Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 515.12

ТЕОРЕМА О ТОПОЛОГИЗАЦИИ АССОЦИИРОВАННЫХ СПЕКТРОВ

А.В.Иванов

Доказана теорема о топологизации некоторых вполне упорядоченных спектров множеств. В результате этой топологизации предельное пространство спектра оказывается неметризуемым бикомпактом, счетная степень которого наследственно сепарабельна. Теорема доказана в предположении аксиомы Йенсена $\diamondsuit$. Следствием теоремы являются полученные ранее автором утверждения о существовании ряда пространств, все конечные степени которых наследственно сепарабельны.

В настоящей работе для каждого непрерывного дерева T высоты ω_1 со счетными уровнями определяется ассоциированный с T непрерывный вполне упорядоченный спектр множеств $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$. Основная теорема работы, доказанная в предположении аксиомы Йенсена $\diamondsuit$, утверждает, что на множествах X_α спектра S может быть задана топология так, что все X_α будут метризуемыми компактами, проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ — вполне замкнутыми кольцевыми отображениями, а предельное пространство $X = \lim S$ — неметризуемым компактом, счетная степень которого X^{ω_0} наследственно сепарабельна. Использование дополнительных теоретико-множественных предположений в этой теореме совершенно необходимо, поскольку К. Кюнен показал [5], что в предположении аксиомы Мартина, совмещенной с отрицанием континуум-гипотезы, всякий бикомпакт, счетная степень которого наследственно сепарабельна, метризуем. В частных случаях, когда T является деревом Курепы, деревом Ароншайна или тривиальным деревом высоты ω_1 (т.е. $T = \omega_1$), основная теорема работы позволяет получить построенные

ранее автором примеры пространств, все конечные степени которых наследственно сепарабельны (см. [2], [3]).

В дальнейшем все рассматриваемые отображения топологических пространств предполагаются непрерывными и отображениями "на".

Напомним, что частично упорядоченное множество $(T, <)$ называется деревом (см., например, [7]), если T имеет наименьший элемент и для любого $x \in T$ множество $\widehat{x} = \{y \in T : y < x\}$ вполне упорядочено отношением $<$. Порядковый тип множества $\widehat{x}$ называется порядком элемента x и обозначается через $o(x)$. Высота дерева T есть ординальное число $l(T) = \sup\{o(x) + 1 : x \in T\}$. Множество $U_\alpha = \{x \in T : o(x) = \alpha\}$ называется α-уровнем T. Каждое максимальное вполне упорядоченное подмножество T называется ветвью T; α-ветвь есть ветвь порядкового типа α. Для любого α дерево $T|_\alpha = \cup_{\beta<\alpha} U_\beta$ называется ограничением T на α. Дерево T называется непрерывным, если для любой пары различных точек $x, y \in T$ таких, что $o(x) = o(y) \in L\omega_1$, имеем $\widehat{x} \neq \widehat{y}$. Легко показать, что каждое дерево T может быть пополнено до непрерывного дерева.

В дальнейшем нас будут интересовать непрерывные деревья высоты ω_1, все уровни которых не более чем счетны. Простейшим примером такого дерева может служить множество счетных ординалов ω_1. Таковы также деревья Ароншайна — деревья высоты ω_1 со счетным уровнем без ω_1-ветвей. Существование деревьев Ароншайна может быть доказано в ZFC (см. [7]). Примером иного рода является дерево Курепы — дерево высоты ω_2. Деревья Курепы существуют в предположении аксиомы конструктивности $L = V$ (см. [6]). Тому же классу принадлежат и деревья Суслина, существование которых равносильно отрицанию гипотезы Суслина SH (см. [7]).

Итак, пусть T — непрерывное дерево высоты ω_1, все уровни которого имеют мощность $\leq \omega_0$. Непрерывный спектр множеств * $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ будем называть ассоциированным с деревом T, если выполняются следующие условия:

1) для любого α и любого $x \in X_\alpha$ неравенство $|\pi^{-1}_\alpha| > 1$ влечет

* Спектр множеств $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ (топологических пространств) называется непрерывным, если для любого предельного α естественное отображение из X_α в предел спектра $S_\alpha = \{X_\alpha, \pi^\beta_\gamma : \beta, \gamma < \alpha\}$ является биекцией (гомеоморфизмом).

$|(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}x| = \mathfrak{c}$ $(\pi_\alpha : \lim S \to X_\alpha$ — предельная проекция);

2) множество $T_S = \{x : x \in X_\alpha, |(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1}x| > 1, \alpha \in \omega_1\}$, наделенное естественным частичным порядком (т.е. $x > y$, если $x \in X_\beta,\ y \in X_\alpha,\ \beta > \alpha$ и $\pi_\alpha^\beta x = y$), изоморфно T.

Предложение. *Для любого непрерывного дерева T высоты ω_1 со счетными уровнями $U_\alpha, \alpha \in \omega_1$, существует непрерывный обратный спектр множеств $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta \in \omega_1\}$, ассоциированный с T.*

Доказательство. Построим спектр S по индукции. Пусть X_0 — точка и пусть $f_0 : U_0 \to X_0$ — тривиальное вложение $\{U_0 = \{$ наименьший элемент $T\}$ — 0-уровень $T\}$.

Предположим теперь, что для любого $\beta < \alpha$ мы построили множества X_β, проекции $\pi_{\beta'}^\beta : X_\beta \to X_{\beta'}, \beta > \beta'$, и отображения $f_\beta : U_\beta \to X_\beta$ так, что выполнены следующие условия:

1_α) $|(\pi_\beta^{\beta+1})^{-1}x| > 1 \Longleftrightarrow |(\pi_\beta^{\beta+1})^{-1}x| = \mathfrak{c}$,

2_α) обратный спектр $S_\alpha = \{X_\beta, \pi_\gamma^\beta : \beta, \gamma < \alpha\}$ непрерывен,

3_α) $|(\pi_\beta^{\beta+1})^{-1}x| > 1 \Longleftrightarrow x \in f_\beta U_\beta$ $(\beta + 1 < \alpha)$;

4_α) дерево $T|_{\sup\{\beta:\beta<\alpha\}}$ изоморфно множеству T_{S_α} (с естественным частичным порядком) при отображении $F_\alpha = \cup\{f_\beta : \beta + 1 < \alpha\}$.

Если α — предельный ординал, то полагаем $X_\alpha = \lim\{X_\beta, \pi_\gamma^\beta : \beta, \gamma < \alpha\}$. В силу 4_α) для любого $a \in U_\alpha$ множество $F_\alpha(\widehat{a})$ есть нить S_α. Следовательно, $F_\alpha(\widehat{a}) \in X_\alpha$ и мы определяем отображение f_α по формуле $F_\alpha(a) = F_\alpha \widehat{a}$. Условия $1_{\alpha+1}$)–$4_{\alpha+1}$) очевидно выполнены.

Предположим теперь, что $\alpha = \gamma + 1$. Положим $X_\alpha = X_\gamma \cup \bigcup\{R_x : x \in f_\gamma U_\gamma\}$ (R_x — экземпляр множества R мощности $\mathfrak{c}$). Определим теперь отображение $\pi_\gamma^\alpha : X_\alpha \to X_\gamma$ по формуле

$$\pi_\gamma^\alpha x = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \in X_\gamma \subset X_\alpha, \\ y, & \text{если} \quad x \in R_y \subset X_\alpha. \end{cases}$$

Возьмем произвольное инъективное отображение $f_\alpha : U_\alpha \to X_\alpha$, удовлетворяющее следующему условию: если $a \in U_\alpha$ и $a > b \in U_\gamma$, то $f_\alpha(a) \in Rf_\gamma(b) \subset X_\alpha$. Легко показать, что условия $1_{\alpha+1}) - 4_{\alpha+1}$) выполнены.

Продолжая индукцию, мы получим непрерывный обратный спектр множеств $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta \in \omega_1\}$, ассоциированный с деревом T. (Отображение $F_{\omega_1} = \cup\{f_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ является изоморфизмом между T и T_S). Предложение доказано.

Напомним теперь необходимые сведения, касающиеся вполне замкнутых отображений.

Определение 1 (см. [9]). Отображение $f : X \to Y$ называется вполне замкнутым, если для любой точки $y \in Y$ и любого открытого (в X) конечного покрытия $\{U_i\}$ прообраза $f^{-1}y$ множество $\cup f^\# U_i \cup \{y\}$ открыто в Y.

Следующая конструкция В.В.Федорчука [8,9] дает важный класс вполне замкнутых отображений. Пусть Y — компактное пространство. Предположим, что точки Y находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторым множеством компактных пространств $\{X_y : y \in Y\}$. Пусть для каждой точки $y \in Y$ заданы окрестность O_y и непрерывное отображение $h_y : O_y \setminus \{y\} \to X_y$. Пространство Федорчука $B\{Y, X_y, h_y\}$ (см. [9]) определяется на множестве $\bigcup\{X_y : y \in Y\}$. Открытая база $B\{Y, X_y, h_y\}$ состоит из множеств вида

$$O(y, U, V) = V \cup \bigcup\{x_z : z \in U \cap h_y^{-1}V\},$$

где V открыто в X_y и U — окрестность y в Y. Если для любого $y \in X \setminus A$ X_y состоит из одной точки, то пространство B обозначается так: $B\{Y, X_y, h_y : y \in A\}$. Пусть $\pi : B \to Y$ — проекция, т.е. $\pi(z) = y$, если $z \in X_y$. В.В.Федорчук доказал [9], что B — компактное пространство, π всегда вполне замкнуто и прообраз $\pi^{-1}y$ каждой точки $y \in Y$ гомеоморфен X_y.

Определение 2. Вполне замкнутое отображение $f : X \to Y$ называется функциональным, если для любой точки $y \in Y$ существует окрестность Oy и существует отображение $h_y : O_y \setminus \{y\} \to f^{-1}y$ такие, что отображение f гомеоморфно отображению $\pi : B\{Y, f^{-1}y, h_y\} \to Y$, т.е. существует гомеоморфизм $g : X \to B$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B\{Y, f^{-1}y, h_y\} \arrow[dl, "\pi"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определение 3 (см. [9]). Отображение $f : X \to Y$ называется кольцевым, если для любой точки $x \in X$ и для любой пары окрестностей Ox и Ofx существует перегородка $F \subset f^\# Ox$ между fx и $Y \setminus Ofx$.

В.В.Федорчук показал [9], что функциональное вполне замкнутое отображение $F : X \to Y$ является кольцевым, если для любой точки $y \in Y$ отображение $h_y : Oy \setminus \{y\} \to f^{-1}y$ обладает следующим свойством:

(R) для любой точки $z \in f^{-1}y$ и для любой пары окрестностей U_y и Oz точек y и z множество $h^{-1}Oz$ содержит перегородку между y и $Oy \setminus U_y$.

Каждое кольцевое отображение обладает следующим важным свойством (см. [9]):

(C) $f^{-1}fA = A$ для любого замкнутого подмножества $A \setminus X$, образ которого fA связен и содержит более одной точки.

Пусть X — множество и пусть E — подмножество X^n $(n > 0)$. Мы будем говорить, что E лежит в общем положении в X^n, если каждая проекция $\pi_i : X^n \to X$ произведения X^n на i-й сомножитель X $(i = 1, 2, \dots, n)$ взаимно однозначна на E и $\pi_i E \cap \pi_j E = \emptyset$ при $i \neq j$.

Лемма 1. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение множества X на компактное метрическое пространство Y, при котором прообраз каждой точки $f^{-1}y$ имеет мощность либо $\mathfrak{c}$, либо 1, и пусть множество $C = \{y : |f^{-1}y| = \mathfrak{c}\}$ счетно. Тогда для любого множества E, принадлежащего Y^n, $n \geq 1$, и лежащего в Y^n в общем положении, можно определить топологию на X так, что выполняются следующие условия:*

1) *если F — замкнутое подмножество X^n, $f^n F \supset E$ и y — предельная точка E, то $F \supset (f^n)^{-1}y$ *;*
2) *X есть метризуемый компакт и f — кольцевое вполне замкнутое отображение;*
3) *если $|f^{-1}y| = \mathfrak{c}$, то $f^{-1}y$ гомеоморфно отрезку [0;1].*

Доказательство. Положим $C^{j_1\dots j_k}_{c_1\dots c_k} = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n : y_{i_l} = c_l$ при $l = 1, \dots, k$, $y_i \neq C$ при $i \neq j_l\}$, где $j_1, \dots, j_k$ — натуральные числа, $1 \leq k \leq n$, $j_l \leq n$, $j_i \neq j_l$ при $i \neq l$ и c_i — точки из C. В каждом множестве $C^{j_1\dots j_k}_{c_1\dots c_k} \cap E^d$ (E^d — производное множество E) выберем счетное плотное подмножество $D^{j_1\dots j_k}_{c_1\dots c_k}$ и положим $D = \bigcup\{D^{j_1\dots j_k}_{c_1\dots c_k} : 1 \leq k \leq n,\ c_i \in C,\ j_i \leq n,\ j_i \neq j_l\}$. Точки D могут быть занумерованы натуральными числами: $D = \{d^i\}$. Для каждой точки $d^i \in D$ выберем последовательность $C_i \subset E$, сходящуюся к d^i так, что $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

* $f^n : X^n \to Y^n$ — произведение отображений $f : X \to Y$.

Возьмем произвольную точку $c \in C$ и рассмотрим множество $\{d^{i_k}\}$ точек D, которые имеют хотя бы одну координату, равную c. Пусть $l^k_1, \dots, l^k_{j(k)}$ — номера координат d^{i_k}, которые равны c. Обозначим через π_j проекцию Y^n на j-й сомножитель. Положим $H(c) = \cup_k \bigcup\limits_{m=1}^{j(k)} \pi_{l^k_m} C_{i_k}$. Покажем, что можно выбрать подпоследовательности $C'_{i_k} \subset C_{i_k}$ так, что множество $H(c)$ (если оно не пусто) будет последовательностью, сходящейся к c. Все проекции $\pi_{l^k_m}$ взаимно однозначны на C_{i_k}, так как $C_{i_k} \subset E$ и E лежит в общем положении в Y^n. Следовательно, множества $\pi_{l^k_m} C_{i_k}$ являются последовательностями, сходящимися к c. Пусть $\{O_n\}$ — открытая счетная база в точке c в Y такая, что $O_{n+1} \subset O_n$, $n \geq 1$. Обозначим через P биекцию ω_0 на $\omega_0 \times \omega_0$. Пусть $P(k) = (\varphi(k), g(k))$, $k \in \omega_0$. Теперь построим подпоследовательности $C'_{i_k} \subset C_{i_k}$ по индукции. В последовательности $C_{i_{g(1)}}$ возьмем точку c^1 такую, что $\bigcup\limits_{m=1}^{j(g(1))} \{\pi_{l^{g(1)}_m} c^1\} \subset O_1$. Предположим, что уже выбраны в каждой последовательности $C_{i_{g(k)}}$, $k \leq p-1$, точки c^k так, что

$$a_{p-1})\ \bigcup_{m=1}^{j(g(k))} \{\pi_{l^{g(k)}_m} c^k\} \subset O_k,\ k \leq p-1.$$

Пусть O — окрестность точки c такая, что $O \subset O_p$ и $O \cap \bigcup\limits_{k=1}^{p-1} \bigcup\limits_{m=1}^{j(g(k))} \{\pi_{l^{g(k)}_m} c^k\} = \emptyset$. Возьмем в последовательности $C_{i_{g(p)}}$ точку c^p так, что $\bigcup\limits_{m=1}^{j(g(p))} \{\pi_{l^{g(p)}_m} c^p\} \subset O$. Условие a_p очевидно выполнено.

Продолжая индукцию мы получим бесконечные подпоследовательности $C'_{i_k} = \{c^l : l \in g^{-1}(k)\} \subset C_{i_k}$ выбранных точек. Для упрощения символики будем обозначать эти подпоследовательности также через C_{i_k}. Итак, в силу a_p) множество $H(c)$ есть последовательность, сходящаяся к c.

Занумеруем точки множества ω_0^n и рациональные точки отрезка [0;1] натуральными числами. Пусть $j_1, \dots, j_n$ — координаты j-й точки ω_0^n и r_k — k-я рациональная точка отрезка. Зафиксируем нумерацию точек каждой последовательности C_i. Тем самым мы также зафиксируем нумерацию точек в каждой проекции C_i в Y. Пусть $c \in C$. Возьмем счетную открытую базу $\{O_k\}$ в точке c такую, что $[O_{k+1}] \subset O_k$ при $k \geq 1$ и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \text{гр}\, O_k \cap H(c) = \emptyset$. Определим отображение $h_c : Y \setminus \{c\} \to [0,1]$ следующим образом. Если точка y есть j-й член последовательности $\pi_{l_m^k} C_{i_k}$, то полагаем $h_c(y) = r_{j_{l_m^k}}$; если $y \in \text{гр}\, O_k$, то полагаем $h_c(y) = r_k$. Таким образом, h_c определено на замкнутом в $Y \setminus \{c\}$ подмножестве $H(c) \cup \bigcup \text{гр}\, O_k$, поскольку $\pi_i C_i \cap \pi_{j'} C_{j'} = \emptyset$ при $j \neq j'$ или $i \neq i'$, так как $C_i \subset E$ и E лежит в общем положении в Y^n.

Теперь продолжим это отображение до непрерывного отображения $h_c : Y \setminus \{c\} \to [0,1]$. Положим, наконец,

$$X = B\{Y, [0,1]_c, h_c : c \in C\}.$$

Поскольку множество C счетно, пространство X имеет счетную базу, следовательно, X — метризуемый компакт. По построению каждое отображение h_c обладает свойством (R). Поэтому отображение $f = \pi : X \to Y$ является кольцевым. Таким образом, условия 2) и 3) выполнены.

Проверим условие 1). Пусть F — замкнутое подмножество X^n, $f^n F \supset E$ и $y \in E^d$. Если ни одна координата точки y не лежит в C, то отображение f^n взаимно однозначно в y и, следовательно, $(f^n)^{-1} y \subset F$. Таким образом, условие 1) выполнено.

Пусть теперь точка $y = (y_1, \ldots, y_n)$ имеет координаты, лежащие в C. Пусть $y_{i_1} = c_1, \ldots, y_{i_k} = c_k$, где $c_l \notin C$ и $y_i \neq C$ при $i \neq i_l$, $l = 1, \ldots, k$. Тогда $y \in C^{i_1 \ldots i_k}_{c_1 \ldots c_k} \cap E^d$. Пусть $x \in (f^n)^{-1} y$ и пусть Ox — произвольная окрестность точки x. Покажем, что $(f^n)^{\#} Ox \cap F \neq \emptyset$. Тогда $Ox \cap F \neq \emptyset$ и, следовательно, $x \in F$, т.е. условие 1) выполнено. Возьмем окрестность $O \ni x$ такую, что $O \subset Ox$ и $O = \prod\limits_{i=1}^{n} Ox_i$, где Ox_i — базисные окрестности координат точки x. Заметим, что $(f^n)^{\#} O = \prod f^{\#} Ox_i$ и множества $U_i = f^{\#} Ox_i$ суть окрестности точек y_i при $i \neq i_1, \ldots, i_k$. Каждая окрестность Ox_{i_l} $(l = 1, \ldots, k)$ имеет вид

$$Ox_{i_l} = V_{i_l} \cup f^{-1}(U_{i_l} \cap h_{c_l}^{-1}(V_{i_l})),$$

где V_{i_l} — открытые множества отрезка $[0,1]$ и U_{i_l} суть окрестности $y_{i_l} = c_l$ в Y. Множество $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$ является окрестностью точки y в Y^n, следовательно, существует точка $d^m \in D^{i_1 \ldots i_k}_{c_1 \ldots c_k}$ такая, что $d^m \in U$. Последовательность $C_m = \{a_i : i \in \omega_0\} \subset E$ сходится к d^m, следовательно, существует натуральное число m_0 такое, что $a_i \in U$ при $i > m_0$. Возьмем в каждом множестве V_{i_l} $(l = 1, \ldots, k)$ рациональную точку r_l. В фиксированной нумерации рациональных точек отрезка $[0,1]$ точка r_l имеет некоторый номер p_{i_l}. Таким образом, мы получаем множество из k положительных целых чисел $p_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$. Дополним это множество до набора из n натуральных чисел $(p_1, \ldots, p_n)$ произвольным образом. В фиксированной нумерации точек множества ω_0^n точка $(p_1, \ldots, p_n)$ имеет некоторый номер p. Будем считать, что $p > m_0$. Этого всегда можно достигнуть путем выбора рациональной точки $r_l \in V_{i_l}$. Покажем, что точка a_p последовательности C_m лежит в $(f^n)^{\#} O$. Поскольку $a_p \in U$, достаточно показать, что $\pi_{i_l} a_p \in h_{c_l}^{-1}(V_{i_l})$ при $l = 1, \ldots, k$. По определению отображения h_c $h_{c_l}(\pi_{i_l} a_p) = r_{p_{i_l}} = r_l \in V_{i_l}$. Таким образом, $a_p \in (f^n)^{\#} O$. Поэтому $C_m \cap (f^n)^{\#} O \neq \emptyset$ и, поскольку $C_m \subset E$, $E \cap (f^n)^{\#} O \neq \emptyset$. Лемма доказана.

Пусть ω_1 — первый несчетный ординал. Подмножество $B \subset \omega_1$ называется стационарным в ω_1, если $B \cap F \neq \emptyset$ для любого замкнутого (в порядковой топологии) несчетного множества $F \subset \omega_1$. Легко показать, что любое несчетное замкнутое подмножество ω_1 стационарно в ω_1.

Пусть R — множество мощности $\mathfrak{c}$. Обозначим через ${}^{\alpha}R$ множество отображений из α в R. Любую последовательность вида $< s_\beta : \beta \in \alpha >$, $s_\beta \in {}^{\alpha}R$, мы будем называть (R, α)-последовательностью. Для каждой (R, α)-последовательности $p =< s_\beta : \beta \in \alpha >$ (R, γ)-последовательность $p|_\gamma =< s_\beta|_\gamma : \beta \in \gamma >$ называется ограничением p на γ.

Следующее утверждение совместимо с аксиомами ZFC (см. [4]).

Аксиома Йенсена $\diamondsuit$. Для любого $\alpha \in \omega_1$ можно выбрать (R, α)-последовательность p_α так, что для любой (R, ω_1)- последовательности x множество $\{\alpha : x|_\alpha = p_\alpha\}$ стационарно в ω_1. (Последовательность $< p_\alpha : \alpha \in \omega_1 >$ называется универсальной гиперпоследовательностью).

Заметим, что аксиома Йенсена $\diamondsuit$ влечет CH. Обозначим через q^α_β проекцию R^α на R^β : $q^\alpha_\beta(h) = h|_\beta$ для любого $h \in^\alpha R$. Ясно, что обратный спектр множеств $T = \{{}^\alpha R, q^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ является непрерывным. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ — такой непрерывный обратный спектр множеств, что $|X_\alpha| = \mathfrak{c}$ для любого α. Для каждого натурального числа n обозначим через S^n обратный спектр

$$\{X^n_\alpha, (\pi^\alpha_\beta)^n : \alpha, \beta \in \omega_1\}.$$

Построим теперь вложения $F_n = \{f^\alpha_n : \alpha \in \omega_1\} : S^n \to T$ обратных спектров S^n в спектр T так, что $f^\alpha_n X^n_\alpha \cap f^\alpha_m X^m_\alpha = \emptyset$ для любого α и $m \neq n$. Пусть Q — множество мощности $\mathfrak{c}$. Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 2. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение множеств, $|X| \leq \mathfrak{c}$, $|Y| \leq \mathfrak{c}$ и пусть $g_0 : Y \to^\alpha Q$ — вложение. Тогда существует вложение $g_1 : X \to^{\alpha+1} Q$ такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_1} & {}^{\alpha+1}Q \\ f\downarrow & & \downarrow p^{\alpha+1}_\alpha \\ Y & \xrightarrow{g_0} & {}^\alpha Q \end{array}$$

коммутативна (здесь $p^{\alpha+1}_\alpha$ — проекция).

Применяя лемму 2,мы можем построить по индукции вложения $G^n_0 = \{g^\alpha_{0n} : \alpha \in \omega_1\}$ спектров S^n в спектр $\{{}^\alpha Q, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$. Затем, полагая $g^\alpha_n x = (g^\alpha_{0n} x, n)$ для $x \in X^n_\alpha$ строим для любого n вложения $G^n = \{g^\alpha_n : \alpha \in \omega_1\}$ спектров S^n в $\{{}^\alpha Q \times \omega_0, p^\alpha_\beta \times id : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ такие, что $g^\alpha_n X^n_\alpha \cap g^\alpha_m X^m_\alpha = \emptyset$ для любого α и $m \neq n$. Наконец, также применяя лемму 2, строим вложение H обратного спектра $\{{}^\alpha Q \times \omega_0, p^\alpha_\beta \times id : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ в T и полагаем $F_n = H \circ G_n$.

Зафиксируем в предположении $\diamondsuit$ универсальную гиперпоследовательность $\Gamma =< p_\alpha : \alpha \in \omega_1 >$, $p_\alpha \subset^\alpha R$. В дальнейшем мы будем считать, что для каждого непрерывного спектра множеств $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ заданы вложения $F_n = \{f^\alpha_n\}$ S^n в T. Это позволяет отождествлять точки X^α_n с их образами в ${}^\alpha R$ при отображениях f^α_n. В частности, мы будем говорить, что элемент p_α универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в X^α_n ($p_\alpha \subset X^n_\alpha$), если $p_\alpha \subset f^\alpha_n X^n_\alpha$.

Лемма 3. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ — непрерывный спектр из метризуемых компактов, $X = \lim S$ и пусть B — подмножество X мощности ω_1. Предположим, что точки B занумерованы (возможно с повторением) счетными ординалами ($B =< b_\alpha : \alpha \in \omega_1 >$) так, что для любого $\alpha \in \omega_1$ $\pi_\alpha b_\gamma \neq \pi_\alpha b_{\gamma'}$ при $\gamma, \gamma' < \alpha$ и $b_\gamma \neq b_{\gamma'}$. Тогда для любого стационарного в ω_1 множества A существует $\beta \in A$ такое, что $B|_\beta = \pi_\beta\{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ плотно в $\pi_\beta B$ и $(B|_\beta)^d \cap \pi_\beta B \neq \emptyset$.*

Доказательство. Зафиксируем открытую счетную базу $\mathfrak{B}_\alpha$ в каждом пространстве X_α. Пусть A — стационарное множество в ω_1. Пересечение A с множеством предельных ординалов $L\omega_1$ стационарно в ω_1, поскольку $L\omega_1$ замкнуто в ω_1 и несчетно. Предположим, что для любого $\beta \in A \cap L\omega_1$ множество $B|_\beta$ не плотно в $\pi_\beta B$, т.е. $\pi_\beta B \setminus [B|_\beta] \neq \emptyset$. Пусть $\beta \in A \cap L\omega_1$ и пусть $x \in \pi_\beta B \setminus [B|_\beta]$. Так как β — предельный ординал и S — непрерывный обратный спектр, существует $\alpha = \sigma(\beta) < \beta$ такое, что $\pi^\beta_\alpha x \cap \pi^\beta_\alpha[B|_\beta] = \emptyset$. Следовательно, точка $\pi^\beta_\alpha x$ имеет окрестность $O_\beta \in \mathfrak{B}_{\sigma(\beta)}$ такую, что $O_\beta \cap \pi^\beta_\alpha[B|_\beta] = \emptyset$. Таким образом, для любого $\beta \in A \cap L\omega_1$ имеем ординал $\sigma(\beta) < \beta$ и открытое множество $O_\beta \in \mathfrak{B}_{\sigma(\beta)}$ такие, что $\pi^\beta_{\sigma(\beta)}[B|_\beta] \cap O_\beta = \emptyset$ и $\pi_{\sigma(\beta)} B \cap O_\beta \neq \emptyset$. Теперь нам понадобится следующая лемма, которая доказана в [11].

Лемма 4. *Если множество C стационарно в ω_1 и отображение $\sigma : C \to \omega_1$ удовлетворяет условию $\sigma(\beta) < \beta$ для любого $\beta \in C$, то существует ординальное число $\alpha_0 \in \omega_1$ такое, что множество $\sigma^{-1}(\alpha_0)$ несчетно.*

Применяя эту лемму,мы получаем ординал $\alpha_0 \in \omega_1$ такой, что множество $\sigma^{-1}(\alpha_0) \subset A \cap L\omega_1$ несчетно. Для любого $\beta \in \sigma^{-1}(\alpha_0)$ имеем открытое множество $O_\beta \in \mathfrak{B}_{\sigma(\beta)} = \mathfrak{B}_{\alpha_0}$. Поскольку $|\sigma^{-1}(\alpha_0)| > \omega_0$, существует несчетное множество $D \subset \sigma^{-1}(\alpha_0)$ такое, что для любого $\beta \in D$ $O_\beta = O \in \mathfrak{B}_{\alpha_0}$. Для каждого $\beta \in D$ имеем $\pi^\beta_{\alpha_0}[B|_\beta] \cap O = \emptyset$ и $\pi_{\alpha_0} B \cap O \neq \emptyset$. Противоречие, поскольку $\bigcup_{\beta \in D} \pi^\beta_{\alpha_0}(B|_\beta) = \pi_{\alpha_0} B$. Итак, существует $\beta \in A \cap L\omega_1$ такое, что $\pi_\beta B \subset [B|_\beta]$.

Обозначим через E множество всех точек $\beta \in L\omega_1$ таких, что $\pi_\beta B \subset [B|_\beta]$. Тогда $E \cap A \neq \emptyset$. Мы утверждаем, что для любого стационарного множества $A \subset \omega_1$ пересечение $A \cap E$ стационарно в ω_1. Действительно, если $F \subset \omega_1$ — замкнутое несчетное подмножество, то $A \cap F$ стационарно и, следовательно, $\emptyset \neq (A \cap F) \cap E = (A \cap E) \cap F$.

Покажем теперь, что существует $\beta \in A \cap E$ такое, что

$(B|_\beta)^d \cap \pi_\beta B \neq \emptyset$. Предположим, что для любого $\beta \in A \cap E$ пересечение $(B|_\beta)^d \cap \pi_\beta B$ пусто. Тогда имеем, что $B|_\beta = \pi_\beta B$ и $\pi_\beta B$ есть дискретное (в себе) множество для любого $\beta \in A \cap E$, поскольку $[B|_\beta] \supset \pi_\beta B$. Множество $B|_\beta = \pi_\beta B$ счетно, следовательно, существует точка $x_\beta \in \pi_\beta B$ такая, что множество $\pi_\beta^{-1} x_\beta \cap B$ несчетно. Так как β — предельный ординал ($E \subset L\omega_1$), существует $\alpha = \sigma(\beta) < \beta$ и существует окрестность $O_\beta \in \mathfrak{B}_{\sigma(\beta)}$ точки $\pi_\alpha^\beta x_\beta$ такие, что $\pi_\alpha^\beta(\pi_\beta B \setminus \{x_\beta\}) \cap O_\beta = \emptyset$. Итак, для любого $\beta \in A \cap E$ мы имеем ординал $\sigma(\beta) < \beta$ и открытое множество $O_\beta \in \mathfrak{B}_{\sigma(\beta)}$ такие, что $|\pi_\alpha O_\beta \cap B| > \omega_0$ и $|\pi_\alpha^{-1} O_\beta \cap \{b_\gamma : \gamma \in \beta\}| = 1$. Применяя лемму 4, как и в рассуждениях, приведенных выше, получаем ординал $\alpha_0 \in \omega_1$ и несчетное множество $D \subset A \cap E$ такие, что $O_\beta = O \in \mathfrak{B}_{\sigma(\beta)} = \mathfrak{B}_{\alpha_0}$ для любого $\beta \in D$. Тогда $|\pi_{\alpha_0}^{-1} O_\beta \cap \{b_\gamma : \gamma \in \beta\}| = 1$ для любого $\beta \in D$. Но $|\pi_0^{-1} O \cap B| > \omega_0$ и $B = \bigcup_{\beta \in D} \{b_\gamma : \gamma \in \beta\}$. Противоречие. Лемма доказана.

Докажем теперь основную теорему.

Теорема. *Пусть T — непрерывное дерево высоты ω_1, уровни которого не более чем счетны, и пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta \in \omega_1\}$ — ассоциированный с деревом T непрерывный спектр множеств. Тогда на каждом множестве X_α можно задать топологию так, что будут выполнены следующие условия:*

1) *X_α — метризуемые компакты;*
2) *проекции вида $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ суть колцевые вполне замкнутые отображения;*
3) *если $x \in X_\alpha$ и $|(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x| = \mathfrak{c}$, то $(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x$ гомеоморфно отрезку [0;1];*
4) *счетная степень предельного пространства $X = \lim S$ наследственно сепарабельна;*
5) *если элемент p_α универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в X_α^n в общем положении, то для любого замкнутого множества $F \subset X^n$ такого, что $\pi_\alpha^n F \supset p_\alpha$, имеем $F \supset (\pi_\alpha^n)^{-1} p_\alpha^d$.*

Доказательство. Топологизируем спектр S по индукции. Для $\alpha = 1$ определим на X_1 топологию отрезка [0;1]. Предположим теперь, что уже заданы топологии на X_β для всех $\beta < \alpha$ так, что выполнены следующие условия:

1_α) все пространства X_β метризуемы и компактны, $\beta < \alpha$;

2_α) все проекции вида $\pi_\beta^{\beta+1}$ — вполне замкнутые кольцевые отображения, $\beta + 1 < \alpha$;

3_α) если $x \in X_\beta$ и $|(\pi_\beta^{\beta+1})^{-1} x| = \mathfrak{c}$, то $(\pi_\beta^{\beta+1})^{-1} x$ гомеоморфно отрезку [0;1], $\beta + 1 < \alpha$;

4_α) если элемент p_β универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в X_β^n в общем положении, то для любого замкнутого подмножества $F \subset X_{\beta+1}^n$ такого, что $(\pi_\beta^{\beta+1})^n F \supset p_\beta$, имеем $F \supset ((\pi_\beta^{\beta+1})^n)^{-1} p_\alpha^d$, $\beta + 1 < \alpha$.

Если α — предельный ординал, то полагаем

$$X_\alpha = \lim\{X_\beta, \pi_{\beta'}^\beta : \beta, \beta' \in \alpha\}.$$

Поскольку α — счетный ординал и каждое X_β является метризуемым компактом, X_α — также метризуемый компакт. Тем самым условие $1_{\alpha+1}$) выполнено. Условия $2_{\alpha+1}$)–$4_{\alpha+1}$) следуют из 2_α)–4_α).

Пусть теперь $\alpha = \gamma + 1$. Тогда топологизируем X_α по лемме 1. В качестве отображения f в лемме 1 мы берем $\pi_\gamma^{\gamma+1}$. Если для некоторого n p_γ лежит в X_γ^n в общем положении, то в качестве E в условии леммы 1 берем p_γ; в противном случае полагаем $n = 1$ и $E = \emptyset$. Условия $1_{\alpha+1}$)–$4_{\alpha+1}$) следуют из условий 1)–3) леммы 1.

Продолжая индукцию, мы получим непрерывный обратный спектр S из метризуемых компактов, удовлетворяющих условиям 1)–3) теоремы.

Проверим условие 5). Пусть p_α — элемент универсальной гиперпоследовательности, лежащий в общем положении в X_α^n, $F = [F] \subset X^n$ и $\pi_\alpha^n F \supset p_\alpha$. В силу условия $4_{\alpha+2}$) имеем $\pi_{\alpha+1}^n F \supset ((\pi_\alpha^{\alpha+1})^n)^{-1} p_\alpha^d$. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in p_\alpha^d$. Мы покажем, что каждое отображение $\pi_{\alpha+1}|_{\pi_\alpha^{-1} x_i} : \pi_\alpha^{-1} x_i \to (\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_i$ неприводимо ($i = 1, \ldots, n$). Это очевидно, если $|(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_i| = 1$ (тогда по определению ассоциированного спектра $|\pi_\alpha^{-1} x_i| = 1$). Если $|(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_i| = \mathfrak{c}$, то в силу $3_{\alpha+2}$) $(\pi_\alpha^{\alpha+1})^{-1} x_i$ гомеоморфно отрезку [0;1]. Все проекции спектра S вида $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ являются кольцевыми отображениями, поэтому предельные проекции обладают свойством (c) (см.[9], лемма 6). Следовательно, отображение $\pi_{\alpha+1}|_{\pi_\alpha^{-1} x_i}$ неприводимо.

Итак, мы доказали, что все отображения $\pi_{\alpha+1}|_{\pi_\alpha^{-1} x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, неприводимы. Следовательно, отображение $\pi_{\alpha+1}^n|_{(\pi_\alpha^n)^{-1} x}$ также неприводимо и значит $(\pi_\alpha^n)^{-1} x \subset F$. Итак, условие 5) выполнено.

Докажем теперь, что все конечные степени X наследственно сепарабельны. В дальнейшем мы будем обозначать через $hc\,X$ наследственное число Суслина X и через $hd\,X$ — наследственную плотность X. В силу теоремы 4 из [1] (эта теорема утверждает, что для компактного пространства X $hc\,X^2 \le \omega_0$ влечет $hd\,X \le \omega_0$) достаточно показать, что для любого n $hc\,X^n \le \omega_0$, т.е. в X^n нет дискретных в себе несчетных подмножеств.

Докажем, что если дискретное в себе множество $C \subset X^n$ лежит в X^n в общем положении, то $|C| \le \omega_0$. Предположим, что $|C| = \omega_1$. Тогда занумеруем точки C (возможно, с повторением) счетными ординалами ($C =< c_\alpha : \alpha \in \omega_1 >$) так, что для любого α множество $C|_\alpha$ лежит в общем положении в X^n_α и $\pi^n_\alpha c_\gamma \ne \pi^n_\alpha c_{\gamma'}$ при $\gamma, \gamma' < \alpha$ и $c_\gamma \ne c_{\gamma'}$. По определению универсальной гиперпоследовательности Γ множество $M = \{\alpha : C|_\alpha = p_\alpha\}$ стационарно в ω_1. Поэтому по лемме 3 существует $\alpha \in M$ такое, что $\pi^n_\alpha C \cap (C|_\alpha)^d \ne \emptyset$. Пусть $y \in C$ такая точка, что $x = \pi^n_\alpha y \in (C|_\alpha)^d$. В силу 5) и $C|_\alpha = p_\alpha$ имеем $[C] \supset (\pi^n_\alpha)^{-1}x$. Но это противоречит дискретности C. Действительно, если $|(\pi^n_\alpha)^{-1}x| = 1$ (т.е. $y = (\pi^n_\alpha)^{-1}x$), то $y \in C^d$, так как $x \in (C|_\alpha)^d$. Если $|(\pi^n_\alpha)^{-1}x| > 1$, то $[C \setminus \{y\}] \supset (\pi^n_\alpha)^{-1}x \setminus \{y\}$. В силу 3) и непрерывности S множество $(\pi^n_\alpha)^{-1}x$ связно. Следовательно, $[C \setminus \{y\}] \supset (\pi^n_\alpha)^{-1}x \in y$, т.е. $y \in C^d$.

Итак, мы доказали, что всякое дискретное в себе множество $C \subset X^n$, лежащее в X^n в общем положении, имеет мощность $\le \omega_0$. Докажем теперь индукцией по n, что $hc\,X^n \le \omega_0$. Поскольку каждое дискретное множество $C \subset X$ лежит в X в общем положении, имеем $|C| \le \omega_0$ и, следовательно, $hc\,X \le \omega_0$.

Предположим, что неравенство $hc\,X^k \le \omega_0$ доказано для всех $k \le n-1$. Пусть C — несчетное подмножество X^n. Возможны два случая:

1) пересечение C с некоторой гранью X^n вида

$$G = \{(x_1, \ldots, x_n) \: x_k = a\},\ a \in X,\ 1 \le k \le n, \tag{1}$$

несчетно;

2) пересечение C с каждой гранью G вида (1) счетно.

Случай 1. Поскольку грань G гомеоморфна X^{n-1} и по индуктивному предположению $hc\,X^{n-1} \le \omega_0$, мы имеем, что $C \cap G$ не дискретно в себе. Поэтому C также не дискретно.

Случай 2. В этом случае можно выбрать несчетное подмножество $C' \subset C$, лежащее в X^n в общем положении. Как мы доказали, C' не дискретно в себе. Следовательно, C также не дискретно.

Итак, $hc\,X^n \le \omega_0$ и, значит, для любого n X^n наследственно сепарабельно. Заметим теперь, что счетная степень X^{ω_0} является пределом обратного спектра из конечных степеней $\{X^n, p^m_n\}$, где p^m_n — проектирование X^m на X^n, $m > n$. Поэтому наследственная сепарабельность X^n для любого n влечет наследственную сепарабельность X^{ω_0}.

Теорема доказана.

Литература

1. Жолков С. Ю., Салычев А. С. Стрелки и наследственное число Суслина в квадратах топологических пространств // Вестник МГУ. Сер. Математика. Механика. 1976. №1. С. 27–32.

2. Иванов А. В. О наследственной сепарабельности и размерности произведений бикомпактов // Доклады АН СССР. 1978. Т. 239. №5. С. 1037–1040.

3. Иванов А. В. О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // Доклады АН СССР. 1979. Т. 243. №5. С. 1109–1112.

4. Jensen R. B. The fine strusture of the constructible hierarchy // Ann. Math. Logic. 2:3 (1972). P. 229–308.

5. Kunen K. Strong Sand L spaces under MA // Set-theoretic Topology. New York: Academie Press. 1977.

6. Jech T. J. Automorphisms of ω_1-trees // Trans. Amer. Math. Soc. 173(1972). P. 57-70.

7. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.

8. Федорчук В. В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // Доклады АН СССР. 1973. Т. 213. №4. С. 795–797.

9. Федорчук В. В. Бикомпакт, все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны// Математический сборник. 1975. Т. 96(138). С. 41–62.

10. Федорчук В. В. Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств // Математический сборник. 1976. Т. 99(141). №1. С. 3–33.

11. Федорчук В. В. О мощности наследственно сепарабельных бикомпактов // Доклады АН СССР. 1975. Т. 222. №2. С. 302–305.