Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 517.518

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ *

С.С.Платонов

В некоторых топологических векторных пространствах, состоящих из функций на евклидовом пространстве, получено описание замкнутых линейных подпространств, инвариантных относительно квазирегулярного представления группы изометрий.

§1. Формулировка результатов

Пусть группа Ли G транзитивно действует на гладком многообразии M. Для $g \in G$ и любой функции $f(x)$ на M пусть

$$(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in M.$$

Локально выпуклое пространство (ЛВП), состоящее из комплексно-значных функций на M (обычных или обобщенных), будем называть π–инвариантным, если из $f(x) \in \mathcal{F}$ следует, что $\pi(g)f \in \mathcal{F}$ $\forall g \in G$ и отображение $g \to \pi(g)f$ из G в $\mathcal{F}$ непрерывно. В этом случае сужение операторов $\pi(g)$ на $\mathcal{F}$ определяет квазирегулярное представление группы G в ЛВП $\mathcal{F}$ (будем обозначать это представление также через $\pi(g)$). Линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ будем называть инвариантным подпространством (ИПП), если оно замкнуто и π–инвариантно.

* Настоящая статья является сокращенным и переработанным вариантом статьи, которая будет опубликована в журнале "Mathematica Scandinavica".

Работа поддержана РФФИ, проект 95-01-0139а.

Одной из основных задач гармонического анализа на группах Ли является задача об описании всех ИПП для конкретных групп Ли и конкретных функциональных пространств, выделяемых некоторыми условиями гладкости и роста.

В настоящей работе рассматривается случай, когда M совпадает с n–мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, G — группа всех изометрий пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию. В качестве функциональных пространств можно брать пространства двух классов. Один класс состоит из пространств, состоящих из "всех" функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости. Это пространства типа $C = C(\mathbb{R}^n)$ — непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, C^d — d-раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ ($d = 0, 1, 2, \ldots \infty$, в частности, $C^0 = C$, $C^\infty = \mathcal{E}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций), L_{loc} — пространство локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций (все пространства берутся с обычными топологиями). Более точно: пусть $\mathcal{D}$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями, $\mathcal{D}'$ — пространство обобщенных функций на $\mathbb{R}^n$, тогда в качестве $\mathcal{F}$ можно взять любое полное π–инвариантное ЛВП такое, что

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'$$

(вложения предполагаются непрерывными). Будем называть такие пространства пространствами типа 1.

Другие функциональные пространства будут состоять из функций экспоненциального роста в некотором смысле, который будет уточнен далее. Пусть $x = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $o = (0, 0, \ldots 0)$, $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. Для мультииндекса $r = (r_1, \ldots r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ пусть $|r| = r_1 + \cdots + r_n$, $\partial^r = \partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n} f$, где ∂_t — дифференцирование по параметру t, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Обозначим через C_k множество непрерывных функций $f(x)$ на $M = \mathbb{R}^n$, для которых $|f(x)|e^{-k|x|} \to 0$ при $|x| \to \infty$. Относительно нормы

$$N_k(f) = \sup_{x \in M} |f(x)|\, e^{-k|x|}$$

C_k является банаховым пространством. Пространство

$$C_* = \bigcup_{k > 0} C_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП C_k. Через C_k^d $(d \in \mathbb{Z}_+)$ обозначим множество d–раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ таких, что

$$\partial^r f \in C_k$$

для любого мультииндекса $r \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|r| \le d$. Множество C_k^d является банаховым пространством с нормой

$$N_{k,d}(f) = \sum_{|r|\le d} N_k(\partial^r f).$$

Определим еще пространство

$$\mathcal{E}_k = C_k^\infty = \bigcap_{d=1}^{\infty} C_k^d.$$

Топология в $\mathcal{E}_k$ задается семейством полунорм (даже норм) $N_{k,d}$, $d \in \mathbb{Z}_+$, и $\mathcal{E}_k$ становится локально выпуклым пространством. Пространство

$$C_*^d = \bigcup_{k>0} C_k^d, \quad d = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП C_k^d. Пространство C_*^∞ будем также обозначать $\mathcal{E}_*$.

Пусть

$$\mathcal{K} = \bigcap_{k>0} \mathcal{E}_{-k}.$$

Пространство $\mathcal{K}$ состоит из функций, которые стремятся к нулю со всеми производными быстрее, чем $\mathrm{e}^{-k|x|}$ для любого $k > 0$. Пространство $\mathcal{K}$ является локально выпуклым пространством с топологией, порожденной системой норм $N_{-k,d}$ $\forall k > 0$, $d \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $\mathcal{K}'$ — сопряженное к $\mathcal{K}$ пространство, снабженное слабой топологией. $\mathcal{K}'$ естественно назвать пространством обобщенных функций экспоненциального роста.

Будем называть полное π–инвариантное ЛВП $\mathcal{F}$ пространством типа 2, если

$$\mathcal{E}_* \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}'$$

(вложения предполагаются непрерывными).

Приведем пример пространства типа 2. Через L_k^p $(p \ge 1)$ обозначим БП, состоящее из измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых конечна норма

$$\mathrm{n}_{k,p}(f) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \mathrm{e}^{-k|x|}\, dx \right)^{1/p},$$

где dx — элемент меры Лебега на $\mathbb{R}^n$. Пространство

$$L_*^p = \bigcup_{k>0} L_k^p$$

снабдим топологией индуктивного предела БП L_k^p. Пространства L_*^p $(p \ge 1)$ и C_*^d $(d = 0, 1, \ldots, \infty)$ являются пространствами типа 2.

Основным результатом настоящей работы является полное описание инвариантных подпространств в функциональных пространствах типа 1 и 2 (см. теоремы 1 и 2). Используемые при этом методы аналогичны методам работ [1–4].

Если $\mathcal{F}$–ЛВП, состоящее из функций на множестве M (если не оговорено противное, то все функции предполагаются комплекснозначными), E — конечномерное нормированное пространство, то тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{F} \otimes E$ естественным образом отождествляется с пространством функций на M со значениями в E и снабжается топологией тензорного произведения ЛВП (см. [5]).

Пусть K— стационарная подгруппа точки o в группе G. Группа K изоморфна группе $SO(n)$. Любое конечномерное неприводимое представление группы $SO(n)$ определяется своим старшим весом, который отождествляется с набором целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_m)$ $(m = [n/2]$ — целая часть числа $n/2)$, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_{m-1} \ge |\lambda_m| \quad \text{или} \quad \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_m \ge 0, \qquad (1.1)$$

при n соответственно четном или нечетном. Пусть Λ — множество всех старших весов группы K. Через Λ_0 обозначим множество старших весов группы K вида $(l, 0, \ldots 0)$, где $l \in \mathbb{Z}$ при $n = 2$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ при $n \ge 3$. Пусть T^l — неприводимое представление группы K со старшим весом $(l, 0, \ldots, 0)$, а E^l — пространство соответствующего представления T^l. В E^l фиксируем K–инвариантную эрмитову форму $< \xi, \eta >$,

$\xi, \eta \in E^l$. Всюду далее будет предполагаться, что l пробегает множество $\mathbb{Z}_+$, если $n \geq 3$, и множество $\mathbb{Z}$ при $n = 2$.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство типа 1 или типа 2. Через $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F} \otimes E^l$, удовлетворяющих условию

$$F(ux) = T^l(u)\, F(x) \qquad \forall u \in K. \tag{1.2}$$

Пространство $\mathcal{F}^{(l)}$ снабжается топологией, индуцированной из $\mathcal{F} \otimes E^l$. В частности, возникают пространства $\mathcal{E}^{(l)}$, $C_*^{(l)}$, $C_*^{d(l)}$ и т.д. Для любого ИПП $H \subset \mathcal{F}$ через $H^{(l)}$ обозначим множество всех функций $F \in \mathcal{F}^{(l)}$ таких, что для всякого $\xi \in E^l$ функция $\varphi_\xi(x) =< F(x), \xi >\in H$. Подпространство H однозначно восстанавливается по всем подпространствам $H^{(l)}$, а именно, H совпадает с замыканием линейной оболочки всех функций $< F(x), \xi >$ при $F \in H^{(l)}, \xi \in E^l$ и всех l. Будем называть подпространства $H^{(l)}$ ячейками ИПП H или просто инвариантными ячейками. Для описания инвариантного подпространства достаточно описать все его ячейки.

Пусть μ — комплексное число, r — натуральное число. Через $V_{\mu,r}^{(l)}$ обозначим линейное подпространство, состоящее из всех функций $F(x) \in \mathcal{E}^{(l)}$, удовлетворяющих уравнению $(\Delta + \mu^2)^r F = 0$, где $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \cdots + \partial_{x_n}^2$ — оператор Лапласа на $\mathbb{R}^n$. Если обозначить

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geq 0 \text{ и при } \mathrm{Re} z = 0 \quad \mathrm{Im} z \geq 0\}, \tag{1.3}$$

то без ограничения общности можно считать, что $\mu \in \mathbb{C}_+$. Оказывается, что $\dim V_{\mu,r}^{(l)} = r$ и в пространстве $V_{\mu,r}^{(l)}$ можно выбрать жорданов базис, т.е. такой базис $F_1, \ldots F_r$, что $\Delta F_1 = -\mu^2 F_1$, $\Delta F_k = -\mu^2 F_k + F_{k-1}$ для $k \geq 2$. Кроме того, оказывается, что $V_{\mu,r}^{(l)} \subset \mathcal{E}_*^{(l)}$.

Подпространство $V_{\mu,r}^{(l)}$ является простейшей инвариантной ячейкой в $\mathcal{F}^{(l)}$. В общем случае строение инвариантных ячеек в $\mathcal{F}^{(l)}$ описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Для любой инвариантной ячейки $H^{(l)}$ в $\mathcal{F}^{(l)}$ существует конечный или счетный набор комплексных чисел $\sigma = \{\mu_j\}$ (числа μ_j могут входить в набор с конечной кратностью r_j; $\mu_j \in \mathbb{C}_+$) такой, что $H^{(l)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}^{(l)}$ линейной оболочки подпространств $V_{\mu,r}^{(l)}$, где μ пробегает набор σ, а r — кратность числа μ в этом наборе.*

Естественно назвать набор σ спектром ячейки $H^{(l)}$. Можно дать и полное описание спектров всевозможных инвариантных ячеек. Если $\mathcal{F}$ — пространство типа 2, то множество $\{\mu_j\}$ ($\mu_j = a_j + \sqrt{-1}b_j \in \mathbb{C}_+$) является спектром некоторой инвариантной ячейки в $\mathcal{F}^{(l)}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

(A) *При каждом $t > 0$ для тех $\mu_j = a_j + \sqrt{-1}b_j$, у которых $|b_j| < t$, после их перенумерования в порядке роста a_j ($0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots$), последовательность $a_j / \ln j \to \infty$ или множество этих чисел конечно.*

Если $\mathcal{F}$ — пространство типа 1, то множество $\{\mu_j\}$ является спектром некоторой инвариантной ячейки $H^{(l)}$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

(B) *Существует целая ненулевая функция $\Phi(\lambda)$, для которой каждое число μ_j является корнем кратности не меньшей r_j и*

$$|\Phi(\lambda)| \leq A\, e^{B|\mathrm{Im}\lambda|}(1 + |\lambda|)^C$$

для некоторых $A, B, C > 0$ (такие функции являются преобразованиями Фурье обобщенных функций с компактным носителем).

Пусть для каждого l в $\mathcal{F}^{(l)}$ зафиксирована ячейка $H^{(l)}$ некоторого ИПП, вообще говоря, зависящего от l, и пусть $\sigma(l)$ – спектр ячейки $H^{(l)}$.

Теорема 2. *Ячейки $H^{(l)}$ соответствуют одному инвариантному подпространству тогда и только тогда, когда выполняются условия:*
1) при разных l наборы $\sigma(l)$ могут отличаться только кратностью $r_0^{(l)}$ числа 0 в этих наборах;
2) при $l \geq 0$ кратность $r_0^{(l+1)}$ может равняться $r_0^{(l)}$ или $r_0^{(l)} - 1$;
3) при $l \leq 0$ кратность $r_0^{(l-1)}$ может равняться $r_0^{(l)}$ или $r_0^{(l)} - 1$.
При $n \geq 3$ остаются только условия (1) и (2).

В совокупности теоремы 1 и 2 дают полное описание инвариантных подпространств в $\mathcal{F}$. В частности, из этих теорем легко получить описание неприводимых и неразложимых ИПП, где ИПП H называется неприводимым, если в H нет собственных инвариантных подпространств, и неразложимым, если $H \neq H_1 + H_2$, где H_1, H_2 — ненулевые ИПП такие, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (здесь $H_1 + H_2$ — замыкание алгебраической суммы подпространств).

Для спектров $\sigma(l)$ неприводимого ИПП H есть две возможности: (a) все спектры $\sigma(l)$ состоят из одного числа $\mu \neq 0$ с кратностью 1;

(б) спектр $\sigma(0)$ состоит из числа 0 с кратностью 1, остальные спектры $\sigma(l)$ пустые. В случае (б) соответствующее неприводимое ИПП в $\mathcal{F}$ состоит из всех констант. В случае (а), если $\mathcal{F}$ – пространство типа 1, соответствующее ИПП H состоит из всех функций $f \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + \mu) f = 0. \tag{1.4}$$

Обозначим это подпространство через $\mathcal{E}(\mu)$. Из теорем регулярности для эллиптических уравнений легко получить, что подпространство $\mathcal{E}(\mu)$ замкнуто в $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ — пространство типа 2, то соответствующее спектрам (а) ИПП есть $\mathcal{E}_*(\mu) = \mathcal{E}_* \cap \mathcal{E}(\mu)$. Отметим, что неприводимость подпространства $\mathcal{E}(\mu)$ при $\mu \neq 0$ установлена ранее С.Хелгасоном в [6].

Подпространство H неразложимо тогда и только тогда, когда каждый спектр $\sigma(l)$ состоит из единственного числа μ (не зависящего от l) с некоторой кратностью. Для $\mu \neq 0$ кратности числа μ должны быть равны для всех $\sigma(l)$; для $\mu = 0$ кратности могут изменяться так, чтобы выполнялись условия теоремы 2.

Если спектры $\sigma(l)$ совпадают и состоят из числа μ с кратностью r, то соответствующее неразложимое ИПП в пространстве $\mathcal{F}$ типа 1 состоит из всех функций $f \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + \mu)^r f = 0.$$

Обозначим это подпространство $\mathcal{E}(\mu, r)$. Соответствующее ИПП для пространства $\mathcal{F}$ типа 2 равно $\mathcal{E}_*(\mu, r) = \mathcal{E}(\mu, r) \cap \mathcal{E}_*$. Будем называть неразложимые ИПП $\mathcal{E}(\mu, r)$ и $\mathcal{E}_*(\mu, r)$ неособыми, а остальные — особыми. Если H — особое неразложимое ИПП, то каждый спектр $\sigma(l)$ состоит из числа 0 с некоторой кратностью d_l. Следовательно, особое подпространство описывается последовательностью неотрицательных целых чисел d_l, причем должны выполняться условия (2) и (3) теоремы 2. Можно получить и более явное описание особых ИПП, но оно здесь не приводится.

§2. Доказательства основных утверждений

Из теоремы 1 в [7] сразу получаем следующее

Предложение 1. *Пусть функциональные пространства $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ одного типа и $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Существует взаимно однозначное соответствие между ИПП в $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, которое получается сопоставлением ИПП $H \subset \mathcal{F}_1$ его замыкания $[H]$ в $\mathcal{F}_2$. То же самое соответствие получается, если сопоставлять ИПП $W \subset \mathcal{F}_2$ подпространство $W \cap \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_1$.*

Пусть π — произвольное представление группы Ли G в полном ЛВП $\mathcal{F}$ (G здесь может быть произвольной группой Ли, K — компактная подгруппа в группе G). Вектор ξ называется гладким (аналитическим), если отображение $g \to \pi(g)\xi$ из G в $\mathcal{F}$ бесконечно дифференцируемое (соотв. аналитическое). Вектор ξ называется K–финитным, если линейная оболочка векторов $\pi(u)\xi$ при $u \in K$ конечномерна. Пусть $\mathcal{F}_\sigma$— множество всех гладких K–финитных векторов, а $\mathcal{F}_\#$ — множество аналитических K–финитных векторов пространства $\mathcal{F}$.

Обозначим через Λ множество классов эквивалентности неприводимых конечномерных представлений группы K; для $\lambda \in \Lambda$ пусть $T^\lambda(u)$ — соответствующее неприводимое конечномерное представление группы K в пространстве E^λ. Векторное пространство V называется $(\mathfrak{g}, K)$–модулем Хариш–Чандры [8, 9], если V является $\mathfrak{g}$–модулем и при ограничении на подалгебру $\mathfrak{k}$ оно является прямой суммой примарных $\mathfrak{k}$–подмодулей V^λ, $\lambda \in \Lambda$, где V^λ – сумма всех $\mathfrak{k}$–подмодулей в V, изоморфных E^λ.

Относительно действия алгебры Ли $\mathfrak{g}$, индуцированного представлением π, пространства $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$ являются модулями Хариш–Чандры. Если H - замкнутое π–инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$, то $H_\sigma = H \cap \mathcal{F}_\sigma$ и $H_\# = H \cap \mathcal{F}_\#$ будут $\mathfrak{g}$–подмодулями соответственно в $\mathcal{F}_\sigma$ и $\mathcal{F}_\#$. Подпространство H_σ плотно в H. Если $\mathcal{F}$ — банахово пространство, то и $H_\#$ плотно в H (см. [10, с.124]), но в общем случае, когда $\mathcal{F}$ — полное ЛВП, $H_\#$ может и не быть плотным в H. Отметим также,что если $W_\#$ — произвольный $\mathfrak{g}$–подмодуль в $\mathcal{F}_\#$, то замыкание $[W_\#]$ будет π–инвариантным подпространством в $\mathcal{F}$.

Для любого $\lambda \in \Lambda$ через $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F} \otimes E^\lambda$, удовлетворяющих условию

$$F(ux) = T^\lambda(u)\, F(x) \qquad \forall u \in K. \tag{2.1}$$

Через $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ (соотв. $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$) обозначим множество всех функций $F \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$, удовлетворяющих условию

$$\varphi_\xi(x) =< F(x), \xi >\in \mathcal{F}_\sigma \quad (\text{соотв. } \varphi_\xi(x) \in \mathcal{F}_\#) \quad \forall \xi \in E^\lambda. \tag{2.2}$$

Если H — ИПП в $\mathcal{F}$, то пусть $H^{(\lambda)}$ состоит из всех функций $F \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$ таких, что
$$< F(x), \xi > \in H \qquad \forall \xi \in E^{\lambda}.$$

Положим также $H_{\sigma}^{(\lambda)} = H^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_{\sigma}^{(\lambda)}$ и $H_{\#}^{(\lambda)} = H^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_{\#}^{(\lambda)}$.

Пусть e_j $(1 \le j \le n_\lambda)$ — ортонормированный базис в E^{λ}, $\tau_{jr}(\text{г})$ — матричные элементы представления $T^{\lambda}(u)$ в этом базисе. Для любой функции $f(x) \in \mathcal{F}$ построим вектор–функцию $F(x) = \sum F^j(x)\, e_j$, где
$$F^j(x) = n_\lambda^{-1/2} \int \tau_{jr}(u^{-1})\, f(x)\, du, \qquad (2.3)$$
интеграл берется по группе K, du – элемент меры Хаара, r — фиксированное число. Легко видеть, что $F(x)$ удовлетворяет условию (2.1) и $F^j \in \mathcal{F}$, следовательно, $F(x) \in \mathcal{F}^{(\lambda)}$. Возникает непрерывное отображение $f \to F$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$, которое мы обозначим через Γ_r.

Лемма 1. *$\Gamma_r(H) = H^{(\lambda)}$ для любого ИПП $H \subset \mathcal{F}$.*

Доказательство. Если $f \in H$, то очевидно, что $\Gamma_r(f) \in H^{(\lambda)}$. Обратно, пусть $F \in H^{(\lambda)}$, $F(x) = \sum F^j(x) e_j$. Тогда $F^j(x) =< F(x), e_j >$, следовательно, $F^j \in H$. Остается заметить, что $\Gamma_r(F^r) = F$, что легко проверить, используя соотношения ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений.

Лемма 2. *Пусть H — ИПП в $\mathcal{F}$ и H_s — линейная оболочка всех функций $< F(x), \xi >$ для $F \in H^{(\lambda)}$, $\xi \in E^{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда H_s плотно в H.*

Доказательство. Пусть $f \in H_\sigma$. Так как функции F^j, определенные формулой (2.3), принадлежат H_s, то в H_s содержится и функция
$$f_\lambda(x) = n_\lambda \int \chi^{\lambda}(u^{-1})\, f(ux)\, du,$$
где $\chi^{\lambda}(u)$ — характер представления T^{λ}. Но из соотношений ортогональности следует, что отображение $f \to f_\lambda$ является проекцией пространства H_σ на примарный $\mathfrak{k}$–модуль H_σ^{λ}. Так как H_σ — модуль Хариш–Чандры, то $H_\sigma \subset H_s$, и так как H_σ плотно в H, тем более H_s плотно в H.

Предложение 2. *В условиях предложения 1 для любого λ существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными ячейками в $\mathcal{F}_1^{(\lambda)}$ и $\mathcal{F}_2^{(\lambda)}$. Это соответствие получается сопоставлением ячейке $H^{(\lambda)} \subset \mathcal{F}_1^{(\lambda)}$ ее замыкания $[H^{(\lambda)}]$ в $\mathcal{F}_2^{(\lambda)}$. То же самое соответствие получается сопоставлением ячейке $W^{(\lambda)} \subset \mathcal{F}_2^{(\lambda)}$ ячейки $W^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_1^{(\lambda)} \subset \mathcal{F}_1^{(\lambda)}$.*

Доказательство. Из предложения 1 мы знаем, что если H – ИПП в $\mathcal{F}_1$, то $W = [H]$ — ИПП в $\mathcal{F}_2$ и $W \cap \mathcal{F}_1 = H$. Пусть $H^{(\lambda)}$ — ячейка ИПП $H \subset \mathcal{F}_1$, $W = [H] \subset \mathcal{F}_2$. Тогда по лемме 1 $W^{(\lambda)} = \Gamma_r([H]) = [H^{(\lambda)}]$. Ясно, что $W^{(\lambda)} \cap \mathcal{F}_1^{(\lambda)} = H^{(\lambda)}$, следовательно, отображение $H^{(\lambda)} \to [H^{(\lambda)}]$ инъективно.

Если $W^{(\lambda)} \subset \mathcal{F}_2^{(\lambda)}$ — ячейка ИПП $W \subset \mathcal{F}_2$, то $H = W \cap \mathcal{F}_1$ — плотное подпространство в W и $H^{(\lambda)} = \Gamma_r(H)$ плотно в $W^{(\lambda)}$. Следовательно, отображение $H^{(\lambda)} \to [H^{(\lambda)}]$ сюръективно.

Следствие 1. *Для доказательств теорем 1 и 2 достаточно доказать эти теоремы для какого–нибудь пространства типа 1 и какого–нибудь пространства типа 2.*

Пусть G — произвольная группа Ли, K – ее компактная подгруппа, $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{k}_0$ — алгебры Ли групп G и K соответственно, $\mathrm{Ad}(g)$ — присоединенное представление группы G на алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$. Так как ограничение представления Ad на компактную группу K вполне приводимо, то существует инвариантное дополнение $\mathfrak{p}_0$ к $\mathfrak{k}_0$, т.е. $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{p}_0 \oplus \mathfrak{k}_0$ и $\mathrm{Ad}(u)\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_0$ для $u \in K$. Будем называть это разложение разложением Картана (оно совпадает с обычным разложением Картана, если G — полупростая группа Ли, K — максимальная компактная подгруппа в G).

Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{p}$ — комплексификации пространств $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{p}_0$ соответственно. Пространство $\mathfrak{p}$ становится $\mathfrak{k}$–модулем, если положить $kp = [k, p]$ для $k \in \mathfrak{k}$, $p \in \mathfrak{p}$. Пусть $p_1, \dots p_m$ — базис в $\mathfrak{p}$, причем пусть все $p_i \in \mathfrak{p}_0$; пусть $\mathfrak{p}^*$ — двойственный $\mathfrak{k}$–модуль, а $p_1^*, \dots p_m^*$ — двойственный базис в $\mathfrak{p}^*$.

Для $\lambda, \mu \in \Lambda$ пусть $\mathrm{Hom}(E^{\mu}, E^{\lambda})$ — множество линейных операторов из E^{μ} в E^{λ}. Пространство $\mathrm{Hom}(E^{\mu}, E^{\lambda})$ обычным образом является $\mathfrak{k}$–модулем, т.е.
$$(kA)\xi = k(A\xi) - A(k\xi) \qquad \forall \xi \in E^{\mu}, \quad k \in \mathfrak{k}.$$

Пусть
$$\varphi : \mathfrak{p}^* \to \mathrm{Hom}(E^{\mu}, E^{\lambda}) \qquad (2.4)$$

— гомоморфизм $\mathfrak{k}$–модулей. Положим $\alpha_j = \varphi(p_j^*) \in \mathrm{Hom}(E^\mu, E^\lambda)$, и пусть $\alpha_j^* \in \mathrm{Hom}(E^\lambda, E^\mu)$ — сопряженный оператор (т.е. $< \alpha_j\xi, \eta >= =< \xi, \alpha_j^*\eta > \forall\xi \in E^\mu, \quad \eta \in E^\lambda$).

Для функции $F(x) \in \mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ определим

$$(L(\varphi)F)(x) = -\sum_{j=1}^{m} \alpha_j^* \left[(p_j F)(x)\right], \tag{2.5}$$

где $p_j F$ — действие элемента из алгебры Ли на функцию, индуцированное представлением π.

Как показано в §3–4 работы [2], оператор $L(\varphi)$ переводит $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\sigma^{(\mu)}$ и $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}_\#^{(\mu)}$ (в [2] рассматривался случай пространств $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$ и полупростой группы G, но доказательства проходят и в общем случае; кроме того, в [2] оператор $L(\varphi)$ обозначался $L(p_1, \ldots p_m; \alpha_1, \ldots \alpha_m)$ и брался с другим знаком). Более того, если $H^{(\lambda)}$ и $H^{(\mu)}$ — ячейки одного ИПП $H \subset \mathcal{F}$, то $L(\varphi)H_\sigma^{(\lambda)} \subseteq H_\sigma^{(\mu)}$ и $L(\varphi)H_\#^{(\lambda)} \subseteq H_\#^{(\mu)}$. Обозначим множество операторов $L(\varphi)$, построенных по всевозможным гомоморфизмам (2.4), через $P_0(\lambda, \mu)$. Следующее предложение сразу следует из предл.3.1 в [2].

Предложение 3. *Пусть в каждом пространстве $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$, $\lambda \in \Lambda$, выделено линейное подпространство $H_\#^{(\lambda)}$ так, что для любого $L(\varphi) \in P_0(\lambda, \mu)$ выполняется соотношение $L(\varphi)H_\#^{(\lambda)} \subseteq H_\#^{(\mu)}$. Пусть H – замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех функций $< F(x), \xi >$ при $F \in H_\#^{(\lambda)}$, $\xi \in E^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда H будет инвариантным подпространством и соответствующие ему ячейки $H^{(\lambda)}$ совпадают с замыканием $H_\#^{(\lambda)}$ в $\mathcal{F}^{(\lambda)}$.*

Вернемся к случаю, когда G — группа сохраняющих ориентацию изометрий пространства $\mathbb{R}^n$, $K = SO(n)$ — стационарная подгруппа точки o, π — квазирегулярное представление, $\mathcal{F}$ — функциональное пространство типа 1 или типа 2. Множество Λ в этом случае совпадает с множеством старших весов $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_m)$ (см. (1.1)).

Лемма 3. *Пусть $F(x)$ — ненулевая функция на $\mathbb{R}^n$, принимающая значения в E^λ и удовлетворяющая условию (2.1). Тогда старший вес $\lambda \in \Lambda_0$ (т.е. $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_m = 0$).*

Доказательство. Пусть $\alpha(t)$ — параллельный перенос на вектор te_n, где $e_n = (0, \ldots 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Любую точку $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $x = u\,\alpha(t)o$, где $u \in K$. Тогда $F(x) = T^\lambda(u)\,F(\alpha(t)o)$, следовательно, для некоторого $t \in \mathbb{R}$ вектор $\xi = F(\alpha(t)) \neq 0$. Пусть $K_1 = \{u \in K : ue_n = e_n\}$. Подгруппа K_1 изоморфна группе $SO(n-1)$.

Для $u \in K_1$ очевидно, что $u\alpha(t) = \alpha(t)u$ и $T^\lambda(u)\xi = \xi$. Тогда в одномерном подпространстве в E^λ, натянутом на вектор ξ, возникает представление группы $K_1 = SO(n-1)$ со старшим весом $(0, \ldots 0)$. С другой стороны, известно (см., например, [10]), что при ограничении неприводимого представления T^λ на подгруппу K_1 возникает прямая сумма попарно не эквивалентных представлений группы K_1, причем среди этих представлений есть представление со старшим весом $(0, \ldots 0)$ тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_2 \geq 0 \geq \cdots \geq \lambda_{m-1} \geq 0 \geq \lambda_m,$$

т.е. $\lambda = (l, 0, \ldots 0)$, где $l = \lambda_1$.

Пусть

$$E_0^\lambda = \{\xi \in E^\lambda : \quad T^\lambda(\xi) = \xi \ \forall u \in K_1\}.$$

В процессе доказательства леммы 3 получено, что $\dim E_0^\lambda = 1$ при $\lambda \in \Lambda_0$ и $E_0^\lambda = \{0\}$ при $\lambda \notin \Lambda_0$. Из этого сразу получаем следующее

Следствие 2. *Пусть функция $F(x)$ принимает значения в E^λ, $\lambda \in \Lambda_0$, и удовлетворяет условию (2.1), ξ_0 — ненулевой вектор из E_0^λ. Тогда существует комплекснозначная функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которой $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$.*

Из леммы 3 следует, что пространства $\mathcal{F}^{(\lambda)}$ при $\lambda \notin \Lambda_0$ содержат только нулевые функции. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\lambda = (l, 0, \ldots 0) \in \Lambda_0$ и вместо $\mathcal{F}^{(\lambda)}$, $\mathcal{F}_\sigma^{(\lambda)}$, $\mathcal{F}_\#^{(\lambda)}$ и т.д. будем писать $\mathcal{F}^{(l)}$, $\mathcal{F}_\sigma^{(l)}$, $\mathcal{F}_\#^{(l)}$ и т.д. Если H – ИПП в $\mathcal{F}$, то по лемме 2 H совпадает с замыканием линейной оболочки всех функций $< F(x), \xi >$ при $F \in H^{(l)}$, $\xi \in E^l$, $l \in \mathbb{Z}_+$ или $l \in \mathbb{Z}$ при $n \geq 3$ и $n = 2$ соответственно.

Для использования предл.2 нужно изучить строение $\mathfrak{k}$–модуля $\mathfrak{p}$ и гомоморфизмов (2.4). В явном виде алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть реализована как множество $(n+1) \times (n+1)$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} & & & z_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & z_n \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

где A — комплексная кососимметрическая матрица размера $n \times n$, $z = (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$. Подалгебра $\mathfrak{k}$ состоит из матриц (2.6) с $z = 0$. В качестве $\mathfrak{p}$ можно взять множество матриц (2.6), у которых $A = 0$. В пространстве $\mathfrak{p}$ естественный базис образуют матрицы $p_1, \dots p_n$, где p_j — матрица, соответствующая строке z с 1 на j–м месте и с нулями на остальных местах. Заметим, что $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p}$ и, соответственно, $\mathfrak{p}$ является $\mathfrak{k}$–модулем. Этот $\mathfrak{k}$–модуль неприводимый со старшим весом $(1, 0, \dots 0)$.

В работе [2], где изучались ИПП в функциональных пространствах на n–мерном пространстве Лобачевского, также возникал $\mathfrak{k}$–модуль $\mathfrak{p}$ со старшим весом $(1, 0, \dots 0)$, рассматривались гомоморфизмы (2.4) и построенные по ним операторы $L(\varphi)$. Обозначим множество $P_0(\lambda, \mu)$ через $P_0(l, m)$, если $\lambda = (l, 0, \dots 0)$, $\mu = (m, 0, \dots 0)$. Рассуждая как в предл.3.3 из [2], получим следующее

Предложение 4. *Для любых l и m размерность $\dim P_0(l, m) \leq 1$, причем необходимым условием того, чтобы $P_0(l, m) \neq \{0\}$, является $m = l \pm 1$.*

Выберем какие–нибудь операторы (ненулевые, если соответствующее множество $P_0(l, m) \neq \{0\}$):

$$X_+^{(l)} \in P_0(l, l+1), \qquad X_-^{(l)} \in P_0(l, l-1).$$

Из предл.3 и леммы 4 сразу получаем следующее

Предложение 5. *Пусть для каждого l в пространстве $\mathcal{F}_\#^{(l)}$ задано линейное подпространство $H_\#^{(l)}$ так, что выполняются условия*

$$X_\pm^{(l)} \left(H_\#^{(l)} \right) \subseteq H_\#^{(l \pm 1)}.$$

Пусть H — замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех функций $< F(x), \xi >$ при $F \in H_\#^{(l)}$, $\xi \in E^l$ и всех l. Тогда H есть ИПП в $\mathcal{F}$ и его ячейка $H^{(l)}$ совпадает с замыканием $H_\#^{(l)}$ в $\mathcal{F}^{(l)}$.

Пусть $F(x) \in \mathcal{F}^{(l)}$. По следствию 2 $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$, где $f(t)$ — комплекснозначная функция, $t \in \mathbb{R}$, ξ_0 — ненулевой вектор из E_0^l. Зафиксируем вектор $\xi_0 \in E_0^l$ так, чтобы $||\xi_0|| = 1$. Из условия (2.1)

следует, что функция $F(x)$ однозначно восстанавливается по функции $f(t)$. Введем отображение $D^l : F(x) \to f(t)$. Действие операторов $X_\pm^{(l)}$ и оператора Лапласа Δ на функцию $F(x)$ можно выразить через $f(t)$, т.е. найти операторы $D^l \Delta \left(D^l\right)^{-1}$, $D^{l \pm 1} X_\pm^{(l)} \left(D^l\right)^{-1}$ (для краткости будем обозначать их просто Δ, $X_\pm^{(l)}$). Найдем явный вид этих операторов.

Пусть $x = u\,\alpha(t)o$, $u \in K$. Тогда $F(x) = T^l(u) f(t) \xi_0$. Известно, что действие оператора Лапласа в полярных координатах на $\mathbb{R}^n$ имеет вид:

$$(\Delta h)(x) = \partial_r^2 h + (n-1) r^{-1} \partial_r h + r^{-2} (Lh),$$

где L — оператор Лапласа на единичной сфере S^{n-1}. Если $x = u\alpha(t)o$, то $r = |t|$, следовательно,

$$(\Delta F)(x) = T^l(u) \left[\partial_t^2 f(t) + (n-1) t^{-1} \partial_t f(t) \right] \xi_0 + f(t)\, L \left(T^l(u) \xi_0 \right).$$

Пусть e_j, $1 \leq j \leq n_l$, — ортонормированный базис в E^l, причем пусть $e_1 = \xi_0$. Тогда $T^l(u)\xi_0 = \sum \tau_{j1}^{(l)}(u) e_j$. Известно [11, с.489], что для функций $\tau_{j1}^{(l)}(u)$ выполняется соотношение

$$L \left(\tau_{j1}^{(l)}(u) \right) = -l(l+n-2)\, \tau_{j1}^{(l)}(u).$$

Следовательно, и

$$L(T^l(u)\xi_0) = -l(l+n-2) T^l(u) \xi_0.$$

Окончательно получаем, что

$$(\Delta f)(t) = \partial_t^2 + (n-1) t^{-1} \partial_t f - l(l+n-2) t^{-2} f. \tag{2.7}$$

Вычисление операторов $X_\pm^{(l)}$ проводится аналогично вычислению соответствующих операторов в §5 работы [2]. Пусть $R(\varphi)$ — поворот на угол φ в плоскости (x_{n-1}, x_n) в $\mathbb{R}^n$. Произведение $\alpha(t)R(\varphi)\alpha(s)$ можно представить в виде $R(\psi)\alpha(t')R(\varphi')$, где ψ, t', φ' — функции параметров t, φ, s. Если считать s малым, то с точностью до малых первого порядка по s:

$$\alpha(t)\, R(\varphi)\, \alpha(s) = R(\psi_1 s)\, \alpha(t + t_1 s)\, R(\varphi + \varphi_1 s), \tag{2.8}$$

где $t_1 = \cos\varphi$, $\psi_1 = -t^{-1}\sin\varphi$, $\varphi_1 = t^{-1}\sin\varphi$. Это разложение заменяет разложение (5.7) в [2]. Остальные вычисления практически дословно повторяют вычисления в [2]. Окончательно получаем, что

$$\left(X_+^{(l)} f\right)(t) = \partial_t f(t) - l\, t^{-1} f(t), \tag{2.9}$$

$$\left(X_-^{(l)} f\right)(t) = \partial_t f(t) + (l+n-2)\, t^{-1} f(t). \tag{2.10}$$

Из явного вида операторов $X_\pm^{(l)}$ и Δ следует, что они связаны соотношениями

$$X_-^{(l+1)} X_+^{(l)} f = \Delta f; \qquad X_+^{(l-1)} X_-^{(l)} f = \Delta f. \tag{2.11}$$

Лемма 4. *Пусть $H_\#^{(l)}$ — линейное подпространство в $\mathcal{F}_\#^{(l)}$ такое, что $\Delta\left(H_\#^{(l)}\right) \subseteq H_\#^{(l)}$. Пусть $H^{(l)}$ — замыкание подпространства $H_\#^{(l)}$ в $\mathcal{F}^{(l)}$. Тогда $H^{(l)}$ является инвариантной ячейкой.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5.3 из [2] с использованием соотношений (2.11).

Введем некоторые функциональные пространства на $\mathbb{R}$. Через $\mathcal{L}_k$ обозначим БП, состоящее из измеримых нечетных функций $h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которых конечна норма

$$\eta_{2,k}(h) = \left(\int_0^{+\infty} |h(t)|^2\, e^{-kt}\, dt\right)^{1/2}.$$

Пространство $\mathcal{L}_* = \bigcup_{k>0} \mathcal{L}_k$ снабжается топологией индуктивного предела БП $\mathcal{L}_k$.

Пусть БП $\mathcal{S}_k$ состоит из всех четных непрерывных функций $h(t)$ таких, что $h(t)\,\mathrm{e}^{-kt} \to 0$ при $t \to +\infty$, и снабжается нормой

$$\eta_k(h) = \sup_{t\geq 0} |h(t)|\,\mathrm{e}^{-kt}.$$

Пусть $\mathcal{S}_* = \bigcup_{k>0} \mathcal{S}_k$ — индуктивный предел БП $\mathcal{S}_k$.

Через $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с обычной топологией. Пусть $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$ —

подпространства в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, состоящие соответственно из четных и нечетных функций.

Замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{L}_*$ или в $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$ будем называть обобщенно инвариантным подпространством (ОИПП), если оно инвариантно относительно преобразований

$$h(t) \to \frac{1}{2}(h(t+s) + H(t-s)) \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Будем еще всегда предполагать, что ОИПП не совпадает со всем пространством $\mathcal{L}_*$ или $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$.

Предложение 6. *ОИПП в $\mathcal{L}_*$ (или в $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$) находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными или счетными наборами комплексных чисел $\sigma \subset \mathbb{C}_+$, удовлетворяющими условию (A) (соотв. (B)). При этом набору σ соответствует ОИПП, которое совпадает с замыканием в $\mathcal{L}_*$ (соотв. в $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$) линейной оболочки функций*

$$\sin\mu t, \quad t\cos\mu t = \partial_\mu \sin\mu t, \quad \ldots \quad \partial_\mu^{r-1}\sin\mu t, \tag{2.13}$$

где $\mu \in \sigma$, r — кратность числа μ в наборе σ. При $\mu = 0$ функции (2.13) нужно заменить на

$$t, \quad t^3, \quad \ldots \quad t^{2r-1}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Для пространства $\mathcal{L}_*$ предл.6 доказано П.К.Рашевским в [1]. Рассмотрим случай пространства $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$. Будем называть линейное подпространство $W \subset \mathcal{E}(\mathbb{R})$ инвариантным, если оно замкнуто и инвариантно относительно сдвигов $h(t) \to h(t+s)$ $\forall s \in \mathbb{R}$. Кроме того, назовем W симметричным, если из $h(t) \in W$ следует, что $h(-t) \in W$. Введем отображение $P : h(t) \to \frac{1}{2}(h(t) - h(-t))$. Если W — симметричное ИПП в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, то $\mathcal{H} = P(W) = W \cap \mathcal{E}_1(\mathbb{R})$ — ОИПП в $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$. Обратно, если $\mathcal{H}$ — ОИПП в $\mathcal{E}_1(\mathbb{R})$, то пусть W — замыкание линейной оболочки функций $h(t+s)$ при $h(t) \in \mathcal{H}$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда W — симметричное ИПП в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ и $P(W) = \mathcal{H}$. Для доказательства предл.6 остается воспользоваться результатом Л.Шварца из [12], что ИПП в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ описываются наборами комплексных чисел σ, удовлетворяющими условию (B), причем набору σ соответствует ИПП, являющееся замыканием линейной оболочки функций

$$\mathrm{e}^{\mu t}, \quad t\mathrm{e}^{\mu t} = \partial_\mu \mathrm{e}^{\mu t}, \quad \ldots \quad t^{r-1}\mathrm{e}^{\mu t} = \partial_\mu^{r-1}\mathrm{e}^{\mu t}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится отдельно для случая $l = 0$ и затем для общего случая. Из предл.2 следует, что теорему 1 достаточно доказать для какого–нибудь пространства $\mathcal{F}$ типа 1 и какого–нибудь пространства $\mathcal{F}$ типа 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 (СЛУЧАЙ $l = 0$). Теорему 1 достаточно доказать для пространств $C_*^{(0)}$ и $\mathcal{E}^{(0)}$. Так как представление T^0 тривиальное, то пространства $C_*^{(0)}$ и $\mathcal{E}^{(0)}$ состоят из комплекснозначных функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$f(ux) = f(x) \qquad \forall u \in K. \tag{2.15}$$

(а) Легко видеть, что отображение

$$D^0 \colon f(x) \to h(t) = f(\alpha(t)o) \tag{2.16}$$

задает изоморфизм пространства $C_*^{(0)}$ на $\mathcal{S}_*$ и пространства $\mathcal{E}^{(0)}$ на $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$. Докажем, что линейное подпространство $H^{(0)} \subset \mathcal{F}^{(0)}$ ($\mathcal{F} = C_*$ или $\mathcal{F} = \mathcal{E}$) будет инвариантной ячейкой тогда и только тогда, когда $H^{(0)}$ замкнуто и инвариантно относительно преобразований

$$f(x) \to \int f(gux)\, du \qquad \forall u \in G. \tag{2.17}$$

интегралы по du всюду берутся по группе K.

Действительно, если $H^{(0)}$ — ячейка ИПП H, то функции $f(gux) \in H$, следовательно, и $\int f(gux)\, du \in H$. Обратно, пусть W — замкнутое линейное подпространство в $\mathcal{F}^{(0)}$, инвариантное относительно (2.17). Пусть H — замыкание линейной оболочки функций $f(gx)$ при $f \in W$, $g \in G$. Тогда H ИПП и отображение $\Gamma_0 \quad f(x) \to \int f(ux)\, du$ является проектором H на его ячейку $H^{(0)}$.Очевидно, что $\Gamma_0(f(gx)) = \int f(gux)\, du \in W$. Следовательно, $H^{(0)} = W$.

Так как произвольный элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = u_1\alpha(t)u_2$, где u_1, $u_2 \in K$, то $H^{(0)}$ инвариантно относительно (2.17) тогда и только тогда, когда $H^{(0)}$ инвариантно относительно (2.17) при $g = \alpha(s)\ \forall s \in \mathbb{R}$.

(б) Пусть T_x — параллельный перенос на вектор $x \in \mathbb{R}^n$. Для функции $f(x) \in \mathcal{F}^{(0)}$ пусть

$$v(x, y) = \int f(T_y u T_x o)\, du.$$

Очевидно, что

$$v(ux, y) = v(x, uy) = v(x, y) \qquad \forall u \in K,$$

в частности,

$$v(-x, y) = v(x, -y) = v(x, y).$$

Если F — функция класса C^2, то $v(x, y)$ удовлетворяет уравнению Дарбу:

$$\Delta_x v(x, y) = \Delta_y v(x, y),$$

где Δ — оператор Лапласа. Очевидно, что $v(x, 0) = f(x)$. Пусть $u(t, s) = v(\alpha(t)o, \alpha(s)o)$, где t, $s \in \mathbb{R}$. Тогда $u(t, s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\mathcal{D}_t u(t, s) = \mathcal{D}_s u(t, s), \tag{2.18}$$

где $\mathcal{D}_t = \partial_t^2 + (n-1)\, t^{-1} \partial_t$ — дифференциальный оператор Бесселя, с начальными условиями

$$u(t, 0) = f(\alpha(t)o) = h(t); \tag{2.19}$$

$$\partial_s u(t, 0) = 0. \tag{2.20}$$

Пусть $(\tau^s h)(t) = u(t, s)$. Из (2.18) — (2.20) следует, что τ^s есть оператор обобщенного сдвига Дельсарта—Левитана, соответствующий оператору Бесселя [13]. Замкнутое подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}_*$ имеет вид $\mathcal{H} = D^0\left(H^{(0)}\right)$ для некоторой инвариантной ячейки $H^{(0)} \subset C_*^{(0)}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ инвариантно относительно преобразований τ^s $\forall s \in \mathbb{R}$.

В [14] были описаны замкнутые подпространства $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}_*$, инвариантные относительно операторов обобщенного сдвига τ^s. Показано, что такие подпространства находятся во взаимно однозначном соответствии с множествами σ комплексных чисел, удовлетворяющими условию (А). При этом набору σ соответствует подпространство, совпадающее с замыканием в $\mathcal{S}_*$ линейной оболочки функций

$$\mathrm{j}_{n-1}(\mu t), \quad t\, \mathrm{j}'_{n-1}(\mu t), \quad \ldots \quad t^{r-1} \mathrm{j}_{n-1}^{(r-1)}(\mu t), \tag{2.21}$$

где $\mu \in \sigma$, r — кратность числа μ в наборе $\check{\sigma}$, $j_{n-1}(\mu t)$ — четная собственная функция оператора $\mathcal{D}_t$, нормированная условием $j_{n-1}(0) = 1$. При $\mu = 0$ функции (2.21) должны быть заменены на

$$1, \quad t^2, \quad t^4, \quad \ldots \quad t^{2r-2} \tag{2.22}$$

Доказательство этого результата получается редукцией к задаче об описании ОИПП в $\mathcal{L}_*$.

Описание замкнутых τ^s–инвариантных подпространств в $\mathcal{E}_0(\mathbb{R})$ такое же, как и в $\mathcal{L}_*$, только при этом наборы σ должны удовлетворять условию (B). Доказательство этого результата получается аналогично доказательству в [14] для $\mathcal{S}_*$, только при этом вспомогательное описание ОИПП в $\mathcal{L}_*$ заменяется описанием ОИПП из предложения 6.

Остается заметить, что функции (2.21) и (2.22) образуют базис пространства решений дифференциального уравнения $(\Delta + \mu^2)\, h = 0$, где $\Delta = D_t$ — оператор Лапласа в $\mathcal{E}^{(0)}$, т.е. базис в $V_{\mu,r}^{(0)}$. Так как $V_{\mu,r}^{(0)}$ содержит только одну (с точностью до умножения на число) собственную функцию оператора Δ (это $j_{n-1}(\mu t)$), то в пространстве $V_{\mu,r}^{(0)}$ существует жорданов базис. Это завершает доказательство теоремы 1 для пространств $C_*^{(0)}$ и $\mathcal{E}^{(0)}$.

Перейдем к случаю произвольного l. Пусть $F(x) \in C^{(l)}$, $f(t) = D^l(F)$. Действие операторов $X_\pm^{(l)}$ задается формулой (2.5), следовательно, операторы $X_\pm^{(l)}$ можно рассматривать как непрерывные отображения из $C^{d(l)}$ в $C^{(d-1)(l\pm1)}$ (или из $C_*^{d(l)}$ в $C_*^{(d-1)(l\pm1)}$) для любого $d \geq 1$. Действие операторов $X_\pm^{(l)}$ через функцию $f(t)$ имеет вид (2.9) и (2.10).

Лемма 5. *Справедливы следующие утверждения (если соответствующие операторы $X_\pm^{(l)}$ определены)*

(1) $\dim V_{\mu,r}^{(l)} = r$ *и* $V_{\mu,r}^{(l)} \subseteq C_{*\#}^{(l)}$;

(2) $\operatorname{Ker} X_-^{(l)} = \{0\}$ *при* $l > 0$, $\operatorname{Ker} X_-^{(l)} = V_{0,1}^{(l)}$ *при* $l \leq 0$;

(3) $\operatorname{Ker} X_+^{(l)} = V_{0,1}^{(l)}$ *при* $l \geq 0$, $\operatorname{Ker} X_+^{(l)} = \{0\}$ *при* $l < 0$;

(4) $X_-^{(l)}\left(V_{\mu,r}^{(l)}\right) = V_{\mu,r_1}^{(l-1)}$, *где* $r_1 = r$ *при* $\mu \neq 0$ *или при* $\mu = 0$ *и* $l > 0$, $r_1 = r - 1$ *при* $\mu = 0$ *и* $l \leq 0$;

(5) $X_+^{(l)}\left(V_{\mu,r}^{(l)}\right) = V_{\mu,r_2}^{(l+1)}$, *где* $r_2 = r$ *при* $\mu \neq 0$ *или при* $\mu = 0$ *и* $l < 0$, $r_2 = r - 1$ *при* $\mu = 0$ *и* $l \geq 0$.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 2.5 в [3].

С использованием леммы 5 доказательство теоремы 1 для $l \neq 0$ и теоремы 2 проводится аналогично доказательству соответствующих теорем в [3]. Отметим только, что при этом формулу (2.15) в [3] нужно заменить на

$$f(t) = t^{-(l+n-2)} \int_0^t h(s)\, s^{l+n-2}\, ds.$$

Литература

1. Рашевский П. К. Описание инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах // Труды ММО. 1979. Т.38. С.139–185.

2. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на n–мерном пространстве Лобачевского // Мат. сборник. 1988. Т.137. №4. С.435–461.

3. Платонов С. С. О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1 // Алгебра и анализ. 1992. Т.4. Вып.4. С.182–195.

4. Платонов С. С. Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе $SL(2, \mathbb{C})$ // Тр. сем. по вект. и тенз. анал. 1983. Вып.21. С.191–258.

5. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.:Мир, 1987.

6. Helgason S. Eigenspaces of the Laplacian // J. Funct. Anal. 1974. V.17. P.328–353.

7. Платонов С. С. О взаимно однозначном соответствии между инвариантными подпространствами в некоторых пространствах // Труды ПГУ. Сер. Математика; Вып.1. Петрозаводск, 1993. С.54–60.

8. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

9. Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. М.:Мир, 1984.

10. Желобенко Д. П., Штерн А. И. Представления групп Ли. М.:Наука, 1983.

11. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.:Наука, 1965.

12. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne–périodiques // Ann. of Math. 1947. V.48. №4. P.857–929.

13. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.:Наука, 1973.

14. Платонов С. С. Подпространства, инвариантные относительно обобщенных сдвигов // Мат. заметки. 1990. Т.47. Вып.6. С. 91–101.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

eeee

УДК 517.956.35

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

С.И.Соболев

В работах [1]–[3] рассматриваются различные аспекты построения инвариантной (или квазиинвариантной) меры для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Для уравнения Эйлера движения идеальной жидкости инвариантная мера типа меры Гиббса была построена С.Альбеверио, М.Фариа, Р.Хоег-Кроном [4]. Из рассмотрения задач евклидовой квантовой теории поля ряд важных результатов получен И.Д.Чешуевым [5].

В данной работе конструкция [2] переносится на случай нелинейного уравнения Шредингера. Для гамильтоновой динамической системы, порожденной этим уравнением, на расширенном фазовом пространстве строится инвариантная мера типа меры Гиббса. Доказывается слабая сходимость к этой мере последовательности ее конечномерных аппроксимаций. Возможны обобщения этой конструкции и на другие бесконечномерные гамильтоновы системы.

Рассмотрим кубическое уравнение Шредингера

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + |\psi|^2\psi, \quad \psi|_{x=0} = \psi_{x=\pi} = 0, \tag{1}$$

где $\psi = \psi(t,x)$ — комплекснозначная функция, $t > 0$, $x \in (0,\pi)$. Положим $\psi = u + iv$, где $u = Re\,\psi$, $v = Im\,\psi$, и перепишем уравнение (1) в виде гамильтоновой системы

$$\begin{cases} u_t = -v_{xx} + (u^2+v^2)v \equiv \dfrac{\delta\, H}{\delta\, v}; \\ v_t = u_{xx} - (u^2+v^2)u \equiv -\dfrac{\delta\, H}{\delta\, u} \end{cases} \tag{2}$$