Следовательно, $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{N}\int\limits_{\|y\|_1>R}|\Psi(y)|\mu_N(dy) = 0$. Итак, функция Ψ удовлетворяет всем условиям предложения 3 и теорема доказана.

Литература

1. Friedlander L. An Invariant Measure for the Equation $u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$ // Commun. Math. Phys. 1985. V. 98. №1. P. 1–16.

2. Соболев С.И. Пример инвариантной меры для динамической системы, порожденной нелинейным гиперболическим уравнением // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 1985.

3. Andersson L. Prequantization of Infinite Dimensional Dynamical Systems // Journ. Funct. Anal. 1987. V. 75. №1. P. 58–91.

4. Albeverio S., De Faria M. and Hoegh-Krohn R. Stationary measures for the periodic Euler flow in two dimensions // Journ. Stat. Phys. 1979. V. 20. P. 585–595.

5. Чуешов И.Д. Равновесные статистические решения для динамических систем с бесконечным числом степеней свободы // Матем. сборник. 1986. Т. 130. №3. С. 394–403.

6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. М.: Мир, 1965.

8. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.

9. Красносельский М.А. Непрерывность одного оператора // Доклады АН СССР. 1951. 77. №2. С. 185-188.

Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 515.13

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. С. Стреколовская

В статье изучаются свойства топологических пространств, обозначенных в заглавии.

В работе [1] Б.А.Пасынков ввел понятие функционально-компактного топологического пространства (т.е. такого, в котором из любого покрытия функционально открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие). Известно (см.[1]), что в классе тихоновских пространств функциональная компактность совпадает с компактностью, в классе функционально-хаусдорфовых пространств функционально-компактные пространства абсолютно замкнуты. Непрерывный образ функционально-компактного пространства функционально компактен.

Нерешенными вопросами (см.[1]) являются следующие: будет ли произведение двух (любого числа) функционально-компактных пространств функционально-компактным пространством, будет ли предел обратного спектра из функционально-компактных пространств функционально-компактным.

В §1 эти вопросы решаются положительно для класса пространств, произведение которых обладает свойством прямоугольности [2].

В §2 изучаются свойства относительной размерности, определенной через конечные функционально-открытые покрытия.

§1. Произведение функционально-компактных пространств

Дадим определение. Точка x называется функциональной точкой прикосновения множества A, лежащего в топологическом пространстве X, если любая функционально открытая окрестность точки x пересекается с множеством A. Множество всех функциональных точек прикосновения множества A называется f-замыканием множества A ($[A]_f$). Заметим, что любое функционально замкнутое множество является f-замкнутым, т.е. содержащим все свои функциональные точки прикосновения. Имеет место

Теорема 1. *Следующие условия равносильны:*

а) топологическое пространство X функционально-компактно;

б) любая центрированная система из непустых функционально замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение;

в) любой ультрафильтр из непустых функционально замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение;

г) любой ультрафильтр из непустых множеств $\mathfrak{A} = \{M_\alpha\}$, $\alpha \in A$, в X имеет хотя бы одну функциональную точку прикосновения.

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б) вытекает из того, что система $\mathfrak{A} = \{M_\alpha\}$ множеств в X является центрированной тогда и только тогда, когда система $\{X \setminus M, M \in \mathfrak{A}\}$ не содержит никакого конечного подпокрытия. При этом дополнения к функционально замкнутым множествам M являются функционально открытыми. Условия а) и в) эквивалентны, так как из леммы Цорна вытекает, что всякая центрированная система из функционально замкнутых множеств содержится в максимальной центрированной системе из функционально замкнутых множеств, т.е. в функционально замкнутом ультрафильтре. Наконец, из в) следует г), поскольку f-замыкания элементов ультрафильтра дают f-замкнутый ультрафильтр и в функционально-компактном пространстве тихоновски замкнутое множество $\cap_{\alpha\in A}[M_\alpha]_f$ (т.е. дополнение к нему есть сумма функционально открытых множеств) непусто, поскольку $\mathfrak{A} = \{M_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — максимальная центрированная система множеств в X (ультрафильтр). Из г) следует в), поскольку функционально замкнутое множество F ($F = f^{-1}\{0\}$, $f : X \to [0,1]$ — непрерывная функция) является f-замкнутым и из леммы Цорна. Теорема 1 доказана.

Теоремы 2 и 3 будут доказаны для произведений пространств со свойством прямоугольности: любое функционально открытое множество в произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ является суммой множеств вида $\cap_{i=1}^n \pi_{\alpha i}^{-1} O_i$, где O_i функционально открыты в X_{α_i}, $\pi_{\alpha i} : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_{\alpha i}$ — естественная проекция.

Теорема 2. *Произведение любого числа функционально-компактных пространств является функционально-компактным пространством.*

Доказательство. Возьмем произвольный ультрафильтр $\mathfrak{A} = \{M_\alpha\}$, $\alpha \in A$, лежащий в произведении $X = \prod_{\beta\in B} X_\beta$ функционально-компактных пространств X_β. Тогда множества $\{\pi_\beta M_\alpha\}$ очевидно образуют ультрафильтр в функционально-компактном пространстве X_β, имеющий хотя бы одну функциональную точку прикосновения x_β^0 согласно условию г) теоремы 1. Покажем, что точка $x_0 = \{x_\beta^0\}$ — функциональная точка прикосновения ультрафильтра $\mathfrak{A}$. Пусть Ox — произвольная функционально открытая окрестность точки x. Используя условие прямоугольности, впишем в нее окрестность вида $\cap_{i=1}^n \pi_{\beta_i}^{-1} O_i$, где O_i функционально открыты в X_{β_i}. При этом $O_i \cap \pi_{\beta_i} M_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in A$. Множества $\pi_{\beta_i}^{-1} O_i$ не нарушают центрированности системы $\mathfrak{A}$, следовательно, непустое пересечение множеств $\cap_{i=1}^n \pi_{\beta_i}^{-1} O_i$ принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{A}$. Тем более, множество Ox принадлежит ультрафильтру $\mathfrak{A}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Предел X обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \alpha, \beta \in A\}$ из непустых функционально-компактных и функционально-хаусдорфовых пространств X_α с непрерывными проекциями π_α^β "на" является функционально-компактным пространством.*

Доказательство. Через Π_β обозначим множество тех точек $x = \{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, для которых $x_\alpha = \pi_\alpha^\beta x_\beta$ при $\alpha < \beta$. Так как пространство X_α непусто, то непусто и множество Π_β. Действительно, если $x_\beta^0 \in X_\beta$, то множество Π_β содержит точку x, у которой $x_\alpha = x_\beta^0$

при $\alpha = \beta$, $x_\alpha = \pi^\beta_\alpha x^0_\beta$ при $\alpha < \beta$. Система множеств $\Pi_\beta, \beta \in A$, центрирована, так как $\bigcap_{i=1}^n \Pi_{\beta_i} \supseteq \Pi_\beta$ при $\beta > \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$. Наконец, множества Π_β f-замкнуты в произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Пусть точка $y = \{y_\alpha\} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \setminus \Pi_\beta$. Тогда существует такой индекс α, $\alpha < \beta$, что $\pi^\beta_\alpha y_\beta = y'_\alpha \neq y_\alpha$. Возьмем непересекающиеся функционально открытые окрестности Oy_α и Oy'_α точек y_α и y'_α. Из непрерывности проекции π^β_α следует, что $O_\beta = \pi_\alpha^{-1\beta} Oy'_\alpha$ — функционально открытая окрестность точки y_β. Тогда функционально открытая окрестность $\pi_\beta^{-1} O_\beta \cap \pi_\alpha^{-1} Oy_\alpha$ — искомая окрестность точки y, не пересекающаяся с множеством Π_β. Итак, дополнение к множеству Π_β есть сумма функционально открытых множеств, следовательно, множество Π_β f-замкнуто. Но предел спектра $X = \lim S = \bigcap_{\beta\in A} \Pi_\beta$ непуст по свойству г) теоремы 1. Поскольку дополнение к множеству X есть сумма функционально открытых множеств в функционально-компактном произведении $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, то (см. [1]) предел обратного спектра X является относительно функционально-компактным пространством в произведении. Теорема доказана.

§2. Свойства относительной размерности

Рассмотрим в функционально-компактном пространстве X размерность d, определенную с помощью конечных покрытий, состоящих из функционально открытых множеств (определение принадлежит М.Катетову и Ю.Смирнову).

Обозначим через $CZ(X)$ семейство всех функционально открытых множеств на X, через $Z(X)$ — семейство всех функционально замкнутых множеств на X.

Пусть $Y \subseteq X$. Обозначим через $Z(Y, X)$ след семейства всех функционально замкнутых множеств в X на Y, через $CZ(Y, X)$ — дополнения к множествам из $Z(Y, X)$.

Говорят, что размерность пространства Y относительно X не превосходит целого числа n, и пишут $d(Y, X) \leq n$, если в любое конечное $CZ(Y, X)$ покрытие Ω пространства Y можно вписать конечное

$CZ(Y, X)$ покрытие ω пространства Y кратности $\leq n + 1$. *

Следующая теорема является аналогом неравенства Урысона-Менгера.

Теорема 1. *Если A и B — любые подпространства функционально-компактного пространства X, то*

$$d(A \cup B, X) \leq d(A, X) + d(B, X) + 1.$$

Доказательство повторяет рассуждения из работы [3, с. 74].

Введем на множестве X функционально-компактного и функционально-хаусдорфова пространства X следующую топологию. Базу этой топологии образуют множества из $CZ(X)$. Пусть $H_1, H_2 \in CZ(X)$. Тогда множество $H_1 \cap H_2 \in CZ(X)$, поскольку пересечение конечного числа функционально открытых множеств функционально открыто. Пространство X с введенной топологией обозначим BX. Пространство BX хаусдорфово. В самом деле, для любых двух различных точек $x_1 \neq x_2$ найдется непрерывная функция $f : X \to I = [0, 1]$ такая, что $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 1$. Тогда $f^{-1}[0, \frac{1}{2})$ и $f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ — дизъюнктные функционально открытые окрестности точек x_1 и x_2. Пространство BX бикомпактно. В самом деле, в любое открытое покрытие ω пространства BX можно вписать покрытие элементами базы $\{H_\alpha, H_\alpha \in CZ(X)\}$. Затем из покрытия $\{H_\alpha\}$ выделим конечное подпокрытие. Очевидно, тождественное отображение $i : X \to BX$ непрерывно, т. е. является уплотнением.

Имеет место аналог формулы Гуревича.

Теорема 2. *Пусть X, Y — функционально-компактные и функционально-хаусдорфовы пространства. Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение пространства X на Y. Любая точка из Y функционально замкнута. Имеет место формула*

$$d\,X \leq \sup_{y\in Y} d(f^{-1}y, X) + d\,Y.$$

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

---

* Относительная размерность $d(Y, X)$ изучена А.Чигогидзе в классе тихоновских пространств [3].

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_X\downarrow & & \downarrow i_Y \\ BX & \xrightarrow{\tilde{f}} & BY \end{array}$$

По определению, $\tilde{f}(x) = f(x)$. Отображение $\tilde{f}$ непрерывно, поскольку прообраз любого элемента базы BY снова есть элемент базы пространства BX (прообразы функционально открытых множеств из Y при непрерывном отображении f функционально открыты в X).

$$\begin{cases} d\,X = \dim BX, \ d\,Y = \dim BY, \\ d(f^{-1}y, X) = d(\tilde{f}^{-1} i_Y y, BX) = \dim \tilde{f}^{-1} i_Y y. \end{cases} \qquad (1)$$

Множество $\tilde{f}^{-1} i_Y y = i_X f^{-1} y$ замкнуто в бикомпакте BX как образ функционально замкнутого множества $f^{-1}y$ при отображении i_X, и его относительная размерность совпадает с абсолютной размерностью dim (см. [3, с.72]).

Применяя формулу Гуревича для бикомпактов $\tilde{f}: BX \to BY$, имеем

$$\dim BX \le \sup_{y\in Y} \dim f^{-1}y + \dim BY. \qquad (2)$$

Учитывая соотношения (1) и (2), получаем окончательно

$$d\,X \le \sup_{y\in Y} d(f^{-1}y, X) + d\,Y.$$

Сформулируем аналог теоремы суммы для относительной размерности.

Теорема 3. *Пусть $\{A_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, — тихоновски замкнутые множества в функционально-компактном и функционально-хаусдорфовом пространстве X. Если $Y \subseteq X$ и $Y = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, где $d(A_i, X) \le n$ для любого $i = 1, 2, \ldots$, то $d(Y, X) \le n$.*

Доказательство. Имеем оценку $d(A_i, X) = d(iA_i, BX) = \dim iA_i \le n$, где iA_i — замкнутое множество в бикомпакте BX. По теореме суммы для замкнутых множеств нормальных пространств имеем $\dim(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \le n$. Так как $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ финально компактно, то (см. [3, с.72]) $d(\cup_{i=1}^{\infty} A_i, X) = \dim(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \le n$, что и требовалось доказать.

Литература

1. Пасынков Б. А. О функционально-компактных пространствах // IV Тираспольский симпозиум по топологии и ее приложениям. Тирасполь: Штиинца, 1979. С. 114–116.

2. Пасынков Б. А. О размерности прямоугольных произведений // ДАН СССР. 1975. Т. 221. №2. С. 291.

3. Чигогидзе А. Ч. Об относительных размерностях. Общая топология. Пространство функций и размерность. М.: Изд-во МГУ, 1985.

4. Энгелькинг Р. Общая топология. М.:Мир, 1986.

5. Александров А. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.:Наука, 1975.