Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 2, 1995

УДК 511

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ $\mathbf{d(n,\omega)}$ В КЛАССАХ ВЫЧЕТОВ

Б. М. Широков

В работе устанавливаются условия слабо равномерного распределения значений функции $d(n,\omega)$ с вещественным характером Дирихле $\omega(n)$ в классах вычетов по составному модулю и приводятся асимптотические формулы.

В работе В. Наркевича [1] рассматривается задача распределения значений *полиномоподобных* мультипликативных функций, т. е. функций, значения которых на степенях простых чисел являются значениями многочленов на простых числах, но многочлены от этих простых чисел не зависят. Таковы, например, функции $d(n)$ — число делителей n, $\sigma_k(n)$ — сумма k-х степеней делителей n.

В этой же работе В. Наркевич вводит понятие слабого равномерного распределения функций в классах вычетов. Функция $f(n)$ называется *слабо равномерно распределенной* в классах вычетов по модулю N, если для любых целых чисел i и j, взаимно простых с N,

$$\#\{n \le x | f(n) \equiv i \pmod N\} \sim \#\{n \le x | f(n) \equiv j \pmod N\}$$

при условии, что множество тех n, для которых $f(n)$ взаимно просто с N, бесконечно.

В работе [2] автором улучшены результаты работы [1] и распространены на более широкий класс функций. Рассмотренные там функции обладают следующим свойством:

существует такое целое число l, что для любых целых чисел N и $k > 0$ и любой пары простых чисел p, q

$$(N \equiv 0 \pmod l)\&(p \equiv q \pmod N)) \Rightarrow f(p^k) \equiv f(q^k) \pmod N. \quad (1)$$

Наименьшее натуральное число l, для которого справедливо свойство (1) для функции $f(n)$, обозначим через $l(f)$.

Для полиномоподобной функции $l(f) = 1$, а для функии $f(n) = \frac{1}{4}r_2(n)$ ($r_2(n)$ — количество представлений n в виде суммы квадратов двух целых чисел) — $l(f) = 4$.

Скурфилд [3] нашел главный член асимптотики количества $n \le x$, для которых $r_2(n)$ не делится на фиксированное нечетное простое число, а О.М.Фоменко [4] привел критерий слабо равномерного распределения $\frac{1}{4}r_2(n)$ в классах вычетов по простому модулю. В работе [2] приведены более точные асимптотические формулы и дан критерий слабо равномерного распределения в классах вычетов по составному модулю.

Попутно замечу, что в работе [2], в следствии 5, посвященном функции $\sigma_2(n)$, автором допущена ошибка, на которую ему указал В. Наркевич. Правильный и полный результат для функции $\sigma_2(n)$ можно найти в работе В. Наркевича и Ф. Рейнера [5].

В настоящей работе изучается распределение значений функции

$$d(n,\omega) = \sum_{d|n} \omega(d),$$

где $\omega(n)$ — примитивный вещественный неглавный характер Дирихле модуля m, не делящегося на 8. Эти функции обладают свойством (1) с $l(f) = m$.

Обозначения: p и q — простые числа, i, j, k, l, m, n, N — натуральные числа; $G(N)$ — мультипликативная группа вычетов по модулю N, $R_j = R_j(f)$ — подмножество $G(N)$ элементов a, для которых существует такое p, что $(p, l(f)) = 1$ и $f(p^j) \equiv a \pmod N$; $M = M(f)$ — наименьшее из чисел j, для которых $R_j(f) \ne \emptyset$. Это значит, что если $j < M$, то $(f(p^j), N) > 1$ для любого простого числа p, взаимно простого с $l(f)$, и существует такое p, $(p, l(f)) = 1$, что $(f(p^M), N) = 1$; Λ_M — подгруппа $G(N)$, порожденная множеством R_M; χ и χ_0 — произвольный и главный характеры по модулю N; $s = \sigma + it$ — комплексное число, $T = \exp(\sqrt{\log x})$, $c, c_1, c_2, \ldots$ — абсолютные положительные постоянные; для положительного вещественного числа α с фиксированным вещественным числом β обозначим $\sigma(t) = \alpha - \beta/\ln(2 + |t|)$ и

$$\Omega(\alpha) = \{s \mid \sigma \ge \max\{\sigma(t), \tfrac{3}{4}\alpha\}, \quad -\infty < t < +\infty\},$$

$\sigma_0 = \sigma_0(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\ln x}$; для функции $F(s)$, определенной на $\Omega(\alpha)$, обозначим

$$J(x, F) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_0 - iT}^{\sigma_0 + iT} F(s) \frac{x^s}{s}\, ds.$$

Обозначим, наконец, через $S(x, f, a)$ количество чисел $n \le x$, для которых $f(n) \equiv a \pmod N$.

Нам понадобится теорема, которая была доказана В. Наркевичем для полиномоподобных функций в [1] и перенесена на функции со свойством (1) в работе [2].

Теорема А. *Для того чтобы функция $f(n)$ была слабо равномерно распределена по модулю N, необходимо и достаточно, чтобы для любого неглавного характера χ по модулю N, равного 1 на Λ_M, существовало простое число p, для которого*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\chi(f(p^k))}{p^{k/M}} = 0. \tag{2}$$

Непосредственно из этой теоремы следует, что если $\Lambda_M = G(N)$, то $f(n)$ слабо равномерно распределена по модулю N.

Для получения асимптотических формул приведем еще одну теорему тауберова типа из работы [2].

Теорема Б. *Пусть в области $\Omega(\alpha)$ функция $F(s)$ удовлетворяет условиям:*

$$F(s) = O(\ln^{c_1}(2 + |t|)), \qquad |t| \ge 1, \tag{3}$$

и существует такое комплексное число z, что

$$F(s) = G(s)(s - \alpha)^{-z} \tag{4}$$

причем $G(s)$ аналитична в $\Omega(\alpha)$ и $G(\alpha) \ne 0$. Тогда существует такая постоянная c, что

а) если $z = 0, -1, -2 \ldots$, то

$$J(x) = O(x^\alpha e^{-c\sqrt{\ln x}}), \tag{5}$$

б) если $z = 1$, то

$$J(x) = \frac{G(\alpha)}{\alpha} x^\alpha + O(x^\alpha e^{-c\sqrt{\ln x}}), \tag{6}$$

в) если z не является целым рациональным числом, то для любого n

$$J(x) = \frac{x^\alpha}{(\ln x)^{1-z}} P_{n-1}\left(\frac{1}{\ln x}\right) + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1-\Re z}}\right), \tag{7}$$

где

$$P_n(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(z-1)\cdots(z-k)}{\Gamma(z)} y^k, \quad a_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{(ds)^k}\left(\frac{G(s)}{s}\right)(\alpha),$$

а $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Основной результат заключается в следующей теореме.*

Теорема. *Функция $d(n, \omega)$ слабо равномерно распределена по модулю N тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $N = 4$,

2) $N = q^k$, $q \ge 3$ и 2 — первообразный корень по модулю N,

3) $N = 2q^k$, $q > 3$ и 3 — первообразный корень по модулю N.

Кроме того, при $x \to \infty$ для любого $a \in G(N)$ и $\delta = 2\pi/q^{k-1}(q-1)$ в первом случае

$$S(x, d(n, \omega), a) = \frac{1}{2} \prod_{p|m} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \sqrt{x} + O\left(\sqrt{x} e^{-c_1\sqrt{\ln x}}\right), \tag{8}$$

во втором случае существует такая вычислимая постоянная C, что

$$S(x, d(n, \omega), a) = \frac{Cx}{\sqrt{\ln x}} + O\left(\frac{x}{(\ln x)^{1-(\cos\delta)/2}}\right), \tag{9}$$

и в третьем случае существует такая вычислимая постоянная D, что

$$S(x, d(n, \omega), a) = D\sqrt{x} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{(\ln x)^{(1-\cos\delta)/2}}\right). \tag{10}$$

* Относительно формул (9) и (10) см. Замечание в конце статьи.

Доказательство. Пусть N нечетно. Так как для p, взаимно простого с N,

$$d(p,\omega)=\begin{cases}2, & \text{если } \omega(p)=1,\\ 0, & \text{если } \omega(p)=-1,\end{cases}$$

то $R_1=\{2\}$. Поэтому функция $d(n,\omega)$ слабо равномерно распределена тогда и только тогда, когда либо выполняется условие (2) теоремы A для любого неглавного характера χ с условием $\chi(2)=1$, либо 2 — первообразный корень по модулю N. Так как $M=1$, то условие (2) может выполняться лишь для $p=2$. Если $\omega(2)=-1$, то

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi(d(2^k,\omega))}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}>0.$$

Если же $\omega(2)=1$, то $d(2^k,\omega)=k+1$. Поэтому

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\chi(k+1)}{2^k}\right|\geq\frac{3}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.$$

Итак, мы видим, что условие (2) невыполнимо. Следовательно, $d(n,\omega)$ слабо равномерно распределена по модулю нечетного N тогда и только тогда, когда 2 — первообразный корень по модулю N. Это соответствует пункту 2) утверждения теоремы.

Пусть теперь N четно. В этом случае $R_1=\emptyset$, а $R_2=\{1,3\}$, если 3 не делит N, и $R_2=\{1\}$ в противном случае. Так же, как и для нечетного N, легко проверяется, что условие (2) не выполняется ни для одного характера модуля N. Таким образом, если N делится на 3, то слабо равномерное распределение отсутствует. Если же N не делится на 3, функция слабо равномерно распределена по модулю N в том и только в том случае, если 3 — первообразный корень по этому модулю. Это соответствует пунктам 1) и 3) формулировки теоремы.

Перейдем к доказательству асимптотических формул. Обозначим

$$F(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(f(n))}{n^s}.$$

Лемма. *Для любого $a\in G(N)$ при $x\to\infty$*

$$S(x,f,a)=\frac{1}{\varphi(N)}J(x,F(s,\chi_0))+ +\frac{1}{\varphi(N)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi}(a)J(x,F(s,\chi))+O(x^{1/M}e^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Лемма следует из свойств характеров Дирихле и формулы Перрона для ряда Дирихле с коэффициентами $\chi(f(n))$.

Теперь для получения асимптотических формул нужно изучить свойства функций $F(s,\chi)$ для каждого случая.

Пусть $N=4$. По этому модулю имеется всего два различных характера: χ_0 и χ. Для первого при $\sigma>\frac{1}{2}$ имеем:

$$F(s,\chi_0)=\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{(p,m)=1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}= =\prod_{p|m}\left(1+\frac{1}{p^s}\right)\zeta(2s). \tag{11}$$

Формула (11) показывает, что $F(s,\chi_0)$ имеет в точке $s=\frac{1}{2}$ полюс первого порядка.

Если $2j-1\equiv 3 \pmod 4$, то $\chi(2j-1)=-1$. Поэтому

$$F(s,\chi)=\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{\omega(p)=1}\left(1+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}\prod_{\omega(p)=-1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}.$$

Или иначе:

$$F(s,\chi)=\prod_{p|m}\frac{1-p^{-4s}}{1-p^{-s}}\cdot\frac{\zeta(4s)}{L(2s,\omega)}. \tag{12}$$

Таким образом, $F(s,\chi)$ регулярна и не равна 0 в точке $s=\frac{1}{2}$. Из формул (11) и (12) и п. а) и б) теоремы Б получаем асимптотическую формулу (8).

Пусть $N=2q^k$, $q\geq 5$. Для любого характера χ модуля N имеем:

$$F(s,\chi)=\prod_{p|m}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}\prod_{\omega(p)=1}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\chi(2j+1)}{p^{2js}}\right)\times \times\prod_{\omega(p)=-1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

Рассмотрим произвольный сомножитель с $\omega(p)=1$:

$$1+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\chi(2j+1)}{p^{2js}}=\frac{1}{1-p^{-Ns}}\sum_{j=1}^{q^k}\frac{\chi(2j-1)}{p^{2js}}=$$

$$=\left(1-\frac{\chi(3)}{p^{2s}}\right)^{-1}\left(1-\sum_{j=2}^{q^k}\frac{\chi(2j+1)-\chi(3)\chi(2j-1)}{p^{2js}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{Ns}}\right)^{-1}$$

Таким образом,

$$F(s,\chi)=A(s,\chi)\prod_{\omega(p)=1}\left(1-\frac{\chi(3)}{p^{2s}}\right)^{-1}\prod_{\omega(p)=-1}\left(1-\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1},\qquad(13)$$

где $A(s,\chi)$ аналитична и ограничена при $\sigma\geq\frac{1}{3}$, причем $A(\frac{1}{2},\chi)\neq 0$. В случае главного характера имеем:

$$F(s,\chi_0)=A(s,\chi_0)\prod_{p|m}(1-p^{-2s})\cdot\zeta(2s).$$

Пусть χ — неглавный характер и $a_1,a_2,\ldots,a_r$ — те вычеты по модулю m, для которых $\omega(a_i)=1$, и $b_1,b_2,\ldots,b_r$ — те, для которых $\omega(b_i)=-1$, $r=\varphi(m)/2$. Фиксируя произвольно ветвь логарифма, имеем:

$$\ln F(s,\chi)=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{p\equiv a_i\ (\mathrm{mod}\ m)}\frac{\chi(3)}{p^{2s}}+\sum_{p\equiv b_i\ (\mathrm{mod}\ m)}\frac{1}{p^{2s}}\right)+A_1(s,\chi),$$

где $A_1(s,\chi)$ — ограниченная аналитическая при $\sigma\geq\frac{1}{3}$ функция. Пусть $X(n)$ — произвольный характер модуля m. Тогда

$$\ln F(s,\chi)=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{X\ (\mathrm{mod}\ m)}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}(a_i)\chi(3)+\overline{X}(b_i))\ln\left(1-\frac{X(p)}{p^{2s}}\right)^{-1}+$$

$$+A_2(s,\chi,X),$$

причем $A_2(s,\chi,X)$ — функция с такими же свойствами, как и $A_1(s,\chi)$. Обозначим

$$z(\chi,X)=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{i=1}^{r}(\overline{X}(a_i)\chi(3)+\overline{X}(b_i)).\qquad(14)$$

Теперь получаем нужное нам представление для $F(s,\chi)$:

$$F(s,\chi)=\prod_{X\ (\mathrm{mod}\ m)}\{L(2s,X)\}^{z(\chi,X)}\cdot A_3(s,\chi).\qquad(15)$$

Здесь $A_3(s,\chi)$ — аналитическая ограниченная при $\sigma\geq\frac{1}{3}$ функция, не равная 0 в точке $s=\frac{1}{2}$.

В произведении (15) все сомножители регулярны в точке $s=\frac{1}{2}$, кроме одного — при $X=X_0$. Показатель степени в этом сомножителе, как видно из формулы (14), равен

$$z(\chi,X_0)=\frac{1+\chi(3)}{2}$$

в частности, $z(\chi_0,X_0)=1$. Таким образом, для любого характера χ

$$F(s,\chi)=G(s,\chi)\cdot\left(s-\frac{1}{2}\right)^{(1+\chi(3))/2}\qquad(16)$$

и удовлетворяет условиям теоремы Б в $\Omega(\frac{1}{2})$. Функция $G(s,\chi)$ играет такую же роль, как и $G(s)$ в теореме Б. Применение леммы и теоремы Б приводит к асимптотической формуле (10).

Наконец, пусть $N=q^k$, $q\geq 3$. Тогда

$$F(s,\chi)=\prod_{p|m}(1-p^{-s})^{-1}\prod_{\omega(p)=1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\chi(j+1)}{p^{js}}\prod_{\omega(p)=-1}(1-p^{-2s})^{-1}.$$

Здесь последнее произведение уже представляет собой ограниченную аналитическую при $\sigma\geq\frac{3}{4}$ функцию, не равную 0 в точке $s=1$. Поступая аналогично предыдущему случаю, получим

$$F(s,\chi)=\prod_{X}\{L(s,X)\}^{z(\chi,X)}\cdot B(s,\chi).$$

Здесь $B(s,\chi)$ — аналитическая ограниченная при $\sigma\geq\frac{3}{4}$ функция, не обращающаяся в 0 в точке $s=1$, и

$$z(\chi,X)=\frac{1}{\varphi(m)}\sum_{i=1}^{r}\chi(2)\overline{X}(a_i).$$

Отсюда следует представление, аналогичное формуле (16) предыдущего случая:

$$F(s,\chi) = G(s,\chi)\cdot(s-1)^{-\chi(2)/2}.$$

В частности, $z(\chi_0, X_0) = \frac{1}{2}$. Применение леммы и теоремы Б приводит нас к формуле (9).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для получения формул (9) и (10), краткости ради, мы ограничились лишь главным членом формулы (7) теоремы Б. Но ничто не мешает использовать эту формулу в полную силу для получения асимптотических разложений в формулах (9) и (10).

Литература

1. Narkiewicz W. On distribution of values of multiplicative functions in residue classes // Acta Arithm. 1967. V.12. №3. P. 269–279.

2. Широков Б.М. Распределение значений арифметических функций в классах вычетов // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1983. Т. 121. С. 176–186.

3. Scourfild E. J. On divisibility of $r_2(n)$ // Glasgov Math. J. 1977. V. 18. №1. P. 109–111.

4. Фоменко О. М. Распределение значений мультипликативных функций по простому модулю // Записки науч. семинаров ЛОМИ. 1980. Т. 83. С. 218–224.

5. Narkiewicz W., Rayner F. Distribution of values of $\sigma_2(n)$ in residue classes // Monatshefte für Mathematik. 1982. V. 94. P. 133–141.

СОДЕРЖАНИЕ