Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 3, 1996

УДК 517.547

О СПЕКТРАЛЬНОМ СИНТЕЗЕ В ОДНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

С. С. Платонов

В работе рассматривается некоторое естественное топологическое векторное пространство $\mathcal{F}$, состоящее из всех целых функций $f(z)$, $z = x + iy$, имеющих полиномиальный рост по оси x. Основной результат состоит в доказательстве того, что любое замкнутое подпространство в $\mathcal{F}$, инвариантное относительно дифференцирования, допускает спектральный синтез, т. е. совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в нем функций вида $z^k e^{i\lambda z}$. Получено также полное описание спектров инвариантных подпространств.

Пусть Ω — область в комплексной плоскости C, $\mathcal{F}$ — некоторое топологическое векторное пространство, состоящее из голоморфных в Ω функций и инвариантное относительно дифференцирования. Говорят, что замкнутое, инвариантное относительно дифференцирования линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в нем экспоненциальных одночленов

$$e^{i\lambda z}, \quad ze^{i\lambda z}, \quad \ldots \quad z^k e^{i\lambda z}, \quad \ldots,$$

где $i = \sqrt{-1}$, k пробегает неотрицательные целые значения из промежутка $0 \le k < r(\lambda)$, $r(\lambda) \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}$ (N — множество натуральных чисел). Пусть $\Lambda = \{\lambda \in \mathrm{C} : e^{i\lambda z} \in \mathcal{H}\}$, причем будем считать, что

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95–01–01391.

число λ входит в набор Λ с кратностью $r(\lambda)$ (возможно, бесконечной). Набор Λ называется спектром пространства $\mathcal{H}$. В дальнейшем под подпространством будем понимать *замкнутое линейное подпространство*, а произвольные, вообще говоря, не замкнутые, линейные подпространства будем называть линейными подмножествами.

Описанию подпространств, допускающих спектральный синтез, посвящено много работ (см. обзор [1] и работу [2]). В большинстве из них в качестве $\mathcal{F}$ берется пространство всех голоморфных в Ω функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В настоящей работе рассматривается случай, когда $\Omega = \mathrm{C}$, а пространство $\mathcal{F}$ состоит из всех целых функций $f(z) = f(x+iy)$, имеющих полиномиальный рост по оси x (точное определение пространств и описание топологии в $\mathcal{F}$ см. ниже); доказывается, что любое инвариантное относительно дифференцирования подпространство в $\mathcal{F}$ допускает спектральный синтез, и дается полное описание возможных спектров таких подпространств. Методы работы близки к методам работы [3], где рассматривалось пространство целых функций экспоненциального роста по оси x.

Отметим некоторые обозначения. Помимо стандартных обозначений C, R, Z и N пусть Z_+ — множество неотрицательных целых чисел, $\bar{\mathrm{N}} \cup \{\infty\}$. Символами ◃ и ▹ будем обозначать соответственно начало и конец доказательства.

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество целых функций $f(z)$, $z = x+iy$, которые удовлетворяют следующему условию: существует $k > 0$ такое, что для всякого $l > 0$ функция $f(z)\,(1+x^2)^{-k}$ ограничена в полосе $|y| \le l$. Положим

$$N_{k,l}(f) = \sup_{|y|\le l} |f(x+iy)|(1+x^2)^{-k}.$$

Через $\mathcal{F}_k$ обозначим линейное подмножество в $\mathcal{F}$, состоящее из функций f, для которых $N_{k,l}(f) < \infty$ при фиксированном k и любом $l > 0$. Оно снабжается топологией, порожденной семейством полунорм (даже норм) $N_{k,l}$ при всевозможных $l > 0$, и становится локально выпуклым пространством (ЛВП). Пространство

$$\mathcal{F} = \bigcup_{k>0} \mathcal{F}_k$$

снабжается топологией индуктивного предела ЛВП $\mathcal{F}_k$.

Введем еще пространство $\mathcal{F}_{k,l}$, состоящее из функций $f(z)$, голоморфных в полосе $|y| < l$, непрерывных в полосе $|y| \le l$ и таких, что $N_{k,l}(f) < \infty$. Пространство $\mathcal{F}_{k,l}$ является банаховым пространством (БП) относительно нормы $N_{k,l}$. Для подпространства $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_k$ обозначим через $\mathcal{H}_k$ линейное подмножество $\mathcal{H} \cap \mathcal{F}_k$, а через $\mathcal{H}_{k,l}$ — замыкание $\mathcal{H}_k$ в $\mathcal{F}_{k,l}$. Ясно, что $\mathcal{H}_k$ — замкнутое подпространство в $\mathcal{F}_k$.

Лемма 1.

$$\mathcal{H}_k = \bigcap_{l>0} \mathcal{H}_{k,l}.$$

◁ Пусть

$$f \in \bigcap_{l>0} \mathcal{H}_{k,l},$$

тогда $f \in \mathcal{F}_k$ и найдется последовательность функций $f_n \in \mathcal{H}_k$, для которых $N_{k,n}(f - f_n) < \frac{1}{n}$. При фиксированном $l > 0$ и $n \ge l$

$$N_{k,l}(f - f_n) \le N_{k,n}(f - f_n) < 1/n.$$

Следовательно, $N_{k,l}(f - f_n) \to 0$ и $f_n \to f$ в БП $\mathcal{F}_k$. Из замкнутости $\mathcal{H}_k$ следует, что $f \in \mathcal{H}_k$. ▷

Отметим очевидное неравенство

$$1 + (t+s)^2 < 2(1+t^2)(1+s^2) \qquad \forall t, s \in \mathrm{R}. \tag{1}$$

Из него следует, что

$$(1+t^2)^{-k} < 2^k \big(1+s^2\big)^k \big(1+(t+s)^2\big)^{-k} \qquad \forall k > 0. \tag{2}$$

Проверим, что пространство $\mathcal{F}$ инвариантно относительно дифференцирования. Пусть $f \in \mathcal{F}_k$. По теореме Коши $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

где в качестве контура C берется окружность радиусом 1 с центром в точке z. Тогда

$$|f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{|f(w)|}{|w - z|^2}\, d|w| \le \sup_{|z-w|=1} |f(w)|.$$

Проверим, что $f'(z) \in \mathcal{F}_k$:

$$\begin{gathered}
N_{k,l}\left(f'(z)\right) = \sup_{|y|\le l} |f'(x+iy)|\,(1+x^2)^{-k} \le \\
\le \sup_{|y|\le l} \sup_{|w-z|=1} |f(w)|(1+x^2)^{-k} \le \\
\le \sup_{|v|\le l+1} |f(u+iv)|\,\left(1+(u-1)^2\right)^{-k} \le \\
\le \sup_{|v|\le l+1} |f(u+iv)|\,4^k(1+u^2)^{-k} = 4^k\,N_{k,l+1}(f) < \infty,
\end{gathered} \tag{3}$$

где $w = u + iv$. При оценке мы воспользовались тем, что $|v| \le l+1$, $x \ge u-1$ и неравенством (2). Из (3) следует также, что оператор дифференцирования непрерывен в $\mathcal{F}$.

Лемма 2. *Если подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ инвариантно относительно дифференцирования, то $\mathcal{H}$ инвариантно относительно сдвигов на действительные числа, т. е. из $f(z) \in \mathcal{H}$ следует, что $f(z+t) \in \mathcal{H}$ для любого $t \in R$.*

$\triangleleft$ Пусть $f \in \mathcal{H}_k$. Проверим, что $f(z+t) \in \mathcal{H}_{k,l}$ при любом $l > 0$. Разложим $f(z+t)$ в ряд Тейлора

$$f(z+t) = f(z) + f'(z)t + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(z)t^n + \ldots. \tag{4}$$

Рассуждая как при выводе неравенства (3), получим оценку

$$N_{k,l}(F^{(n)}) \le n!\,4^k N_{k,l+1}(f).$$

Следовательно, ряд (4) сходится по норме $N_{k,l}$ при $|t| < 1/4$. Поэтому $f(z+t) \in \mathcal{H}_{k,l}$ при $|t| < 1/4$.

Проверим, что оператор сдвига $S_t : f(z) \to f(z+t)$, $t \in \mathrm{R}$, является непрерывным оператором в $\mathcal{F}_{k,l}$. Действительно, используя (2), получаем

$$\begin{gathered}
N_{k,l}(h(z+t)) = \sup_{|y|\le l} |h(x+t+iy)|\,(1+x^2)^{-k} \le \\
\le 2^k(1+t^2)^k \sup_{|y|\le l} |h(x+t+iy)|\left(1+(x+t)^2\right)^{-k} = \\
= 2^k(1+t^2)^k\,N_{k,l}(h(z)).
\end{gathered} \tag{5}$$

Из непрерывности S_t и того, что в $\mathcal{H}_{k,l}$ функции из $\mathcal{H}_k$ образуют плотное подмножество, следует, что $\mathcal{H}_{k,l}$ инвариантно относительно S_t при $|t| < 1/4$. Но $S_{t_1+t_2} = S_{t_1} S_{t_2}$, поэтому $\mathcal{H}_{k,l}$ инвариантно относительно S_t при любом $t \in$ R. Следовательно, $f(z+t) \in \mathcal{H}_{k,l}$ при любом $l > 0$. Тогда по лемме 1 $f(z+t) \in \mathcal{H}_k$, что и требовалось доказать. ▹

Приведем некоторые сведения из теории обобщенных функций (см., например, [4]), которые будут необходимы в дальнейшем. Пусть $\mathcal{S}$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$ на R, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топологию в $\mathcal{S}$ можно задать счетной системой норм

$$\|\varphi\|_p = \sum_{0\le\alpha\le p} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+x^2)^p |\varphi^{(\alpha)}(x)|, \quad p = 0, 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что

$$\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le \cdots .$$

Из неравенства (1) легко получить, что

$$\|\varphi(x+t)\|_p \le 2^p (1+t^2)^p \|\varphi(x)\|_p \quad \forall t \in \mathrm{R}. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathcal{S}_p$ пополнение пространства $\mathcal{S}$ по норме $\|\cdot\|_p$; тогда $\mathcal{S}_p$ — банахово пространство. Следующая лемма дает точную характеристику функций из $\mathcal{S}_p$.

Лемма 3. *Для того чтобы $\varphi \in \mathcal{S}_p$, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi \in C^p(R)$ и $|x|^{2p}\varphi^{(\alpha)}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $\alpha = 0, 1, \ldots p$.*

◃ См. [4, с.91]. ▹

Обобщенной функцией медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{S}$. Множество $\mathcal{S}'$ всех обобщенных функций медленного роста, снабженное слабой топологией, является полным ЛВП. Известно (см. [4, с.94, следств. 1]), что всякая обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$ имеет конечный порядок, т. е. допускает продолжение как линейный непрерывный функционал на банахово пространство $\mathcal{S}_m$ при некотором $m \in \mathrm{Z}_+$. В этом случае будем писать, что $f \in \mathcal{S}'_m$ и m называется порядком f. Обозначим через $\|f\|_{-m}$ норму функционала f на БП $\mathcal{S}_m$.

Значение функционала f на функции φ будем обозначать $< f, \varphi >$. Оператор сдвига S_t распространяется на $\mathcal{S}'$, если положить

$$< S_t f, \varphi > := < f, S_{-t}\varphi > .$$

Если $f \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$, то свертка функций $f * \varphi$ определяется формулой

$$(f * \varphi)(t) :=< f, S_{-t}\varphi^* >, \tag{7}$$

где $\varphi^*(x) = \varphi(-x)$. Отметим, что свертку можно также записать в виде

$$(f * \varphi)(t) =< S_t f, \varphi^* >, \tag{8}$$

а если $f(x)$ интегрируемая на R функция, растущая не быстрее некоторой степени x, то

$$(f * \varphi)(t) = \int f(t - x)\varphi(x)\, dx.$$

Если не указаны пределы интегрирования, то интегралы берутся по R.

Лемма 4. *Если $f \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$, то свертка $f * \varphi$ существует, $f * \varphi \in C^\infty(R)$ и при $f \in \mathcal{S}'_m$ справедливо неравенство*

$$\left|(f * \varphi)^{(\alpha)}(t)\right| \leq \|f\|_{-m}(1 + t^2)^m \|\varphi\|_{m+\alpha} \quad \forall t \in R, \alpha \in Z_+. \tag{9}$$

$\triangleleft$ См. [4, с. 101]. $\triangleright$

Отметим также, что справедливо равенство

$$(f * \varphi)^{(\alpha)} = f * (\varphi^{(\alpha)}), \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Из неравенства (9) легко получить, что при фиксированном $f \in \mathcal{S}'_m$ свертка $f * \varphi$ продолжается по непрерывности на $\varphi \in \mathcal{S}_{m+p}$, $p \in \mathrm{Z}_+$. При этом $f * \varphi \in C^p(\mathrm{R})$ и справедливо неравенство (9) при $\alpha = 0, 1, \ldots p$.

Для всякой функции $f(z) \in \mathcal{F}$ ее ограничение $f(x)$ на действительную ось принадлежит пространству $\mathcal{S}'$. Поэтому можно считать, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}'$; легко видеть, что это вложение непрерывно.

Подпространство H в $\mathcal{S}'$ (или в любом другом топологическом векторном пространстве, состоящем из функций на R) будем называть инвариантным относительно сдвигов или просто инвариантным подпространством (сокращенно ИПП), если из $f \in H$ следует, что $S_t f \in H$ для любого $t \in \mathrm{R}$. В частности, если $\mathcal{H}$ — ИПП в $\mathcal{F}$, то это означает, что $\mathcal{H}$ инвариантно относительно сдвигов на действительные числа.

Теорема 1. *Инвариантные относительно сдвигов подпространства в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}'$ находятся во взаимно однозначном соответствии, которое получается сопоставлением ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ его замыкания $H = [\mathcal{H}]$ в $\mathcal{S}'$. Это же соответствие может быть получено сопоставлением ИПП $H \subseteq \mathcal{S}'$ подпространства $\mathcal{H} = H \cap \mathcal{F}$.*

Предварительно докажем несколько лемм. Пусть

$$\varphi_k(z) = A_k \left(\frac{\sin z}{z}\right)^{2k+2},$$

где числовой множитель A_k подбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\int \varphi_k(x)\,dx = 1. \tag{11}$$

Лемма 5. *При любом фиксированном y функция $\varphi_k(x+iy)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}_k$ и справедлива оценка*

$$\|\varphi_k(x+iy)\|_k \le C(\operatorname{ch} y)^{2k+2}, \tag{12}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от k.

◁ Очевидно, что $\varphi_k(z) \in C^\infty$ и даже более того $\varphi(z)$ — целая функция. Заметим, что $|\sin z|^2 \le 2\operatorname{ch}^2 y$, $|z|^2 = x^2 + y^2$. Следовательно,

$$|x|^{2k}|\varphi_k(x+iy)| \le A_k 2^{k+1}(\operatorname{ch} y)^{2k+2}\frac{x^{2k}}{(x^2+y^2)^{2k+2}} \to 0$$

при $|x| \to \infty$. Аналогично проверяется, что

$$|x|^{2k}\varphi^{(\alpha)}(x+iy) \to 0$$

при $|x| \to \infty$ и при любом $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$. Из приведенных оценок легко получается и неравенство (12). ▷

Лемма 6. *Если $f \in \mathcal{S}'_m, k \ge m+1$, то свертка $f * \varphi_k$ принадлежит пространству $\mathcal{F}_k$. Отображение $f \to f * \varphi_k$ из $\mathcal{S}'_m$ в $\mathcal{F}_k$ непрерывно.*

◁ Из леммы 5 следует, что свертка $f * \varphi_k(x)$ продолжается на комплексные значения $z = x + iy$. Так как $\varphi_k(z)$ — целая аналитическая функция, то и $f * \varphi_k(z)$ — целая аналитическая функция (действительно, так как $\varphi_k \in \mathcal{S}_{m+1}$, то функция $f * \varphi_k(z)$ непрерывно дифференцируемая и, кроме того, удовлетворяет условиям Коши — Римана).

Пользуясь неравенствами (9) и (12) получим

$$|f * \varphi_k(x+iy)| \le \|f\|_{-m}(1+x^2)^m \|\varphi_k\|_m \le \\ \le \|f\|_{-m}(1+x^2)^m \|\varphi_k\|_k \le C\,\|f\|_{-m}(\operatorname{ch} y)^{2k+2}(1+x^2)^m.$$

Следовательно, $f * \varphi_k \in \mathcal{F}_k$ и справедливо неравенство

$$N_{k,l}(f * \varphi_k) \le C\,\|f\|_{-m}(\operatorname{ch} l)^{2k+2},$$

из которого следует непрерывность отображения $f \to f * \varphi_k$ из $\mathcal{S}'_m$ в $\mathcal{F}_k$. ▷

Определим еще функции

$$\varphi_{k,n}(z) := n\varphi_k(nz). \tag{13}$$

Рассуждая как выше, получим, что

$$\|\varphi_{n,k}(x+iy)\|_k \le C_1(\operatorname{ch} ny)^{2k+2} \tag{14}$$

и

$$N_{k,l}(f * \varphi_{k,n}) \le C_2 \|f\|_{-m}(\operatorname{ch} nl)^{2k+2}, \tag{15}$$

где $C_1, C_2 > 0$ — постоянные, зависящие от k, n.

Лемма 7. *(а) Пусть $\mathcal{H}$ — ИПП в $\mathcal{F}$ и $h(z) \in \mathcal{H}_m := \mathcal{H} \cap \mathcal{F}_m$. Тогда при $k \ge m+1$ и любом $n \in Z_+$*

$$h * \varphi_{k,n} \in \mathcal{H}_m.$$

(б) Пусть H — ИПП в $\mathcal{S}'$ и $f \in H_m := H \cap \mathcal{S}'_m$. Тогда существует номер $k_0 = k_0(f)$ такой, что при $k \ge k_0$ и $n \in Z_+$

$$f * \varphi_{k,n} \in H_k.$$

◁ (а) Свертку $h * \varphi_{k,n}$ можно записать в виде

$$h * \varphi_{k,n}(x) = \int h(x-t)\,\varphi_{k,n}(t)\,dt.$$

Продолжим ее на комплексные значения переменной, полагая при $z = x + iy$

$$h * \varphi_{k,n}(z) = \int h(z-t)\,\varphi_{k,n}(t)\,dt. \tag{16}$$

Интеграл сходится, так как $h \in \mathcal{F}_m$ и $\varphi_{k,n} \in \mathcal{S}_{m+1}$.

Функцию $h(z-t)$ можно рассматривать как вектор-функцию параметра t со значениями в БП $\mathcal{F}_m$. Проверим, что эта вектор-функция непрерывна. Для этого воспользуемся неравенством

$$|h(z-t_1) - h(z-t_2)| = |\int_{t_1}^{t_2} h'(z-\tau)\,d\tau \leq$$
$$\leq (t_1 - t_2) \sup_{t_1 \tau \leq t_2} |h'(z-\tau)|,$$

которое справедливо при любых $t_1 \leq t_2$. Тогда

$$N_{m,l}(h(z-t_1) - h(z-t_2)) \leq$$
$$\leq \sup_{|y|\leq l} \sup_{t_1 \leq \tau \leq t_2} (t_2 - t_1)|h'(x+iy-\tau)|\,(1+x^2)^{-m} \leq$$
$$\leq 2^m (t_2 - t_1) \sup_{\substack{|y|\leq l \\ t_1 \leq \tau \leq t_2}} |h'(x+iy-\tau)|\,\left(1+(x-\tau)^2\right)^{-m}(1+\tau^2)^m \leq$$
$$\leq 2^m (t_2-t_1)(1+t_1^2+t_2^2)^m N_{m,l}\,(h'(z)) \leq$$
$$\leq 8^m (t_2-t_1)(1+t_1^2+t_2^2)^m N_{m,l+1}(h). \tag{17}$$

В этих оценках были использованы неравенства (2), (3) и очевидное неравенство $1+\tau^2 \leq 1+t_1^2+t_2^2$. Из (12) следует, что $h(z-t)$ непрерывно зависит от t. Тогда правую часть в формуле (16) можно рассматривать как несобственный интеграл Римана от вектор-функции со значениями в $\mathcal{F}_m$. Из неравенства (5) следует, что этот интеграл сходится. Следовательно, в топологии пространства $\mathcal{F}_m$

$$h * \varphi_{k,n}(z) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} h(z-t)\,\varphi_{k,n}(t)\,dt,$$

а интеграл в правой части является пределом интегральных сумм

$$\sum h(z-t_j)\,\varphi_{k,n}(t_j)\,\Delta t_j,$$

которые принадлежат $\mathcal{H}_m$. Тогда и $h * \varphi_{k,n} \in \mathcal{H}_m$.

(б) Пусть $f \in H_m = H \cap \mathcal{S}'_m$. Тогда функция f принадлежит и всем пространствам $\mathcal{S}'_p$ при $p \geq m$. Заметим, что для любой функции $f \in \mathcal{S}'_p$ справедливо неравенство

$$\|S_t f\|_{-p} \leq 2^p (1+t^2)^p \|f\|_{-p}, \tag{18}$$

которое следует из неравенства (6).

Известно, что подмножество $\mathcal{D}$ гладких (класса C^∞) функций с компактным носителем всюду плотно в $\mathcal{S}'$. Поэтому найдется последовательность $f_\alpha \in \mathcal{D}$, сходящаяся к f в пространстве $\mathcal{S}'$. Так как $f_\alpha \to f$ в $\mathcal{S}'$, то известно (см. [4, с.94, следств. 2]), что найдется такое число $p \in \mathrm{N}$, что $f_\alpha \to f$ в пространстве $\mathcal{S}'_p$, т. е. по норме $\|\cdot\|_{-p}$. Подберем функцию $g = f_\alpha \in \mathcal{D}$ такую, что $\|f - g\|_{-p} < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{gathered}\|S_{t_1}f - S_{t_2}f\|_{-p} \leq \\ \leq \|S_{t_1}f - S_{t_2}g\|_{-p} + \|S_{t_1}g - S_{t_2}g\|_{-p} + \|S_{t_2}g - S_{t_2}f\|_{-p} \leq \\ \leq 2^p(1+t_1^2)^p\varepsilon + \|S_{t_1}g - S_{t_2}g\|_{-p} + 2^p(1+t_2^2)^p\varepsilon.\end{gathered}$$

При $|t_1 - t_2|$ достаточно малом можно добиться того, чтобы $\|S_{t_1}g - S_{t_2}g\| < \varepsilon$. В этом случае

$$\|S_{t_1}f - S_{t_2}f\|_{-p} < \varepsilon\left(2^p(1+t_1^2)^p + 2^p(1+t_2^2)^p + 1\right), \tag{19}$$

откуда следует непрерывность отображения $t \to S_t f$ из R в $\mathcal{S}'_p$.

Возьмем $k_0 = p+1$. При $k \geq k_0$ свертку $f * \varphi_{k,n}$ можно представить в виде

$$f * \varphi_{k,n} = \int (S_{-t}f)\,\varphi_{k,n}(t)\,dt,$$

где в правой части стоит несобственный интеграл Римана от вектор-функции со значениями в БП $\mathcal{S}'_k$. Из (18) следует, что этот интеграл сходится. Остальная часть доказательства получается повторением соответствующих рассуждений пункта (а). ▹

Лемма 8. *(а) Если $h \in \mathcal{F}_m$, $k \geq m+1$, то $h * \varphi_{k,n} \to h$ при $n \to \infty$ в топологии БП $\mathcal{F}_k$.*

(б) Если $f \in \mathcal{S}'_m$, $k \geq k_0(f)$ (число $k_0(f)$ берется из леммы 7), то $f * \varphi_{k,n} \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{S}'_k$.

◃ (а) Проверим, что $N_{k,l}(h * \varphi_{k,n} - h) \to 0$ при любом $l > 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Из неравенства (17) следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $N_{k,l}(h(z-t) - h(z)) < \varepsilon/3$ при $|t| < \delta$. Так как $\int \varphi_{k,n}(t)\,dt = 1$ и $\varphi_{k,n}(t) \geq 0$, то

$$N_{k,l}(h * \varphi_{k,n} - h) = N_{k,l}\left(\int (h(z-t) - h(z))\,\varphi_{k,n}(t)\,dt\right) \leq$$

$$\leq \int N_{k,n}\big(h(z-t)-h(z)\big)\varphi_{k,n}(t)\,dt.$$

Так как $N_{k,l}(h(z-t)-h(z)) \leq (2^k(1+t^2)^k+1)N_{k,l}(f)$, а $\varphi_{k,n}(t) = n\,A_k(\sin nt/nt)^{2k+2}$, то при достаточно больших n справедливо неравенство

$$\int\limits_{|t|>\delta} N_{k,l}(h(z-t)-h(z))\,\varphi_{k,n}(t)\,dt < 2\varepsilon/3.$$

Поэтому

$$N_{k,l}(h*\varphi_{k,n}-h) \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \int_{-\delta}^{\delta} N_{k,l}(h(z-t)-h(t))\,\varphi_{k,n}(t)\,dt \leq$$
$$\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}\int_{-\delta}^{\delta} \leq \varepsilon.$$

Доказательство пункта (б) получается повторением доказательства пункта (а) с заменой $h(z)$ на $f(x)$, $N_{k,l}$ на $\|\cdot\|_{-k}$, неравенств (17) и (5) на (19) и (18). $\triangleright$

Доказательство теоремы 1. $\triangleleft$ Сопоставим каждому ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ его замыкание $H = [\mathcal{H}]$ в $\mathcal{S}'$. Проверим, что соответствие $\mathcal{H} \to [\mathcal{H}]$ сюръективно и инективно.

(А) Пусть H — произвольное ИПП в $\mathcal{S}'$, $\mathcal{H} = H \cap \mathcal{F}$. Проверим, что $[\mathcal{H}] = H$. Действительно, если $f \in H_m = H \cap \mathcal{S}'_m$, то по леммам 6, 7 и 8 функции $f*\varphi_{k,n} \in \mathcal{H}$ и $f*\varphi_{k,n} \to f$ в пространстве $\mathcal{S}'$ при $n \to \infty$. Следовательно, $f \in [\mathcal{H}]$ и $H_m \subseteq [\mathcal{H}]$. Так как $H = \cup H_m$, то и $H \subseteq [\mathcal{H}]$. Обратное включение $[\mathcal{H}] \subseteq H$ очевидно, следовательно, $H = [\mathcal{H}]$.

(Б) Теперь пусть $\mathcal{H}$ — произвольное ИПП в $\mathcal{F}$, $H = [\mathcal{H}]$. Тогда H — ИПП в $\mathcal{S}'$. Проверим, что $H \cap \mathcal{F} = \mathcal{H}$. Если $h \in H \cap \mathcal{F}_m$, то $h_\alpha \to h$ в $\mathcal{S}'$ для некоторой последовательности $h_\alpha \in \mathcal{H}$. Тогда найдется $p \in \mathrm{N}$ такое, что все функции $h_\alpha, h \in \mathcal{S}'_p$ и $h_\alpha \to h$ в БП $\mathcal{S}'_p$. По лемме 6 при $k \geq p+1$ функции $h_\alpha * \varphi_{k,n}$ и $h*\varphi_{k,n}$ принадлежат $\mathcal{F}_k$ и $h_\alpha*\varphi_{k,n} \to h*\varphi_{k,n}$ в пространстве $\mathcal{F}_k$ при $\alpha \to \infty$. Так как $h_\alpha*\varphi_{k,n} \in \mathcal{H}_k$ (лемма 7), то и предел $h*\varphi_{k,n} \in \mathcal{H}_k$. Наконец, так как по лемме 8 (пункт (а)) $h*\varphi_{k,n} \to h$ в $\mathcal{F}$ при $n \to \infty$, то и $h \in \mathcal{H}$.

(В) Если $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$ — ИПП в $\mathcal{F}$, то различны и их замыкания $H_1 = [\mathcal{H}_1]$ и $H_2 = [\mathcal{H}_2]$ в $\mathcal{S}'$ (так как $\mathcal{H}_1 = H_1 \cap \mathcal{F} \neq \mathcal{H}_2 = H_2 \cap \mathcal{F}$). С учетом пункта (А) отсюда следует, что соответствие $\mathcal{H} \to h = [\mathcal{H}]$

является биекцией между ИПП в $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}'$, что и доказывает теорему 1. ▷

Из теоремы 1 и леммы 2 следует, что для описания подпространств в $\mathcal{F}$, инвариантных относительно дифференцирования, достаточно описать инвариантные относительно сдвигов подпространства в $\mathcal{S}'$. Инвариантные относительно сдвигов подпространства в $\mathcal{S}'$ и двойственном пространстве $\mathcal{S}$ находятся во взаимно однозначном соответствии по ортодополнительности $\mathcal{S}' \supseteq H \leftrightarrow H^{\perp} \subseteq \mathcal{S}$, где

$$H^{\perp} = \{\varphi \in \mathcal{S} :< f, \varphi >= 0 \quad \forall f \in H\}.$$

Лемма 9. *Пространство $\mathcal{S}$ является топологической алгеброй относительно свертки. Замкнутое подпространство $P \subseteq \mathcal{S}$ инвариантно относительно сдвигов тогда и только тогда, когда P является замкнутым идеалом в $\mathcal{S}$.*

◁ Пусть $f, g \in \mathcal{S}_p$. Проверим, что $f * g \in \mathcal{S}$. Ясно, что $f * g \in C^{\infty}$. Пусть $p, \alpha \in \mathrm{Z}_+$ и $\alpha \le p$. Используя неравенство (1), получим оценку

$$\begin{aligned}(1+x^2)^p|(f*g)^{(\alpha)}(x)| &\le (1+x^2)^p \int |f^{(\alpha)}(x-t)\, g(t)|\, dt \le \\ &\le 2^p \int |f^{(\alpha)}(x-t)|(1+(x-t)^2)^p|g(t)|\,(1+t^2)^p\, dt \le \\ &\le 2^p\|f\|_p \int |g(t)|(1+t^2)^p\, dt \le C\|f\|_p\|g\|_{p+1},\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$C = 2^p \int (1+t^2)^{-1}\, dt = \pi 2^p.$$

С учетом того, что $\|f\|_p \le \|f\|_{p+1}$, из (20) следует неравенство

$$\|f*g\|_p \le C_1\, \|f\|_{p+1}\|g\|_{p+1}, \tag{21}$$

где C_1 — не зависящая от f, g постоянная. Из (21) следует, что $f*g \in \mathcal{S}$ и непрерывно зависит от f и g.

Если подпространство $P \subseteq \mathcal{S}$ инвариантно относительно сдвигов, то, рассуждая как в лемме 7, убеждаемся, что P выдерживает свертки с любыми функциями из $\mathcal{S}$, т. е. P является идеалом в $\mathcal{S}$.

Обратно, пусть P — замкнутый идеал в $\mathcal{S}$. Последовательность функций $\varphi_n(x) \in \mathcal{D}$ называется δ-образной, если выполняются следующие условия:

1) $\varphi_n(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathrm{R}$;
2) $\int \varphi_n(x)\, dx = 1$;
3) для любого $\varepsilon > 0$ носители функций $\varphi_n(x)$ при достаточно больших n принадлежат интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

Стандартной проверкой (см., например, [5, с.20–22]) показывается, что $f * \varphi_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ в пространстве $\mathcal{S}$ для любой функции $f \in \mathcal{S}$. Если $f \in P$, то

$$S_t(f * \varphi_n) = f * S_t\varphi_n \to S_t f, \qquad t \in \mathrm{R}.$$

Так как $f * S_t\varphi_n \in P$, то и $S_t f \in P$, т. е. P инвариантно относительно сдвигов. $\triangleright$

Пространство $\mathcal{S}$ является также топологической алгеброй относительного поточечного умножения функций. Чтобы различать, будем обозначать $\mathcal{S}_{mult}$ пространство $\mathcal{S}$ как алгебру относительно поточечного умножения и $\mathcal{S}_{conv}$ пространство $\mathcal{S}$ как алгебру относительно свертки.

Лемма 10. *Преобразование Фурье*

$$\Phi : f(x) \to \hat{f}(t) = \int f(x)\, e^{itx}\, dx$$

является изоморфизмом топологической алгебры $\mathcal{S}_{conv}$ на топологическую алгебру $\mathcal{S}_{mult}$.

$\triangleleft$ Доказательство сразу следует из обычных свойств преобразования Фурье. $\triangleright$

Соответствие

$$H \leftrightarrow H^{\perp} \leftrightarrow \Phi(H^{\perp}) = \mathcal{I}$$

устанавливает биекцию между ИПП в $\mathcal{S}'$ и замкнутыми идеалами в $\mathcal{S}_{mult}$. Известно, что любой замкнутый идеал в $\mathcal{S}_{mult}$ локализуем (см. [6,гл. VII, п.3] или [7]) даже для более общего случая $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathrm{R}^n)$. При $n = 1$ локализуемость замкнутого идеала $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}_{mult}$ означает, что $\mathcal{I}$ однозначно определяется своими нулями (с кратностями). Более точно, точка $x \in \mathrm{R}$ называется нулем идеала $\mathcal{I}$, если $f(x) = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{I}$. Кратностью нуля x называется наименьшее натуральное число $r = r(x)$ такое, что $f^{(r)}(x) \neq 0$ для некоторой функции $f \in \mathcal{I}$. Если $f^{(\alpha)}(x) = 0$ для всех $f \in \mathcal{I}, \alpha \in \mathrm{N}$, то x называется нулем бесконечной кратности и в этом случае полагаем $r(x) = \infty$. Пусть

$\Lambda = \Lambda(\mathcal{I})$ — множество всех нулей идеала $\mathcal{I}$, причем каждый нуль x берется с кратностью $r(x)$. Два замкнутых идеала в $\mathcal{S}_{mult}$ совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их множества нулей (с кратностями).

Теорема 2. *Пусть H — ИПП в $\mathcal{S}'$, $\mathcal{I}$ — соответствующий подпространству H по соответствию (22) идеал в $\mathcal{S}_{mult}$, Λ — множество нулей идеала $\mathcal{I}$. Тогда подпространство H совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в нем экспоненциальных одночленов $x^k e^{i\lambda x}$, причем $x^k e^{i\lambda x} \in H$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Lambda$ и $k < r(\lambda)$.*

$\lhd$ Функция $x^k e^{i\lambda x} \in H$ тогда и только тогда, когда она ортогональна подпространству $H^{\perp} \subseteq \mathcal{S}$, т. е.

$$\int x^k e^{i\lambda x} f(x)\, dx = 0 \qquad \forall f \in H^{\perp}.$$

Последнее равенство эквивалентно тому, что

$$\hat{f}^{(k)}(\lambda) = 0 \qquad \forall \hat{f} \in \mathcal{I}$$

или λ — нуль идеала $\mathcal{I}$ кратности больше k.

Пусть H_1 — замыкание в $\mathcal{S}'$ линейной оболочки всех функций $x^k e^{i\lambda x}$ при $\lambda \in \Lambda$, $k < r(\lambda)$. Тогда H_1 — ИПП в $\mathcal{S}'$, $H_1 \subseteq H$ и подпространству H_1 соответствует идеал $\mathcal{I}_1$ в $\mathcal{S}_{mult}$ с тем же множеством нулей, что и у идеала $\mathcal{I}$. Следовательно, $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$ и $H_1 = H$. $\rhd$

Теорема 3. *Любое инвариантное относительно дифференцирования подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.*

$\lhd$ Так как $\mathcal{H}$ инвариантно относительно дифференцирования, то по лемме 2 $\mathcal{H}$ инвариантно относительно сдвигов на действительные числа (т. е. $\mathcal{H}$ — ИПП в $\mathcal{F}$). Пусть $H = [\mathcal{H}]$ — замыкание в $\mathcal{S}'$. Тогда H — ИПП в $\mathcal{S}'$ и по теореме 2 H совпадает с замыканием линейной оболочки функций $x^k e^{i\lambda x}$ при $\lambda \in \Lambda$, $k < r(\lambda)$. Пусть $\mathcal{H}_1$ — замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки этих функций. Очевидно, что $\mathcal{H}_1$ — ИПП в $\mathcal{F}$ и его замыкание $[\mathcal{H}_1]$ совпадает с H. Тогда по теореме 1 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$. $\rhd$

Следствие. *Для подпространства $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{H}$ инвариантно относительно дифференцирования;

2) $\mathcal{H}$ инвариантно относительно сдвигов на действительные числа;

3) $\mathcal{H}$ инвариантно относительно сдвигов на любые комплексные числа.

$\triangleleft$ Из 1) следует 2) по лемме 2. Из 2) по теореме 3 следует, что $\mathcal{H}$ совпадает с линейной оболочкой функции $z^k e^{i\lambda z}$. При сдвиге на любое комплексное число линейная оболочка этих функций переходит в себя, откуда следует 3). Наконец из 3) следует 1), так как дифференцирование является непрерывным оператором в $\mathcal{F}$ и линейная оболочка функций $z^k e^{i\lambda z}$ инвариантна относительно дифференцирования. $\triangleright$

Следствие. *Для того чтобы подмножество $\Lambda \subseteq R$ было спектром некоторого ИПП в $\mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы Λ было множеством нулей некоторого идеала $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}_{mult}$.*

Следствие 2 дает нам некоторое описание всевозможных спектров ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, но можно получить и более явное описание этих спектров.

Пусть Λ — произвольное подмножество действительных чисел, причем каждое число $\lambda \in \Lambda$ входит в Λ с некоторой кратностью $r(\lambda)$, возможно, бесконечной. Пусть

$$\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda : r(\lambda) = k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Теорема 4. *Для того чтобы подмножество Λ было спектром некоторого ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*
1) подмножество Λ_∞ замкнуто в R;
2) подмножество $\Lambda_{fin} := \Lambda \setminus \Lambda_\infty$ не более чем счетное, причем все предельные точки этого множества (если они существуют) принадлежат множеству Λ_∞.

Замечание. По следствию 2 теорема 4 дает также необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество Λ было множеством нулей некоторого идеала $I \subset S_{mult}$. Эти условия приведены без доказательства в работе В.Ф.Молчанова [8], где только сказано, что они следуют из результатов работы [9]. Далее приводится подробное доказательство теоремы 4.

Предварительно докажем несколько лемм. Будем говорить, что функция $f(x) \in \mathcal{S}(a,b)$, если $f \in C^\infty(a,b)$, и функция

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b), \end{cases} \tag{22}$$

принадлежит пространству $\mathcal{S}$. В частности, $\mathcal{S}(-\infty,\infty) = \mathcal{S}$. В дальнейшем будем всегда считать, что функции из $\mathcal{S}(a,b)$ принимают нулевые значения при $x \notin (a,b)$ (т. е. f отождествляется с $\tilde{f}$).

Введем функции

$$\gamma(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \psi_{(a,b)}(x) = \gamma(x-a)\,\gamma(b-x), & a, b \in \mathrm{R}, \\ \psi_{(-\infty,b)}(x) := \mathrm{e}^{-x^2}\gamma(b-x), & b \in \mathrm{R}, \\ \psi_{(a,+\infty)}(x) := \gamma(x-a)\mathrm{e}^{-x^2}, & a \in \mathrm{R}, \\ \psi_{(-\infty,+\infty)} := \mathrm{e}^{-x^2}. & \end{array}$$

Очевидно, что $\gamma \in \mathcal{S}(0,+\infty)$, $\psi_{(a,b)} \in \mathcal{S}(a,b)$ $\forall a, b \in \mathrm{R} \cup \{\infty\}$.

Лемма 11. *Для любой функции $f \in C^\infty(a,b)$ существует функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}(a,b)$ такая, что*
1) $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$;
2) $\varphi(x)\, f(x) \in \mathcal{S}(a,b)$.

$\triangleleft$ Возьмем любую последовательность вложенных в (a,b) конечных интервалов (a_k,b_k), $k = 1,2,\ldots$, такую, что $[a_k,b_k] \subset (a_{k+1},b_{k+1})$, $a_k \to a$, $b_k \to b$. Пусть $a_0 = b_0$ — произвольная точка из интервала (a_1,b_1), и дополнительно пусть $a_{-1} := b_1$, $b_{-1} := a_1$.

Определим последовательность функций

$$\varphi_k(x) := \psi_{(b_{k-1},b_{k+1})} + \psi_{(a_{k+1},a_{k-1})}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

и числа

$$\alpha_k^{-1} := \max_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ j,r,s=0,1,\ldots k}} \left\{ |\varphi_k^{(j)}(x)|(|f^{(r)}(x)|+1) \right\} (1+x^2)^s.$$

Функцию $\varphi(x)$ определим как сумму ряда

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\alpha_k\varphi_k(x). \tag{23}$$

Очевидно, что при $k \ge j$

$$|\varphi_k^{(j)}(x)| \le \alpha_k^{-1},$$

отсюда

$$|2^{-k}\alpha_k\varphi_k^{(j)}(x)| \le 2^{-k}.$$

Следовательно, ряд (23) равномерно сходится вместе со всеми производными. Поэтому $\varphi \in C^\infty(\mathrm{R})$. Очевидно, что $\varphi(x) > 0$ при $x \in (a,b)$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \notin (a,b)$, следовательно, $\varphi \in \mathcal{S}(a,b)$.

Чтобы проверить, что $\varphi f \in \mathcal{S}(a,b)$, достаточно показать, что для любых $r, s \in \mathrm{Z}_+$

$$(1+x^2)^s \big(\varphi(x) f(x)\big)^{(r)} \to 0$$

при $x \to a$ или $x \to b$, $x \in (a,b)$. Для определенности будем считать,что $x \to b$. Так как

$$\big(\varphi(x)\, f(x)\big)^{(r)} = \sum_{p=0}^{r} \mathrm{C}_r^p\, \varphi^{(p)}(x)\, f^{(r-p)}(x),$$

то достаточно показать, что

$$(1+x^2)^s \varphi^{(j)} f^{(r)}(x) \to 0 \quad \forall j, r, s \in \mathrm{Z}_+ \tag{24}$$

при $x \to b$. Для любого $\varepsilon > 0$ подберем номер l так, чтобы $2^{1-l} < \varepsilon$ и $l \geq j, r, s$. Заметим, что если $x > b_l$, то x не принадлежит носителям функций φ_k при $k \leq l-1$. Поэтому

$$|(1+x^2)^s \varphi^{(j)}(x)\, f^{(r)}(x)| \leq$$
$$\leq \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} \alpha_k (1+x^2)^s |\varphi_k^{(j)}(x)\, f^{(r)}(x)| \leq \sum_{k=l}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon,$$

что доказывает (24). ▹

Лемма 12. *Для любых $a, b \in R$, $a < b$, и $n, m \in N$ существует функция $g_{(a,b;n,m)}(x) \in C^\infty(a,b)$, которая удовлетворяет условиям:*
1) $g_{(a,b;n,m)}(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$;
2) найдется $\delta > 0$, для которого

$$g_{(a,b;n,m)}(x) = \begin{cases} (x-a)^n\,, & x \in (a, a+\delta), \\ (-1)^m (x-b)^m\,, & x \in (b-\delta, b). \end{cases}$$

◃ В качестве δ возьмем любое число $0 < \delta < (b-a)/4$. Существует функция $h(x) \in C^\infty(\mathrm{R})$ такая, что $h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathrm{R}$, $h(x) = 1$ при $|x| \leq \delta$ и $h(x) = 0$ при $|x| \geq 2\delta$. Возьмем функцию

$$g(x) = h(x-a)\,(x-a)^n + \psi_{(a+\delta, b-\delta)} + (-1)^m (x-b)^m h(x-b).$$

В качестве $g_{(a,b;n,m)}$ можно взять ограничение функции $g(x)$ на интервал (a,b). $\triangleright$

Для функции $f \in C^\infty(a,b)$ обозначим через $N(f;a,b)$ множество всех нулей функции f на интервале (a,b), причем пусть каждый нуль содержится в $N(f;a,b)$ с кратностью, равной кратности этого нуля. Иногда будем также писать $N(f;I)$ вместо $N(f;a,b)$, если $I=(a,b)$.

Лемма 13. *Пусть Λ — конечное или счетное подмножество точек интервала (a,b), не имеющее предельных точек внутри (a,b), причем каждая точка из Λ может входить в этот набор с* <u>*конечной*</u> *кратностью. Тогда существует функция $f \in C^\infty(a,b)$, для которой $N(f;a,b)=\Lambda$.*

$\triangleleft$ Упорядочим числа из Λ в порядке возрастания

$$\ldots < c_{-2} < c_{-1} < c_0 < c_1 < c_2 < \ldots .$$

Пусть n_k — кратность числа c_k в наборе Λ.

Определим функцию $f(x)$ на каждом отрезке $[c_k, c_{k+1}]$ при помощи функций из леммы 12. Положим

$$f(x) := (-1)^{n_1+n_2+\ldots+n_k} g_{(c_k,c_{k+1};n_k,n_{k+1})}(x)$$

при $x \in [c_k, c_{k+1}]$, $k \geq 0$ (при $k=0$ считаем, что $n_1+\ldots+n_k=0$),

$$f(x) := (-1)^{n_0+n_{-1}+\ldots+n_{k+1}} g_{(c_{k-1},c_k;n_{k-1},n_k)}(x)$$

при $x \in [c_{k-1}, c_k]$, $k<0$. Если среди чисел из Λ существует наибольшее число c_N или наименьшее число c_M, то дополнительно полагаем

$$f(x) = (-1)^{n_1+\ldots+n_N} g_{(c_k,b;n_N,1)}(x) \quad \text{при} \quad x \in [c_N, b),$$
$$f(x) = (-1)^{n_0+n_{-1}+\ldots+n_M} g_{(a,c_M;1,n_M)}(x) \quad \text{при} \quad x \in (a, c_M].$$

Отметим, что в некоторой окрестности каждой точки c_k построенная функция совпадает с функцией $(-1)^{n_1+\cdots+n_k}(x-c_k)^{n_k}$ при $k \geq 0$ и с функцией $(-1)^{n_0+\cdots+n_{k-1}}(x-c_k)^{n_k}$ при $k<0$. Поэтому $f \in C^\infty(a,b)$. Очевидно, что нулями $f(x)$ на (a,b) являются только точки c_k, причем c_k — нуль кратности n_k. $\triangleright$

Следствие. *В условиях леммы 13 существует функция $F(x) \in \mathcal{S}(a,b)$, для которой $N(F;a,b)=\Lambda$.*

$\triangleleft$ Возьмем функцию $f(x)$ из леммы 13 и соответствующую ей функцию $\varphi(x)$ из леммы 11, тогда можно взять функцию $F(x) = \varphi(x)\, f(x)$. $\triangleright$

Лемма 14. *Пусть Λ — подмножество в R, удовлетворяющее условиям 1) и 2) теоремы 4. Существует функция $F(x) \in \mathcal{S}(\mathrm{R})$, для которой $N(F, R) = \Lambda$.*

$\triangleleft$ Пусть $A = \Lambda_\infty$. Множество A замкнуто, поэтому его дополнение $\mathrm{R} \setminus A$ открыто в R, следовательно, представимо в виде объединения конечного или счетного числа непересекающихся интервалов I_k:

$$\mathrm{R} \setminus A = \bigcup_k I_k.$$

Для каждого интервала I_k пусть $\Lambda^{(k)} = \Lambda \cap I_k$ (точки берутся с кратностями). По следствию 3 существует функция $f_k \in \mathcal{S}(I_k)$ такая, что $N(f_k; I_k) = \Lambda^{(k)}$. Пусть

$$\beta_k^{-1} = \max_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0\le j,s\le k}} |f_s^{(j)}(x)|.$$

Возьмем функцию

$$f(x) = \sum_k 2^{-k} \beta_k\, f_k(x).$$

Легко видеть, что $f \in C^\infty(\mathrm{R})$ и $N(f; \mathrm{R}) = \Lambda$. По лемме 11 подберем функцию $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathrm{R})$, $\varphi(x) > 0$ такую, что $F(x) = \varphi(x)\, f(x) \in \mathcal{S}(\mathrm{R})$. Тогда $N(F; \mathrm{R}) = \Lambda$. $\triangleright$

Доказательство теоремы 4. $\triangleleft$ *Необходимость условий 1) и 2).* Воспользуемся следствием 2. Пусть $f \in C^\infty(\mathrm{R})$ и $\Lambda = N(f; \mathrm{R})$. Пусть x — предельная точка множества Λ. Тогда существует последовательность $x_n \in \Lambda$, $x_n \to x$. Переходя к некоторой подпоследовательности, можно считать, что последовательность x_n монотонная, для определенности пусть $x_{n+1} > x_n$. Из непрерывности f следует, что $f(x) = 0$. На каждом отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ найдется точка $x_n^{(1)}$ такая, что $f'(x_n^{(1)}) = 0$. Так как $x_n^{(1)} \to x$, то из непрерывности f' следует, что $f'(x) = 0$. Рассуждая аналогично, убеждаемся, что $f^{(k)}(x) = 0$ для всех $k \in \mathrm{Z}_+$, следовательно, $x \in \Lambda_\infty$. В частности, отсюда следует, что множество Λ_∞ замкнуто. Все точки подмножества $\Lambda_{fin} = \Lambda \setminus \Lambda_\infty$ изолированные, поэтому это подмножество не более чем счетное.

Достаточность условий 1) и 2). Пусть подмножество Λ удовлетворяет условиям 1) и 2). Обозначим через $\mathcal{I}$ замкнутый идеал в $\mathcal{S}_{mult}$, состоящий из всех функций $f \in \mathcal{S}$, которые в каждой точке $\lambda \in \Lambda$ имеют нуль кратности $\geq r(\lambda)$. По лемме 4 существует функция $f \in \mathcal{I}$, для которой $N(f; \mathrm{R}) = \Lambda$. Следовательно, множество нулей идеала $\mathcal{I}$ совпадает с Λ и по следствию 2 Λ является спектром некоторого ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. $\triangleright$

Résumé

Let $\mathcal{F}$ be the set of all entire functions $f(z)$, $z = x + iy$, such that

$$\sup_{|y| \leq l} |f(x+iy)| \, (1+x^2)^{-k} < \infty$$

for all $l > 0$. $\mathcal{F}$ is a locally convex space with respect to certain topology.

It is proved that every closed invariant under derivation linear subspace $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ is the closed span of the functions

$$z^k \mathrm{e}^{i\lambda z}, \quad \lambda \in \mathrm{C},\ k \in \mathrm{N} \cup \{\infty\}.$$

A set

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathrm{C} : \mathrm{e}^{i\lambda z} \in \mathcal{H}\}$$

is called the spectrum of $\mathcal{H}$, end we suppose that λ contains in Λ with the multiplicity $r(\lambda)$, where

$$r(\lambda) = \inf\{k \in \mathrm{N} \cup \{\infty\} : z^k \mathrm{e}^{i\lambda z} \notin \mathcal{H}\}.$$

The complete description of various spectrums of such subspaces $\mathcal{H}$ is obtained.

Литература

[1] Никольский Н. К. *Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций* // Матем. анализ. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М., 1974. Т.12. С.199–412.

[2] Красичков–Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций, I* // Матем. сб. 1972. Т.87. N 4. С.459–489.

[3] Платонов С. С. *Подпространства целых функций, инвариантные относительно дифференцирования* // Известия ВУЗов (Математика). 1986. N 4. С.49–56.

[4] Владимиров В. С. *Обобщенные функции и их применение в математической физике* М.: Наука. 1979.

[5] Ленг С. $SL_2(R)$. М.: Мир, 1977.

[6] Мальгранж Б. *Идеалы дифференцируемых функций.* М.: Мир, 1968.

[7] Schwartz L. *Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions* // Canad. Journ. Math. 1951. V.3. P.503–512.

[8] Молчанов В. Ф. *Элементарные представления группы Лагерра* // Матем. зам. 1978. Т.23. Вып.1. С.31–40.

[9] Уитни Х. *Об идеалах в кольце дифференцируемых функций* // Математика (сб. переводов). 1966. Т.10, N 4. С.79–100.