Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 513

OK-РАСШИРЕНИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ БЛИЗОСТИ

А. В. Иванов

Определение OK-расширения дано в [2]. В настоящей работе получено описание всех OK-расширений вполне регулярного пространства X на языке обобщенных близостей. Показано, что непрерывное отображение $f: X \to Y$ имеет θ-непрерывное продолжение на OK-расширения X и Y тогда и только тогда, когда f близостно непрерывно.

Понятие OK-расширения введено в работе [2], где также указан метод построения всех OK-расширений данного вполне регулярного пространства. В настоящей работе под OK-расширением вполне регулярного пространства X мы будем понимать такое хаусдорфово полурегулярное расширение $Y \supset X$, что X относительно компактно в Y по терминологии А. В. Архангельского [1] и X s-вполне регулярно в Y [1]. Примером OK-расширения пространства X может служить любое его бикомпактное расширение. Известно, что бикомпактные расширения X определяются близостями на X. В данной работе мы даем описание всех OK-расширений вполне регулярного пространства в терминах обобщенных близостей. Доказана также теорема о продолжении близостно непрерывных отображений до отображения соответствующих OK-расширений.

Пусть X — вполне регулярное пространство. Центрированную систему t открытых множеств X будем называть вполне регулярной

---

[1] Относительная компактность X в Y означает, что из любого открытого покрытия Y можно выделить конечную подсистему, покрывающую X; X s-вполне регулярно в Y, если для любой точки $y \in Y$ подпространство $Y \cup \{y\}$ вполне регулярно.

системой, если для любого $U \in t$ существует $V \in t$ такое, что множества $[V]$ и $X \setminus U$ функционально отделимы. Максимальную вполне регулярную систему будем называть вполне регулярным концом. На множестве vX всех вполне регулярных концов X рассмотрим топологию, открытую базу которой образуют множества вида

$$O_U = \{t : U \in t\},$$

где U открыто в X. Известно, что возникающее при этом топологическое пространство vX гомеоморфно расширению Стоуна—Чеха βX (см. [3]). Каждая точка $x \in X$ отождествляется в пространстве vX с вполне регулярным концом ее окрестностей, который в дальнейшем мы будем обозначать через t_x.

Определение. *v-близостью на вполне регулярном пространстве X будем называть всякое бинарное отношение a на vX, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

A1. *a — отношение эквивалентности;*

A2. *если $s\,a\,t_x$, то $s = t_x$ $(x \in X, s \in vX)$;*

A3. *если $s\,\bar{a}\,t$, то существует $V \in s$ такое, что для любого $r \in O_V$ $r\,\bar{a}\,t$.*

Всякая v-близость a порождает разбиение пространства vX на классы эквивалентности. Это разбиение мы будем обозначать в дальнейшем через R_a. В силу аксиомы A2 элементами R_a являются все одноточечные множества вида $\{t_x\}$, где $x \in X$. Из аксиомы A3 легко следует замкнутость элементов R_a в vX. Рассмотрим теперь произвольное разбиение R пространства vX на замкнутые подмножества, неодноточечные элементы которого лежат в $vX \setminus X$. Определим бинарное отношение a на vX следующим образом: tas тогда и только тогда, когда t и s лежат в одном элементе R. Легко видеть, что a является v-близостью и $R_a = R$. Итак, задание v-близости на X равносильно заданию разбиения пространства vX на замкнутые подмножества, все нетривиальные элементы которого лежат в наросте.

Следующая ниже конструкция была использована в работе [2] для построения OK-расширений пространства X. Пусть B — бикомпактное расширение X и пусть R — разбиение B на замкнутые подмножества, все нетривиальные элементы которого лежат в наросте $B \setminus X$. Рассмотрим на фактор-множестве B/R топологию малых образов В. В. Федорчука [4], открытую базу которой образуют множества вида $p^\sharp U$, где U открыто в B, а $p\colon B \to B/R$ — проекция. В

[2] показано, что возникающее при этом топологическое пространство всегда является OK-расширением X.

Если применить эти построения к пространству vX и его разбиению R_a, порожденному v-близостью a, мы получим OK-расширение X. Это расширение в дальнейшем мы будем обозначать через aX, а соответствующую проекцию из vX на aX — через p_a. Отображение p_a всегда θ-совершенно и неприводимо (см.[2]).

В [2] доказано, что для любого OK-расширения B вполне регулярного пространства X существует каноническое θ-совершенное неприводимое отображение[2] $p\colon vX \to B$ такое, что $p|_X = id_X$ и $p^{-1}p(x) = \{x\}$ для любой точки $x \in X$. Таким образом, для любого OK-расширения B пространства X мы можем задать v-близость a на X по следующей формуле:

$$t\,a\,s \leftrightarrow\ p(t) = p(s).$$

Легко проверить, что отображение $f = p_a p^{-1}\colon B \to aX$ является при этом гомеоморфизмом, причем $f|_X = id_X$. Значит, расширения B и aX совпадают. Итак, нами установлено взаимно однозначное соответствие между множествами v-близостей и OK-расширений пространства X.

На множестве v-близостей $V(X)$ пространства X имеется естественный частичный порядок. Две v-близости a и b связаны неравенством $a \geq b$, если для любых $s, t \in vX$ из sat следует sbt. На множестве $OK(X)$ также можно задать отношение частичного порядка. Будем считать, что OK-расширения B_1, B_2 находятся в соотношении $B_1 \geq B_2$, если существует θ-непрерывное отображение $f\colon B_1 \to B_2$, которое тождественно на X[3].

Теорема 1. *Установленное выше соответствие между частично упорядоченными множествами $V(X)$ и $OK(X)$ является порядковым изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть a и b — v-близости и $a \geq b$. Тогда все элементы разбиения R_a содержатся в элементах R_b. Следовательно, отображение $f = p_b p_a^{-1}\colon aX \to bX$ является однозначным, причем f тождественно на X. Покажем, что f θ-непрерывно.

[2]Отображение p определяется так: $p(t) = x$, если вполне регулярный конец t содержит систему $\{Ox \cap X : Ox$ — окрестность точки x в $B\}$.

[3]Здесь нет нужды проверять выполнение аксиом частичного порядка, поскольку это следует из доказанной ниже теоремы 1.

Пусть $x \in aX, y = f(x)$ и пусть $Oy = p_b^\sharp U$ — окрестность точки y в bX. Тогда $p_a^\sharp U = Ox$ — окрестность точки x. Покажем, что $f[Ox] \subset [Oy]$. Пусть $z \in [Ox]$ и пусть O — окрестность $f(z)$ в bX. Положим $F = p_b^{-1} f(z)$. Существует окрестность V множества F в vX такая, что $p_b^\sharp V \subset O$. Поскольку $p_a^{-1} z \subset F$, множество $p_a^\sharp V$ является окрестностью точки z, следовательно, $p_a^\sharp V \cap p_a^\sharp U \neq \emptyset$ и, значит, $V \cap U \neq \emptyset$. Имеем $O \cap Oy \supset p^\sharp V \cap p^\sharp U = p^\sharp(V \cap U) \neq \emptyset$. Итак, $f(z) \in [Oy]$ — θ-непрерывность f доказана.

Пусть теперь aX и bX — два OK-расширения пространства X, порожденные v-близостями a и b, и пусть $aX \geq bX$, т. е. имеется θ-непрерывное отображение $f\colon aX \to bX$ такое, что $f|_X = id_X$. Покажем, что v-близости a и b связаны неравенством $a \geq b$. Предположим противное. Тогда в разбиении R_a пространства vX найдется элемент F, который не содержится ни в каком элементе разбиения R_b. Положим: $x = p_a F, y = f(x), H = p_b^{-1} y$. Поскольку $F \not\subset H$, можно взять точку $t \in F$ такую, что $t \notin H$, и построить непересекающиеся окрестности Ot и OH в vX. Положим: $Oy = p_b^\sharp OH$. В силу θ-непрерывности f, существует окрестность Ox точки x в aX такая, что $f[Ox] \subset [Oy]$. Пусть OF — окрестность F в vX, для которой $p_a^\sharp OF \subset Ox$. Положим: $W = OF \cap Ot \cap X$. Все отображения p_a, p_b и f тождественны на пространстве X, которое всюду плотно в vX, aX и bX. Следовательно,

$$\emptyset \neq f p_a^\sharp W \subset f Ox \subset [Oy].$$

С другой стороны, $f p_a^\sharp W = p_b^\sharp W \subset p_b^\sharp Ot$, но $p_b^\sharp Ot \cap [Oy] = \emptyset$. Противоречие. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь на X некоторую близость δ, и пусть B — соответствующее δ бикомпактное расширение X. Поскольку vX гомеоморфно расширению Стоуна—Чеха пространства X, существует непрерывное отображение $f\colon vX \to B$, которое тождественно на X. Отображение f определяет v-близость a_δ на X по формуле:

$$t a_\delta s \leftrightarrow f(t) = f(s).$$

Очевидно, что расширения B и $a_\delta X$ при этом совпадают, т. е. OK-расширение $a_\delta X$ является бикомпактным расширением. В дальнейшем мы будем отождествлять близость δ и соответствующую ей v-близость a_δ и говорить в такой ситуации, что v-близость a_δ является близостью. Отметим, что v-близость a является близостью тогда и только тогда, когда расширение aX является бикомпактом. Если aX — бикомпакт, то соответствующая v-близости a близость δ, для которой $a = a_\delta$, определяется так:

$$A\delta B \leftrightarrow [A]_{aX} \cap [B]_{aX} \neq \emptyset,\ A, B \subset X.$$

Назовем v-близость a *отделимой*, если a удовлетворяет следующему условию:

А4. Если $t\,\bar{a}\,s$, то существуют $U \in t$ и $V \in s$ такие, что для любых $r \in O_U$ и $q \in O_V$ $r\,\bar{a}\,q$.

Предложение 1. *v-близость a является близостью тогда и только тогда, когда a отделима.*

Доказательство. Пусть aX — бикомпакт, т. е. v-близость a является близостью. Покажем, что a отделима. Пусть $s, t \in vX$ и $s\bar{a}t$. Возьмем непересекающиеся окрестности O_1 и O_2 точек $p_a s$ и $p_a t$ в aX. В силу регулярности пространства aX отображение p_a непрерывно. Следовательно, множества $p_a^{-1}O_1$ и $p_a^{-1}O_2$ являются окрестностями точек s и t в vX. Существуют $U \in s$ и $V \in t$ такие, что $O_U \subset p_a^{-1}O_1, O_V \subset p_a^{-1}O_2$. Поскольку $p_a O_U \cap p_a O_V = \emptyset$, для любых двух v-концов $q \in O_U$ и $r \in O_V$ имеем $q\bar{a}r$.

Обратно, пусть v-близость a отделима. Покажем, что в этом случае расширение aX сильно хаусдорфово. Пусть $x, y \in aX, x \neq y$ и $F = p_a^{-1}x, G = p_a^{-1}y$. Используя бикомпактность множеств F и G и отделимость v-близости a, путем стандартных рассуждений нетрудно построить окрестности OF и OG множеств F и G так, что для любых v-концов p и q, лежащих в OF и OG соответственно, $p\bar{a}q$. Возьмем такие окрестности O_1F и O_1G множеств F и G, что $[O_1F] \subset OF, [O_1G] \subset OG$, и положим $p_a^\sharp O_1F = Ox, p_a^\sharp O_1G = Oy$. Покажем, что $[Ox] \cap [Oy] = \emptyset$, — сильная хаусдорфовость aX тем самым будет доказана. Пусть $z \in aX$. Множество $p_a^{-1}z$ не может пересекать одновременно OF и OG. Пусть, для определенности, $p_a^{-1}z \cap OF = \emptyset$. Тогда $vX \setminus [O_1F]$ — окрестность $p_a^{-1}z$ и, значит, множество $p_a^\sharp(vX \setminus [O_1F])$ является окрестностью точки z в aX, которая не пересекается с Ox. Следовательно, $z \notin [Ox]$. Итак, $[Ox] \cap [Oy] = \emptyset$.

В [2] показано, что всякое OK-расширение H-замкнуто. Поэтому бикомпактность aX теперь сразу следует из предложения 2. Предложение 1 доказано. □

Предложение 2. *Полурегулярное сильно хаусдорфово H-замкну-*

тое пространство X бикомпактно.

Доказательство. Достаточно проверить регулярность X. Пусть $x \in X$ и Ox — канонически открытая окрестность x. Для каждой точки $y \in X \setminus Ox$ построим окрестности Oy и $O_y x$ точек y и x соответственно, так, что $[Oy] \cap [O_y x] = \emptyset$. Из покрытия $\{Oy : y \in X \setminus Ox\} \cup \{Ox\}$ пространства X выделим конечную подсистему $\{Oy_i : i = 1, \ldots, k\} \cup \{Ox\}$, замыкания элементов которой покрывают X. Положим $O_1 x = \bigcap O_{y_i} x$. Имеем

$$[O_1 x] \subset X \setminus \bigcup [Oy_i] \subset \langle [Ox] \rangle = Ox,$$

т. е. пространство X регулярно. Предложение доказано. □

Заметим, что обобщенные близости на пространстве обычно определяются как бинарные отношения на системе подмножеств этого пространства. В этом смысле наше определение v-близости не соответствует традиционному подходу. В то же время предложение 1 показывает, что отделимые v-близости могут быть равносильно определены как близости, т. е. некоторые бинарные отношения на системе подмножеств X. В связи с этим возникает вопрос: нельзя ли аналогично описать и произвольные v-близости? Приведенный ниже пример показывает, что это в принципе невозможно.

Пример. Пусть N — счетное дискретное пространство. Известно, что $|vN| = 2^c$ (см. [5]). Возьмем в наросте $vN \setminus N$ два непересекающихся множества A и B мощности 2^c, и пусть $f \colon A \to B$ — взаимно однозначное соответствие между ними. Для каждого подмножества $C \subset A$ определим разбиение R_C пространства vN, нетривиальными элементами которого являются двухточечные множества вида $\{t, f(t)\}$, где $t \in C$. Каждое разбиение R_C порождает v-близость a_C на N, причем для любых двух различных подмножеств $C_1, C_2 \subset A$ v-близости a_{C_1} и a_{C_2} различны. Таким образом, множество v-близостей на N имеет мощность $\geq 2^{2^c}$. Всякое бинарное отношение на системе подмножеств N является подмножеством множества $P(N) \times P(N)$. Следовательно, множество бинарных отношений на $P(N)$ имеет мощность $\leq 2^c$.

Итак, v-близостей на N существенно больше, чем бинарных отношений на системе подмножеств N. Из приведенных выше рассуждений следует, что пространство N имеет 2^{2^c} OK-расширений (и в том числе 2^c бикомпактных расширений).

Следующее ниже предложение сформулировано для v-близостей. Однако, в силу наличия порядкового изоморфизма между множествами $OK(X)$ и $V(X)$, его можно переформулировать и в терминах OK-расширений.

Предложение 3. *Для каждой v-близости $a \in V(X)$ существует состоящее из близостей подмножество $A \subset V(X)$ такое, что $a = \inf A$.*

Доказательство. Для каждого неодноточечного элемента $F \in R_a$ рассмотрим разбиение $R(F)$ пространства vX, единственным нетривиальным элементом которого является множество F. Соответствующая разбиению $R(F)$ v-близость $a(F)$ является близостью. Положим $A = \{a(F) : F \in R_a, |F| > 1\}$. По построению, для любого $a(F) \in A$ имеет место неравенство $a(F) \geq a$. Следовательно, a является нижней гранью множества A. Если для некоторой v-близости b выполняются неравенства $a(F) \geq b$ для любого $a(F) \in A$, то, как легко видеть, каждый элемент $F \in R_a$ содержится в некотором элементе разбиения R_b. Значит, $a \geq b$. Итак, a — наибольшая нижняя грань A. □

Следствие. *Пусть m — мощность множества бикомпактных расширений вполне регулярного пространства X. Тогда $|OK(X)| \leq 2^m$.*

Пусть теперь X и Y — два вполне регулярных пространства с заданными на них V-близостями a и b, и пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Известно (см.[5]), что существует единственное непрерывное продолжение $vf: vX \to vY$ отображения f. Будем говорить, что f v-близостно непрерывно, если для любых $s, t \in vX$ из sat следует $vf(s)bvf(t)$. Пусть aX и bX — OK-расширения пространств X и Y, соответствующие v-близостям a и b. θ-непрерывное отображение $\bar{f}: aX \to bY$ будем называть продолжением f на OK-расширения, если $\bar{f}|_X = f$.

Теорема 2. *Непрерывное отображение $f: X \to Y$ вполне регулярных пространств имеет продолжение на OK-расширения aX и bY тогда и только тогда, когда f v-близостно непрерывно относительно v-близостей, соответствующих расширениям aX и bY.*

Доказательство. Пусть f — v-близостно непрерывно. Определим отображение $\bar{f}: aX \to bY$ по формуле:

$$\bar{f}(x) = p_b(vf(p_a^{-1}(x))), x \in aX.$$

Поскольку каждый элемент $p_a^{-1}(x)$ разбиения R_a переводится отображением vf в некоторый элемент R_b, $\bar{f}$ определено однозначно. Очевидно, что $\bar{f}|_X = f$. Покажем, что $\bar{f}$ θ-непрерывно.

Пусть $x \in aX, y = \bar{f}(x)$ и пусть $Oy = p_b^\sharp V$, где V открыто в vY. Положим $U = vf^{-1}(V), Ox = p_a^\sharp U$. Покажем, что $\bar{f}[Ox] \subset [Oy]$. Пусть $z \in [Ox]$. Тогда $p_a^{-1}(z) \cap [U] \neq \emptyset$ (в противном случае $p_a^\sharp(vX \setminus [U])$ — окрестность z в aX, которая не пересекается с Ox). Возьмем точку $t \in p_a^{-1}(z) \cap [U]$. Имеем $vf(t) \in vf[U] = [V]$, следовательно, $\bar{f}(z) = p_b(vf(t)) \in p_b[V]$. Покажем, что $p_b[V] \subset [Oy]$. Предположим противное. Пусть существует $s \in [V]$ такое, что $p_b(s) = d \notin [Oy]$. Возьмем окрестность Od точки d, которая не пересекает Oy. В силу θ-непрерывности p_b существует окрестность Os точки s такая, что $p_b Os \subset [Od]$. Следовательно, $p_b Os \cap Oy = \emptyset$. С другой стороны, $Os \cap V \neq \emptyset$, значит, $\emptyset \neq p_b^\sharp(Os \cap V) \subset Oy$ — противоречие. Итак, $\bar{f}(z) \in [Oy]$. Следовательно, отображение $\bar{f}$ θ-непрерывно.

Пусть теперь для непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ существует θ-непрерывное продолжение $\bar{f}\colon aX \to bY$. Покажем, что f v-близостно непрерывно относительно v-близостей a и b. Предположим, что это не так. Тогда существует элемент F разбиения R_a такой, что множество $vf(F)$ не содержится ни в каком элементе разбиения R_b. Пусть $x = p_a F, y = \bar{f}(x)$ и $G = p_b^{-1} y$. Поскольку $vf(F) \not\subset G$, существует точка $t \in vf(F)$ такая, что $t \notin G$. Выберем в пространстве vY непересекающиеся окрестности Ot и OG точки t и множества G. Положим $Oy = p_b^\sharp OG$. В силу θ-непрерывности $\bar{f}$ существует окрестность $Ox = p_a^\sharp U$ такая, что $\bar{f}[Ox] \subset [Oy]$. Рассмотрим множество $W = U \cap vf^{-1}(Ot) \cap X$. Очевидно, $W \neq \emptyset$. Имеем:

$$p_b(vf(W)) = p_b^\sharp(vf(W)) \subset p_b^\sharp Ot.$$

С другой стороны,

$$p_b(vf(W)) = \bar{f} p_a(W) = \bar{f} p_a^\# W \subseteq [Oy].$$

Но по построению $p_b^\# Ot \cap [Oy] = \emptyset$. Противоречие. □

Résumé

OK-extensions were defined in [2]. In this paper a description of all OK-extensions of a completely regular space X in terms of generalized proximities is obtained. It is proved, that a continuous mapping $f\colon X \to Y$ has a θ-continuous extension to OK-extensions of X and Y if and only if f is proximally continuous.

Литература

[1] Архангельский А. В., Хамди М. М. Генеди. *Начала теории относительных топологических свойств*// Общая топология. Пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 3–48.

[2] Иванов А. В. *Относительно компактные расширения вполне регулярных пространств*// Труды ПГУ. Сер. матем. 1996. Вып. 3. С. 79–87.

[3] Илиадис С., Фомин С. *Метод центрированных систем в теории топологических пространств*// Успехи мат. наук. 1966. Т. 21. Вып. 4. С. 47–76.

[4] Федорчук В. В. *Об H-замкнутых расширениях пространств θ-близости*// Матем. сб. 1972. Т. 89(131). С. 400–418.

[5] Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986.