Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" *Выпуск 2, 1995*

УДК 515.12

О ТЕОРЕМЕ ГУРНЕВИЧА *

В. В. Филиппов, Е. Н. Степанова

Речь пойдет о теореме Л. Гурневича [1], посвященной вопросу ацикличности множества решений задачи Коши для дифференциальных включений.

Первая теорема об ацикличности множества решений задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений была доказана Н. Ароншайном [2], Ж.-М. Ласри и Р. Роберт обобщили ее на случай дифференциальных включений [3]. Мы попытаемся сопоставить идеи статьи Гурневича с подходом к теории обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенным в [4] В. В. Филипповым.

Для дифференциального включения $y' \in F(t, y)$, правая часть которого определена в области $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, через Z обозначаем пространство его решений. Построение пространства Z^{-+} и топологических структур $R(U)$, $R_c(U)$, $R_{ce}(U)$, $R_{ceu}(U)$ см. в [4,5].

Пусть $Z \in R_{ce}(U)$ и $(t_0, y_0) \in U$. Тогда существует положительное число $\delta > 0$ такое, что для любого элемента $z \in Z^{-+}$ с условием $z(t_0) = y_0$ имеет место включение $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq \pi(z)$, где $\pi(z)$ — область определения решения z (выполнение этого условия следует из леммы 2 в [6]).

* **Заметка является кратким фрагментом статьи, полный текст которой предполагается опубликовать в соавторстве с Д. Б. Гельманом в 1995 году.**

Утверждение 1. *Если для пространства решений $Z \in R_{ce}(U)$ существует $Z_0 \in R_{ceu}(U)$ такое, что $Z_0 \subseteq Z$, то для любой точки $(t_0, y_0) \in U$ и любого отрезка I, удовлетворяющего условию $t_0 \in I \subseteq [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, множество решений задачи Коши, а именно множество*

$$A = \{z : z \in Z, \pi(z) = I, z(t_0) = y_0\},$$

является ациклическим компактом в пространстве $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для каждого $s \in I$ проведем процедуру подклеивания (см. [4, с.267]) пространств Z и Z_0:

$$Z_s = Z *_s Z_0,$$

положив $h(t, z(t)) = t$. Заметим, что при этом $Z_s \in R_{ce}(U)$ [5,с. 127].

Обозначим через A_0 множество решений задачи Коши для пространства Z_0:

$$A_0 = \{z : z \in Z_0, \pi(z) = I, z(t_0) = y_0\}.$$

В силу условия (u) множество A_0 состоит из одной точки.

Изменяя параметр s от правого конца отрезка I к левому в подклеивании Z_s, получаем гомотопию между множествами A и A_0: множество A стягивается по себе в одноточечное множество A_0. Это означает ацикличность компакта A. Заметим, что компактность множества A обсуждается в теореме 4 из [6].

В утверждении 1 требование $Z \in R_{ce}(U)$ несущественно. Достаточно потребовать, чтобы $Z \in R(U)$.

Утверждение 1′. *Если для пространства решений $Z \in R(U)$ найдется пространство $Z_0 \in R_{ceu}(U)$: $Z_0 \subseteq Z$, то для любой точки $(t_0, y_0) \in U$ и любого отрезка I: $t_0 \in I \subseteq [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ множество решений задачи Коши, а именно множество*

$$A = \{z : z \in Z, \pi(z) = I, z(t_0) = y_0\},$$

является стягиваемым множеством в пространстве $C([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для каждого $s \in I$ рассмотрим пространство $Z_s = Z *_s Z_0$. Пусть A_s — множество решений задачи Коши для пространства Z_s. Покажем, что по семейству $\{A_s : s \in I\}$ множество A стягивается к A_0 (здесь I можно понимать как направленное множество: $s \to a$, где $I = [a, b]$). Для этого выберем произвольно для каждого $s \in I$ решение $z_s \in A_s$ и покажем, что последовательность $\{z_s : s \in I\}$ сходится по направленному множеству I к z_0 — единственной точке множества A_0.

Рассмотрим две последовательности: $\{z_s|_{[a,s]} : s \in I\}$ и $\{z_s|_{[s,b]} : s \in I\} = \{z_0|_{[s,b]} : s \in I\}$. $z_s|_{[a,s]} \to z_0(a)$ при $s \to a$ в силу непрерывности z_s и условия $z_s|_{[s,b]} \equiv z_0|_{[s,b]}$. Кроме того, $z_0|_{[s,b]} \to z_0$ при $s \to a$. В силу теоремы III.5.5 из [7], обобщенная последовательность $\{z_s|_{[a,s]\cup[s,b]} : s \in I\} = \{z_s : s \in I\}$ сходится по направленному множеству I в пространстве $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ к z_0.

Введем в рассмотрение два класса пространств решений. К $Cl\,1$ отнесем каждое пространство Z из $R_{ce}(U)$, имеющее своим подпространством $Z_0 \in r_{ceu}(U)$. А элементами $Cl\,2$ объявим те пространства, которые можно представить в виде не более чем счетного пересечения пространств из $Cl\,1$.

Утверждение 2. *Для $Z \in Cl\,2$, $(t_0, y_0) \in U$ и отрезка I с условием $t_0 \in I \subseteq [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ множество решений задачи Коши*

$$A = \{z : z \in Z, \pi(z) = I, z(t_0) = y_0\}$$

является ациклическим компактом.

Доказательство. $Z = \bigcap_{k=1}^{\infty} Z_k$, $Z_k \in Cl\,1$, $k = 1, 2, \ldots$. Согласно утверждению 1, для любого $k = 1, 2, \ldots$ соответствующие множества A_k — ациклические компакты.

Пусть $A = \{z : z \in Z, \pi(z) = I, z(t_0) = y_0\}$. Легко убедиться, что $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Остается сослаться на лемму Д. Б. Гельмана [8]: пересечение ациклических компактов в хаусдорфовом паракомпактном пространстве является ациклическим компактом.

Литература

1. Górniewicz L. On the solution set of differential inclusion // J. of Math. Anal. and Appl. V. 113. 1986. P. 235–244.

2. Aronszajn N. Le corrspodent topologique de lúnicit dans le théorie des équations différentielles // Ann. Math. 43 (1942). P. 730–738.

3. Lasry G.-M., Robert R. Acyclicité de lénsemble des solutions de certaines équations fonctionnelles // C. R. Acad. Sc. Paris, 1976. V. 282. P. 1283–1286.

4. Филиппов В. В. Пространства решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1993.

5. Филиппов В. В. Топологическое строение пространств решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48. Вып. 1 (286). С. 103–154.

6. Филиппов В. В. О теореме Кнезера // Дифференциальные уравнения. Минск, 1987. Т. 23. №12.

7. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.

8. Гельман Д. Б. О структуре множества решений включений с многозначными операторами // Глобальный анализ и математическая физика. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987. С. 26–41.