Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" *Выпуск 2, 1995*

УДК 517.986

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В.Мосягин

В статье доказаны теоремы существования единственного решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве с параметром.

В банаховом пространстве E рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u), \tag{1}$$

$$x(0) + g(x) = x_0, \tag{2}$$

$$x(T) = X, \tag{3}$$

где параметр $u \in E,\ T > 0,\ x_0, X \in E,\ f : [0,T] \times E \times E \to E$, $g : C([0,T], E) \to E$; f, g - заданные операторы, удовлетворяющие некоторым условиям.

Укажем достаточные условия, при которых задача (1)–(2)–(3) имеет единственное решение. Предварительно введем следующие обозначения: $I = [0,T]$, V — банахово пространство всех непрерывных функций z из I в E с нормой

$$\|z\|_V = \max_{t \in I} \|z(t)\|,\ \forall z \in V,$$

где $\|.\|$ - норма в E.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия H1)–H4):*

H1) оператор f непрерывен из $I \times E \times E$ в E и удовлетворяет условию Липшица

© В.В.Мосягин, 1995

$$\|f(t,x_1,u_1) - f(t,x_2,u_2)\| \le K(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|),\ K > 0, \tag{4}$$

$$\forall (t,x_1,u_1),\ (t,x_2,u_2) \in I \times E \times E;$$

H2) оператор g удовлетворяет условию Липшица

$$\|g(z_1) - g(z_2)\| \le L\|z_1 - z_2\|_V,\ L > 0,\ \forall z_1, z_2 \in V; \tag{5}$$

H3) существует такой линейный непрерывный и непрерывно обратимый оператор A, что для любой непрерывной функции $x(s)$ из V и любых $u_1, u_2 \in E$ выполнено неравенство

$$\Big\| \int_0^T [f(t,x(s),u_1) - f(t,x(s),u_2)]ds - A(u_1 - u_2) \Big\| \le$$

$$\le \varepsilon \|u_1 - u_2\|, \quad \varepsilon > 0, \tag{6}$$

причем

$$\varepsilon \|A^{-1}\| = \varepsilon_0 < 1; \tag{7}$$

H4) справедливо неравенство

$$(KT + L)\left(1 + \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \varepsilon_0} KT\right) = q < 1. \tag{8}$$

Тогда задача (1)–(2)–(3) имеет единственное решение.

Доказательство . Разрешимость задачи (1)–(2)–(3) будем доказывать методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем любую непрерывную функцию $x^{(0)}(s)$ из V.

Покажем, что уравнение

$$x_0 - g(x^{(0)}) + \int_0^T f(s, x^{(0)}(s), u)ds = X \tag{9}$$

разрешимо в E. Преобразуем уравнение (9) к виду

$$u = u + A^{-1}(X - x_0) + A^{-1}g(x^{(0)}) - A^{-1}\int_0^T f(s, x^{(0)}(s), u)ds \equiv Bu. \tag{10}$$

Из неравенств (6), (7) следует, что

$$\|Bu_1 - Bu_2\| \leq \varepsilon_0 \|u_1 - u_2\|, \ \varepsilon_0 < 1, \ \forall u_1, u_2 \in E.$$

Следовательно, уравнение (10) имеет единственное решение в E. Обозначим его через $u^{(0)}$.

В качестве первого приближения возьмем

$$x^{(1)}(t) = x_0 - g(x^{(0)}) + \int_0^t f(s, x^{(0)}(s), u^{(0)})ds. \tag{11}$$

Видно, что

$$x^{(1)}(0) = x_0 - g(x^{(0)}), \ \ x^{(1)}(T) = X.$$

Рассмотрим уравнение

$$x_0 - g(x^{(1)}) + \int_0^T f(s, x^{(0)}(s), u)ds = X. \tag{12}$$

Однозначная разрешимость уравнения (12) в пространстве E устанавливается так же, как и разрешимость уравнения (9). Пусть $u^{(1)}$ - решение уравнения (12).

Второе приближение определим так:

$$x^{(2)}(t) = x_0 - g(x^{(1)}) + \int_0^t f(s, x^{(1)}(s), u^{(1)})ds. \tag{13}$$

Функция $x^{(2)}(t)$, определенная формулой (13), удовлетворяет соотношениям

$$x^{(2)}(0) = x_0 - g(x^{(1)}), \ \ x^{(2)}(T) = X.$$

Пусть уже построено $(n-1)$ приближение, тогда n-е приближение определим следующим образом:

$$x^{(n)}(t) = x_0 - g(x^{(n-1)}) + \int_0^t f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)})ds, \tag{14}$$

где $u^{(n-1)}$ - решение уравнения

$$x_0 - g(x^{(n-1)}) + \int_0^T f(s, x^{(n-1)}(s), u)ds = X.$$

Снова видим, что

$$x^{(n)}(0) = x_0 - g(x^{(n-1)}), \ \ x^{(n)}(T) = X.$$

Установим сходимость последовательностей $\{x^{(n)}\}$ и $\{u^{(n)}\}$. Имеем $(n \geq 2)$:

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t) &= [g(x^{(n-2)}) - g(x^{(n-1)})] + \\ &+ \int_0^t [f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)})]ds + \\ &+ \int_0^t [f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)})]ds. \end{aligned} \tag{15}$$

При $t = T$ из (15) следует, что

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^T [f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)})]ds \right\| = \\ &= \left\| \int_0^T [f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)})]ds + \right. \\ &\left. + [g(x^{(n-2)}) - g(x^{(n-1)})] \right\| \leq (KT + L) \max_{t \in I} \|x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)\|. \end{aligned} \tag{16}$$

Оценим левую часть неравенства (16) снизу, используя неравенства (6), (7):

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^T [f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)})]ds - \right. \\ &\left. - A(u^{(n-1)} - u^{(n-2)}) + A(u^{(n-1)} - u^{(n-2)}) \right\| \geq \frac{1 - \varepsilon_0}{\|A^{-1}\|} \|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\|. \end{aligned} \tag{17}$$

Из (16) и (17) имеем

$$\|u^{(n-1)} - u^{(n-2)}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|(KT + L)}{1 - \varepsilon_0} \max_{t \in I} \|x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)\|. \tag{18}$$

Теперь из соотношений (15) и (18) получаем

$$\|x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)\| \le (KT + L)\times$$

$$\times \left(1 + \frac{\|A^{-1}\|KT}{1-\varepsilon_0}\right) \max_{t\in I} \|x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)\|.$$

Отсюда

$$\Delta_n = \max_{t\in I} \|x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)\| \le q\Delta_{n-1}, \tag{19}$$

где по условию (8) $q < 1$. Неравенство (19) показывает, что $\Delta_n \le q^{n-1}\Delta_1$, что равносильно равномерной сходимости $\{x^{(n)}(t)\}$. Сходимость последовательности $\{u^{(n)}\}$ вытекает из неравенства (18). Пусть

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}(t), \quad u = \lim_{n\to\infty} u^{(n)}.$$

При $n \to \infty$ из (14) получаем равенство

$$x(t) = x_0 - g(x) + \int_0^t f(s, x(s), u)ds.$$

Очевидно, $\{x(t), u\}$ и является решением задачи (1)-(2)-(3). Единственность решения этой задачи доказывается обычным образом. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия h1)-h5):*

h1) оператор f непрерывен из $I\times E\times E$ в E и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)\| \le K(\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|), \ K > 0,$$

$$\forall (t, x_1, u_1), \ (t, x_2, u_2) \in I\times E\times E;$$

h2) оператор g удовлетворяет условию Липшица

$$\|g(z_1) - g(z_2)\| \le L\|z_1 - z_2\|_V, \ L > 0, \ \forall z_1, z_2 \in V;$$

h3) для любой непрерывной функции $x(s)$ из V и любых u_1, $u_2 \in E$ существует такая постоянная $M > 0$, что

$$\left\|\int_{t_0}^T [f(t, x(s), u_1) - f(t, x(s), u_2)]ds\right\| \ge M\|u_1 - u_2\|;$$

h4) для каждой непрерывной функции $x(s)$ из V существует единственный элемент $u \in E$, что

$$x_0 - g(x) + \int_0^T f(s, x(s), u)ds = X;$$

h5) справедливо неравенство

$$(KT + L)\left(1 + \frac{KT}{M}\right) = q_1 < 1.$$

Тогда задача (1)–(2)–(3) имеет единственное решение.

Доказательство этой теоремы также проводится методом последовательных приближений.

В заключение отметим, что нелокальные начальные задачи для нелинейных и полулинейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах рассмотрены в работах [1,2].

Литература

1. Byszewski L. and Lakshmikantham V. Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space // Appl. Anal. 40 (1990). P. 11-19.

2. Byszewski L. Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem // Appl. Anal. 162 (1991). P. 494-505.