_2}$;

2) составим элементы $g = (\widehat{q}, w - D'b, 0)$, $g_i = (\widehat{q}_i, -D'b_i, \Delta_i) \in H$ и определим биортогональную систему z_j;

3) вычислим $\xi_i = (g, z_i)_H$, $\xi_{ij} = (z_i, z_j)_H$ и F_1 из (14).

После указанных предварительных вычислений необходимо "запомнить" лишь числа $\psi, \psi_i, F_1, \xi_j, \xi_{ij}$.

Собственно работа алгоритма оценивания J сводится к следующему. По реализовавшимся значениям $J_i = \gamma_i$ в (4) вычисляем $\alpha_i = \gamma_i + \psi_i$, F_3 из (14) и $J_* = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_l \xi_l - \psi$. Среднеквадратичная оценка случайной величины J дается неравенством (13).

Поскольку

$$\max_{\{\alpha_i\}}(F_1 F_3) = F_1 \max_{\{\alpha_i\}} F_3 = F_1 \bar{\xi},$$

то оптимальные в минимаксном смысле весовые элементы $\widehat{k}_{ij}$ в (4) определяются задачей

$$F_1 \to \min_{\{g_i\}} \left(F_1 \to \min_{\{\widehat{k}_{ij}\}} \right).$$

На языке δ-функций $(p(t) = \tilde{p}(t) + p_1^0 \delta(t - t_1) + \ldots + p_s^0 \delta(t - t_s))$ рассматривается случай, когда в оцениваемый функционал J кроме $p^{0\prime} x(rh)$ входят слагаемые $p_i^{0\prime} x(rh + t_i)$, $t_i \in (-h, 0)$. Аналогичным образом выбираем $k_{ij}(t)$ при использовании отличных от $y(jh)$ дискретных измерений. Это приводит к интегрированию системы (7) с δ-функциями в правой части, т.е. к скачкам вектор-функции V в соответствующие моменты времени.

Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

2. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

3. Жидков Н. П. Линейные аппроксимации функционалов. М.: Изд-во МГУ, 1977. 262 с.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 519.554

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ И СЛУЧАЙНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

В. Н. Земляченко, Ю. Л. Павлов

Предлагается характеризация ветвящихся процессов Гальтона—Ватсона в виде семейства маршрутов некоторого мультиграфа с целью описания известной связи между ветвящимися процессами и случайными деревьями. *

Взаимосвязь между ветвящимися процессами Гальтона—Ватсона и деревьями была осознана достаточно давно (см., например, [1,2]). В последнее время особенно возрос интерес к исследованию деревьев и лесов с помощью методов теории ветвящихся процессов [3-4]. В статье предлагается характеризация ветвящихся процессов, которая может оказаться полезной в таких исследованиях.

1. Терминология и обозначения

Введем ряд терминов и обозначений в модификации, приспособленные для дальнейшего изложения.

1.1. Кванторные обозначения для сумм и произведений

Пусть f — неотрицательная функция с не более чем счетной областью определения и R — любой предикат, определенный на этой области. Введем следующие обозначения кванторного типа для сумм:

$$\{\sigma x|R\}.f(x): \quad \{\sigma x|R\}.f(x) = \Sigma_{R(x)}f(x)$$

$$\sigma x.f(x): \quad R \equiv true \rightarrow \sigma x.f(x) = \{\sigma x|R\}.f(x)$$

$$\sigma(A,f): \quad R \equiv A \subseteq dom(f) \rightarrow \sigma(A,f) = \{\sigma x|R\}.f(x)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 94-01-00036-а.