Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" *Выпуск 2, 1995*

УДК 511

К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ КВАДРАТИЧНЫХ ВЫЧЕТОВ И НЕВЫЧЕТОВ

В. А. Плаксин

В работе приводятся улучшенные по сравнению с работой [4] оценки интервалов, содержащих квадратичные вычеты и невычеты.

Согласно классической гипотезе И. М. Виноградова для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и простого числа p любой интервал вычетов по $(\bmod\ )p$ длины $o(p^\varepsilon)$ при $p \to \infty$ содержит квадратичные вычеты и невычеты по $(\bmod\ )p$. Хотя известные здесь результаты далеки от ожидаемых, интересно отметить, что из расширенной гипотезы Римана вытекает утверждение гипотезы с $O(\ln^2 p)$ вместо $o(p^\varepsilon)$. Для сравнения, для наименьшего квадратичного невычета по $(\bmod\ )p$ известна условная (РГР) оценка $\Omega(\ln p \cdot \ln\ln p)$ и недавно получена безусловная оценка $\Omega(\ln p \cdot \ln\ln\ln p)$. Более детальный обзор проблематики можно найти, например, в гл. 9 [1], гл. 13 [2] и [3].

Для формулировки основного результата настоящей работы введем следующие обозначения. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots$ — любые простые числа; S_n — дискретная окружность, состоящая из вычетов $0, 1, \ldots, p_n - 1$ по $(\bmod\ p)_n$; μ_n — вероятностная считающая мера на S_n, т.е. $\mu_n(x_n) = 1/p_n$ для всех $x_n \in S_n$. Тор T — декартово произведение всех окружностей, где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in T$ равносильно $x_n \in S_n$ для всех $n \geq 1$. Соответствующее произведение мер μ_n определяет меру mes на T.

Целью настоящей работы является

Теорема. *Найдется постоянное число $0 < c < 1/3$ такое, что при любом наборе простых чисел с условием*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln p_n}{\sqrt{p_n}} < c$$

существует подмножество $Q \subseteq T$ с $mes(T\backslash Q) = 0$, для любой точки которого $q = (q_1, q_2, \ldots) \in Q$ существует конечное число $C = C(q, T) \geq 0$ такое, что для всех $n \geq 1$ в интервале $(q_n, q_n + C + 3\ln p_n]$ есть квадратичные вычет и невычет по $mod\, p_n$.

Замечание. Наш результат уточняет теорему 2 работы [4], где в более сильном предположении

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{p_n^\varepsilon} < \frac{1}{9}, \qquad 0 < \varepsilon \leq \frac{1}{4},$$

изучались более длинные (степенные) интервалы вида $(q_n, q_n + C + p_n^\varepsilon]$.

Доказательство. Вывод теоремы следует схеме рассуждений [4], где, однако, вместо второго момента мы используем информацию о растущем моменте для суммы символов Лежандра

$$D_h(k) = \sum_{m=1}^{h} \left(\frac{k+m}{p}\right)$$

в виде следующей леммы, доказательство которой можно найти, например, в гл. 9 [1].

Лемма. *Пусть p — простое число, $0 < h < p$ и $r > 0$ — любое целое число. Тогда*

$$\sum_{k=0}^{p-1} \{D_h(k)\}^{2r} < (2r)^r p h^r + 4r\sqrt{p} h^{2r}.$$

Для вывода отсюда теоремы при $n \geq 1$ возьмем $h = [3\ln p_n]$ и определим подмножество $\Gamma_h \subset S_n$ вычетов $k \in S_n$, для которых

$$\left|\sum_{m=1}^{h} \left(\frac{k+m}{p_n}\right)\right| = h \text{ или среди чисел } \left(\frac{k+1}{p_n}\right), \ldots, \left(\frac{k+1}{p_n}\right)$$

есть нуль. В силу условия теоремы $p_n \geq 293$, т.к. $3\ln p_n < \sqrt{p_n}$, и леммы с $p = p_n$ и $r = [\ln p_n/2]$ имеем

$$\mu_n(\Gamma_n) \leq \frac{1}{p}\left(\frac{(2r)^r ph^r + 4r\sqrt{p}h^{2r}}{h^{2r}} + h\right) \leq \frac{\ln p_n}{c\sqrt{p_n}}$$

для некоторого постоянного числа $c \leq 1/3$. Обозначим через N множество точек $x = (x_1, x_2, \ldots) \in T$, где хотя бы одна из координат $x_n \in \Gamma_n$. Из полученной оценки и условия теоремы вытекает

$$mes(T \setminus N) \geq 1 - \sum_{n\geq 1}\mu_n(\Gamma_n) \geq 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{\ln p_n}{c\sqrt{p_n}} > 1 - \frac{c}{c} = 0.$$

Автоморфизм A тора T, определенный сдвигом

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + 1 (\mathrm{mod}\ p_1), x_2 + 1 (\mathrm{mod}\ p_2), \ldots),$$

согласно, например, теореме 1 работы [4], эргодичен по мере mes. В силу $mes(T \setminus N) > 0$ и эргодичности A почти каждая точка $q = (q_1, q_2, \ldots) \in T$ под действием некоторой степени A^C с конечным показателем $C = C(q, T) \geq 0$ перейдет в $T \setminus N$. Множество всех таких q обозначим Q. Теорема доказана.

Литература

1. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Физматгиз, 1962.

2. Murata I. On the magnitude of the least prime primitive root // J. Number Theory. 1992. V. 37. №1. P. 47–66.

3. Монтгомери Г. Мультипликативная теория чисел. М.: Мир, 1974.

4. Пустыльников Л. Д. О распределении квадратичных вычетов и невычетов и об одной динамической системе // УМН. 1993. Т. 48. С. 179–180.

Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 517.986

ПОДПРОСТРАНСТВА, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБОБЩЕННЫХ СДВИГОВ ЯКОБИ *

С.С.Платонов

Получено описание строения замкнутых подпространств, инвариантных относительно обобщенных сдвигов Якоби, в некоторых топологических векторных пространствах, состоящих из функций экспоненциального роста.

§1. Общие свойства обобщенных сдвигов и формулировка основных результатов

Пусть Δ – дифференциальный оператор Штурма—Лиувилля вида

$$\Delta = \frac{1}{A(t)}\frac{d}{dt}\left(A(t)\frac{d}{dt}\right) + q(t), \tag{1.1}$$

где функция $A(t)$ определена на полуинтервале $[0, +\infty)$ и $A(t) = t^{2\alpha+1}C(t)$, $\alpha > -\frac{1}{2}$, $C(t)$ – функция класса C^∞ на R, четная, строго положительная; $q(t)$ – четная R–значная функция класса C^∞ на R.

Операторы Бесселя и Якоби получаются при A и q соответственно равных:

$$(i) \quad \begin{cases} A = t^{2\alpha+1}, \quad \alpha > -\frac{1}{2}; \\ q(t) = 0; \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} A(t) = 2^{2\beta+1}(\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1}(\operatorname{ch} t)^{2\beta+1} = (\operatorname{sh} t)^{2(\alpha-\beta)}(\operatorname{sh} 2t)^{2\beta+1}, \\ \qquad \alpha > \beta > -\frac{1}{2}; \\ q(t) = (\alpha+\beta+1)^2. \end{cases}$$

* Работа поддержана РФФИ, проект 95–01–0139а.