12. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques // Ann. of Math. 1947. V.48. №4. P.857–929.

13. Левитан Б. М. Теория операторов обобщенного сдвига. М.:Наука, 1973.

14. Платонов С. С. Подпространства, инвариантные относительно обобщенных сдвигов // Мат. заметки. 1990. Т.47. Вып.6. С. 91–101.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

eeee

УДК 517.956.35

ОБ ИНВАРИАНТНОЙ МЕРЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

С.И.Соболев

В работах [1]–[3] рассматриваются различные аспекты построения инвариантной (или квазиинвариантной) меры для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Для уравнения Эйлера движения идеальной жидкости инвариантная мера типа меры Гиббса была построена С.Альбеверио, М.Фариа, Р.Хоег-Кроном [4]. Из рассмотрения задач евклидовой квантовой теории поля ряд важных результатов получен И.Д.Чешуевым [5].

В данной работе конструкция [2] переносится на случай нелинейного уравнения Шредингера. Для гамильтоновой динамической системы, порожденной этим уравнением, на расширенном фазовом пространстве строится инвариантная мера типа меры Гиббса. Доказывается слабая сходимость к этой мере последовательности ее конечномерных аппроксимаций. Возможны обобщения этой конструкции и на другие бесконечномерные гамильтоновы системы.

Рассмотрим кубическое уравнение Шредингера

$$i\psi_t = -\psi_{xx} + |\psi|^2\psi, \quad \psi|_{x=0} = \psi_{x=\pi} = 0, \tag{1}$$

где $\psi = \psi(t,x)$ — комплекснозначная функция, $t > 0$, $x \in (0,\pi)$. Положим $\psi = u + iv$, где $u = Re\,\psi$, $v = Im\,\psi$, и перепишем уравнение (1) в виде гамильтоновой системы

$$\begin{cases} u_t = -v_{xx} + (u^2+v^2)v \equiv \dfrac{\delta H}{\delta v}; \\ v_t = u_{xx} - (u^2+v^2)u \equiv -\dfrac{\delta H}{\delta u} \end{cases} \tag{2}$$

с гамильтонианом

$$H(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (u^2+v^2)^2 \right] dx. \quad (3)$$

Поскольку $H_0^1(0,\pi) \subset L^4(0,\pi)$, то энергетическим фазовым пространством этой системы является гильбертово пространство

$$M = H_0^1(0,\pi) \times H_0^1(0,\pi). \quad (4)$$

Обозначим $y = (u,v)$ и перепишем (2) в виде $\dot{y} = w(y)$.

Гамильтонова система (2) определяет в фазовом пространстве M поток $\{S_t\} : S_t y_0 = y(t)$, где $y(\cdot)$ — решение с начальным условием $y(0) = y_0$.

Мера μ на фазовом пространстве M называется инвариантной мерой гамильтоновой системы (2), если для любой непрерывной ограниченной функции f на пространстве M

$$\int_M f(S_t y)\mu(dy) \equiv \int_M f(y)\mu(dy). \quad (5)$$

Если функция f дифференцируема по Фреше на пространстве M, то дифференцируя равенство (5), получаем, что

$$\int_M \{H,f\}\mu(dy) = 0, \quad (6)$$

где

$$\{H,f\} = \int_0^\pi \left[\frac{\delta H}{\delta v(x)} \frac{\delta f}{\delta u(x)} - \frac{\delta H}{\delta u(x)} \frac{\delta f}{\delta v(x)} \right] dx$$

— скобка Пуассона гамильтониана H и функции f.

Мы построим меру μ на расширении

$$M_1 = H^{1-s}(0,\pi) \times H^{1-s}(0,\pi), \text{ где } s > \frac{1}{2},$$

фазового пространства M, для которой выполняется равенство

$$\int_{M_1} \{H,f\}\mu(dy) = 0, \quad (7)$$

являющееся аналогом равенства (6).

Перейдем к координатному представлению. Рассмотрим ортонормированный базис $\{e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx\}$ в пространстве $L^2(0,\pi)$. Отождествим функции u и v с наборами их коэффициентов Фурье:

$$u = (u_1, \ldots, u_N, \ldots), \ v = (v_1, \ldots, v_N, \ldots).$$

Гамильтониан перепишем так:

$$H(y) = H_0(y) + V(y), \quad (8)$$

где

$$H_0(y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty k^2(u_k^2 + v_k^2), \quad (9)$$

$$V(y) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\left(\sum_{k=1}^\infty u_k e_k(x)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^\infty v_k e_k(x)\right)^2 \right]^2 dx. \quad (10)$$

Норма $\|y\|_1$ элемента y пространства M_1 определяется равенством

$$\|y\|_1^2 = \sum_{k=1}^\infty k^{2(1-s)}(u_k^2 + v_k^2). \quad (11)$$

Построим по гамильтониану H последовательность мер $\{\mu_N\}$ на пространстве M_1. Положим

$$M^N = \{y^N = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)\}.$$

Будем записывать y^N так же, как $y^N = (u^N, v^N)$, где

$$u^N = (u_1, \ldots, u_N, 0, 0, \ldots), \ v^N = (v_1, \ldots, v_N, 0, 0, \ldots).$$

Определим борелевскую меру μ_N на пространстве M_1, положив для любого борелевского подмножества A пространства M_1

$$\mu_N(A) = \frac{\int\limits_{A\cap M^N} e^{-H(y^N)} dy^N}{\int\limits_{M^N} e^{-H(y^N)} dy^N}. \tag{12}$$

Мера μ_N сосредоточена на пространстве M^N. Функция на пространстве M_1 по этой мере интегрируется так:

$$\int\limits_{M_1} f(y)\mu_N(dy) = \Sigma_N^{-1} \cdot \int\limits_{M^N} f(y^N) e^{-H(y^N)} dy^N,$$

где

$$\Sigma_N = \int\limits_{M^N} e^{-H(y^N)} dy^N$$

Предложение 1. *Для последовательности мер $\{\mu_N\}$ справедлива оценка*

$$\int \prod_k |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_N(dy) \leq C \prod_{k\leq N} k^{-(\alpha_k+\beta_k)},$$

где α_k и β_k — неотрицательные целые числа, $k = 1, 2, \ldots$, $|\alpha| = \sum_k \alpha_k < +\infty$, $|\beta| = \sum_k \beta_k < +\infty$ и константа C зависит только от $|\alpha|$ и $|\beta|$.

Перед доказательством этого предложения докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Для гамильтониана $H(y)$ справедлива оценка*

$$H_0(y) \leq H(y) \leq H_1(y),$$

где

$$H_0(y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (u_k^2 + v_k^2)$$

и

$$H_1(y) = H_0(y) + C \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (u_k^4 + v_k^4).$$

Доказательство. Эта оценка следует из оценки

$$0 \leq V(y) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (u_k^4 + v_k^4),$$

доказательство которой

$$V(y) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \left[u^2(x) + v^2(x)\right]^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^{\pi} \left[u^4(x) + v^4(x)\right] dx \leq C \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (u_k^4 + v_k^4)$$

получается путем применения неравенства Пэли:

$$\int\limits_0^{\pi} |u(x)|^p \, dx \leq C_p \sum_{k=1}^{\infty} k^{p-2} |u_k|^p, \text{ где } p \geq 2$$

(см. [6]).

Лемма 2. *Последовательность*

$$\rho_N = \frac{\int e^{-H_0(y^N)} dy^N}{\int e^{-H_1(y^N)} dy^N}$$

ограничена.

Доказательство. Поскольку u и v входят в выражения для $H_0(y)$ и $H_1(y)$ равноправно, то $\rho_N = \sigma_N^2$, где

$$\sigma_N = \prod_{k=1}^{N} \frac{\int e^{-\frac{1}{2}k^2u^2} du}{\int e^{-\frac{1}{2}k^2u^2 - Ck^2u^4} du}.$$

Достаточно доказать, что последовательность $\ln \sigma_N$ ограничена. Это вытекает из следующих оценок:

$$\ln \sigma_N = \sum_{k=1}^{N} \ln \frac{\int e^{-\frac{1}{2}u^2} du}{\int e^{-\frac{1}{2}u^2 - Ck^{-2}u^4} du} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \ln \left(1 + \frac{\int e^{-\frac{1}{2}u^2} \left[1 - e^{-Ck^{-2}u^4}\right] du}{\int e^{-\frac{1}{2}u^2 - Ck^{-2}u^4} du} \right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \frac{\int e^{-\frac{1}{2}u^2} \left[1 - e^{-Ck^{-2}u^4}\right] du}{\int e^{-\frac{1}{2}u^2 - Cu^4} du} =$$

$$= C_1 \int e^{-\frac{1}{2}u^2} \sum_{k=1}^{N} \left[1 - e^{-Ck^{-2}u^4}\right] du \le$$

$$= C_2 \int e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_0^\infty \left(1 - e^{-Cr^{-2}u^4}\right) dr\, du =$$

$$= C_2 \int e^{-\frac{1}{2}u^2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-Ct^2u^4}}{t^2} dt\, du = C_3 \int e^{-\frac{1}{2}u^2} u^2\, du = C_4.$$

Так же, как по гамильтониану H мы определили меры μ_N, определим по "свободному" гамильтониану H_0 меру $\mu_{0,N}$:

$$\mu_{0,N}(A) = \frac{\int\limits_{A \cap M^N} e^{-H_0(y^N)} dy^N}{\int\limits_{M^N} e^{-H_0(y^N)} dy^N}.$$

Заметим, что

$$\int f(y) \mu_{0,N}(dy) = \Sigma_{0,N}^{-1} \int f(y^N) e^{-H_0(y^N)} dy^N,$$

где

$$\Sigma_{0,N} = \int\limits_{M^N} e^{-H_0(y^N)} dy^N = \frac{(2\pi)^N}{(N!)^2}.$$

Лемма 3. *Предложение 1 верно для мер $\mu_{0,N}$.*

Доказательство. Из определения мер $\mu_{0,N}$ с помощью замены переменных получаем

$$\int \prod_k |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_{0,N}(dy) \le \int \prod_{k \le N} |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_{0,N}(dy^N) =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} \frac{\int |u|^{\alpha_k} e^{-\frac{1}{2}k^2u^2} du}{\int e^{-\frac{1}{2}k^2u^2} du} \cdot \prod_{k=1}^{N} \frac{\int |v|^{\beta_k} e^{-\frac{1}{2}k^2v^2} dv}{\int e^{-\frac{1}{2}k^2v^2} dv} =$$

$$= \prod_{k=1}^{N} k^{-(\alpha_k+\beta_k)} \prod_{k=1}^{N} I(\alpha_k) \prod_{k=1}^{N} I(\beta_k),$$

где

$$I(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |w|^\gamma e^{-\frac{1}{2}w^2} dw.$$

Заметим, что отличных от 1 чисел $I(\alpha_k)$ у нас не больше, чем $|\alpha|$, и что наибольшее из них не превосходит $I(|\alpha|)$. Аналогично для чисел $I(\beta_k)$. Поэтому

$$\int \prod_{k=1}^{N} |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_{0,N}(dy) \le C \prod_{k=1}^{N} k^{-(\alpha_k+\beta_k)}, \qquad (13)$$

где константа C зависит только от $|\alpha|$ и $|\beta|$.

Доказательство предложения 1. Используя леммы 1,2 и 3 (оценка 13), получаем

$$\int \prod_k |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_N(dy) \le \int \prod_{k=1}^{N} |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_N(dy^N) =$$

$$= \frac{\int \prod_{k=1}^{N} |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} e^{-H(y^N)} dy^N}{\int e^{-H(y^N)} dy^N} \le$$

$$\le \frac{\int \prod_{k=1}^{N} |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} e^{-H_0(y^N)} dy^N}{\int e^{-H_1(y^N)} dy^N} =$$

$$= \rho_N \int \prod_{k=1}^{N} |u_k|^{\alpha_k} |v_k|^{\beta_k} \mu_{0,N}(dy^N) \le C \prod_{k=1}^{N} k^{-(\alpha_k+\beta_k)},$$

где константа C зависит только от $|\alpha|$ и $|\beta|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Семейство мер* $\{\mu_N\}$ *на пространстве* $M_1 = H_0^{1-s}(0,\pi) \times H_0^{1-s}(0,\pi)$, *где* $s > \frac{1}{2}$, *слабо компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно установить (см. [7, гл. 6]) выполнение следующих двух условий:

1) $\lim\limits_{R\to+\infty} \sup\limits_N \mu_N(\{y| \ \|y\|_1 > R\}) = 0;$

2) для любого $R > 0$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\|y\|_1 \le R} k^{2(1-s)}(u_k^2 + v_k^2)\mu_N(dy)$$

сходится равномерно по N.

Используя технику неравенства Чебышева, имеем

$$\mu_N(\{y| \ \|y\|_1 > R\}) = \int\limits_{\|y\|_1 > R} \mu_N(dy) \le \int\limits_{\|y\|_1 > R} \frac{\|y\|_1^2}{R^2}\mu_N(dy) \le \int \frac{\|y\|_1^2}{R^2}\mu_N(dy) =$$

$$= \frac{1}{R^2}\int \|y\|_1^2 \mu_N(dy) = \frac{1}{R^2}\int \sum_{k=1}^{N} k^{2(1-s)}(u_k^2 + v_k^2)\mu_N(dy) \le$$

$$\le \frac{C}{R^2}\sum_{k=1}^{N} k^{-2s} \le \frac{C}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2s} = \frac{M}{R^2}.$$

Здесь мы воспользовались предложением 1, из которого следует, что $\int (u_k^2 + v_k^2)\mu_N(dy) \le \frac{C}{k^2}$ при $k \le N$, и сходимостью ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2s}$ при $s > \frac{1}{2}$.

Далее, так как

$$\int\limits_{\|y\|_1 \le R} k^{2(1-s)}(u_k^2 + v_k^2)\mu_N(dy) \le$$

$$\le \int k^{2(1-s)}(u_k^2 + v_k^2)\mu_N(dy) \le Ck^{-2s},$$

а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2s}$ при $s > \frac{1}{2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса условие 2) тоже имеет место.

Поскольку последовательность мер $\{\mu_N\}$ по доказанному слабо компактна, то из нее можно выбрать подпоследовательность $\{\mu_{N'}\}$, слабо сходящуюся при $N' \to \infty$ к некоторой борелевской мере μ на пространстве M_1.

В дальнейшем нам потребуется следующее предложение о предельном переходе, доказательство которого см. в [2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть последовательность* $\{\mu_{N'}\}$ *мер на пространстве* M_1 *слабо сходится к мере* μ *при* $N' \to \infty$, *а функция* Φ *на пространстве* M_1 *непрерывна, ограничена на каждом шаре и такова, что*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{N'} \int\limits_{\|y\|_1 > R} |\Phi(y)|\mu_{N'}(dy) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{N'\to\infty} \int \Phi(y)\mu_{N'}(dy) = \int \Phi(y)\mu(dy).$$

Примерами функций, удовлетворяющих условиям предложения 3, являются функции $\Phi(y) = \prod\limits_n (u_n^{\alpha_n} v_n^{\beta_n})$, где α_n и β_n — неотрицательные числа, $n = 1, 2, \ldots, |\alpha| = \sum\limits_n \alpha_n < +\infty$ и $|\beta| = \sum\limits_n \beta_n < +\infty$.

Действительно, такая функция Φ непрерывна на пространстве M_1, так как является одночленом от конечного числа переменных $u_1, u_2, \ldots; v_1, v_2, \ldots$, по этой же причине она ограничена на каждом шаре пространства M_1. Кроме того, используя неравенство Чебышева, предложение 1 и сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2s}$ при $s > \frac{1}{2}$, получаем оценку

$$\int\limits_{\|y\|_1 > R} \prod_{n=1}^{\infty} |u_n|^{\alpha_n}|v_n|^{\beta_n}\mu_N(dy) \le$$

$$\le \frac{1}{R^2}\int \prod_{n=1}^{\infty}(|u_n|^{\alpha_n}|v_n|^{\beta_n})\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{2(1-s)}(u_k^2 + v_k^2)\right)\mu_N(dy) \le \frac{C}{R^2},$$

из которой следует, что

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{N'} \int\limits_{\|y\|_1 > R} |\Phi(y)|\mu_{N'}(dy) = 0$$

для нашей функции Φ.

Теорема. *Пусть $M_1 = H^{1-s}(0,\pi)\times H^{1-s}(0,\pi)$, где $1 < 2s < \frac{5}{3}$, и пусть мера μ — любая предельная точка последовательности $\{\mu_N\}$ борелевских мер (12) на пространстве M_1. Тогда для любой функции $f(y) = \varphi(u_1,\ldots,u_n;v_1,\ldots,v_n)$, где $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, выполняется равенство*

$$\int\limits_{M_1}\{H,f\}\mu(dy) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\{H,f\} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial H}{\partial v_k}\frac{\partial f}{\partial u_k} - \frac{\partial H}{\partial u_k}\frac{\partial f}{\partial v_k}\right)$$

для выбранной нами функции f и что

$$\int\{H,f\}\mu_N(dy) = 0$$

из определения мер μ_N в силу интегрирования по частям (см.[2]).

Если функция $\Phi = \{H,f\}$ удовлетворяет условиям предложения 3, то, применяя это предложение, мы получаем

$$\int\{H,f\}\mu_N(dy) = \lim_{N'\to\infty}\int\{H,f\}\mu_{N'}(dy) = \lim_{N'\to\infty} 0 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать, что функция $\Phi = \{H,f\}$ удовлетворяет условиям предложений 3, в силу выбора функции f достаточно доказать, что таковыми являются частные производные $\frac{\partial H}{\partial u_k}$ и $\frac{\partial H}{\partial v_k}$, где $k = 1,2,\ldots$ Поскольку u и v входят симметрично в выражение для гамильтониана H, проведем доказательство для

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = k^2 u_k + 2\int\limits_0^\pi \left(u^2(x)+v^2(x)\right)u(x)e_k(x)\,dx.$$

Первое слагаемое как одночлен удовлетворяет условиям предложения 3. Докажем то же для функции

$$\Psi(y) = \int\limits_0^\pi \left(u^2(x)+v^2(x)\right)u(x)e_k(x)\,dx.$$

Заметим, что отображение $F(u,v) = (u^2+v^2)u$ переводит пространство $L^3(0,\pi)\times L^3(0,\pi)$ в пространство $L^1(0,\pi)$, а функция $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx$ непрерывна и ограничена. Следовательно, по теореме Красносельского [8] функция Ψ непрерывна на пространстве $L^3(0,\pi)\times L^3(0,\pi)$ и ограничена на каждом шаре этого пространства. В силу непрерывности вложения $H^{1-s}(0,\pi)\subset L^3(0,\pi)$ функция Ψ непрерывна на пространстве M_1 и ограничена на каждом шаре. Сделаем оценку сверху $|\Psi(y)|$. Используя неравенство Пэли (см. [6])

$$\|u\|^3_{L^3} \equiv \int\limits_0^\pi |u(x)|^3\,dx \le C\sum_{k=1}^\infty k|u_k|^3$$

и элементарные неравенства, получим

$$|\Psi(y)| \le C\int\limits_0^\pi \left[|u(x)|^3 + |u(x)v^2(x)|\right]dx =$$

$$= \|u\|^3_{L^3} + \|uv^2\|_{L^1} \le \|u\|^3_{L^3} + \|u\|_{L^3}\|v\|^2_{L^3} \le$$
$$\le \|u\|^3_{L^3} + (1+\|u\|^3_{L^3})(1+\|v\|^3_{L^3}) \le$$
$$\le C\left(1+\sum_{k=1}^\infty k|u_k|^3 + \sum_{l=1}^\infty l|v_l|^3 + \sum_{k,l=1}^\infty kl|u_k|^3|v_l|^3\right).$$

Применим технику неравенства Чебышева и предложение 1:

$$\int\limits_{\|y\|_1\ge R}|\Psi(y)|\mu_N(dy) \le \frac{1}{R^2}\int\|y\|_1^2|\Psi(y)|\mu_N(dy) \le$$
$$\le \frac{C}{R^2}\int\sum_{n=1}^\infty n^{2(1-s)}(u_n^2+v_n^2)\times$$
$$\times\left(1+\sum_{k=1}^\infty k|u_k|^3 + \sum_{l=1}^\infty l|v_l|^3 + \sum_{k,l=1}^\infty kl|u_k|^3|v_l|^3\right)\mu_N(dy) \le$$
$$\le \frac{C'}{R^2}\sum_{n=1}^\infty n^{-2s}\left(1+\sum_{n=1}^\infty k^{-2} + \sum_{l=1}^\infty l^{-2} + \sum_{k,l=1}^\infty k^{-2}l^{-2}\right) \le \frac{C''}{R^2}.$$

Следовательно, $\lim_{R\to\infty} \sup_N \int_{\|y\|_1>R} |\Psi(y)|\mu_N(dy) = 0$. Итак, функция Ψ удовлетворяет всем условиям предложения 3 и теорема доказана.

Литература

1. Friedlander L. An Invariant Measure for the Equation $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ // Commun. Math. Phys. 1985. V. 98. №1. P. 1–16.
2. Соболев С.И. Пример инвариантной меры для динамической системы, порожденной нелинейным гиперболическим уравнением // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1985.
3. Andersson L. Prequantization of Infinite Dimensional Dynamical Systems // Journ. Funct. Anal. 1987. V. 75. №1. P. 58–91.
4. Albeverio S., De Faria M. and Hoegh-Krohn R. Stationary measures for the periodic Euler flow in two dimensions // Journ. Stat. Phys. 1979. V. 20. P. 585–595.
5. Чуешов И.Д. Равновесные статистические решения для динамических систем с бесконечным числом степеней свободы // Матем. сборник. 1986. Т. 130. №3. С. 394–403.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. М.: Мир, 1965.
8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.
9. Красносельский М.А. Непрерывность одного оператора // Доклады АН СССР. 1951. 77. №2. С. 185-188.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия “Математика” Выпуск 2, 1995

УДК 515.13

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. С. Стреколовская

В статье изучаются свойства топологических пространств, обозначенных в заглавии.

В работе [1] Б.А.Пасынков ввел понятие функционально-компактного топологического пространства (т.е. такого, в котором из любого покрытия функционально открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие). Известно (см.[1]), что в классе тихоновских пространств функциональная компактность совпадает с компактностью, в классе функционально-хаусдорфовых пространств функционально-компактные пространства абсолютно замкнуты. Непрерывный образ функционально-компактного пространства функционально компактен.

Нерешенными вопросами (см.[1]) являются следующие: будет ли произведение двух (любого числа) функционально-компактных пространств функционально-компактным пространством, будет ли предел обратного спектра из функционально-компактных пространств функционально-компактным.

В §1 эти вопросы решаются положительно для класса пространств, произведение которых обладает свойством прямоугольности [2].

В §2 изучаются свойства относительной размерности, определенной через конечные функционально-открытые покрытия.