Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 519.2

ЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ В СХЕМЕ СЕРИЙ И ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

Н. И. Казимиров

В статье определены границы применимости известных достаточных условий локальной сходимости серий сумм решетчатых слагаемых для изучения случайных лесов.

В книге [1] при изучении свойств случайных лесов, основанном на взаимосвязи между случайными лесами и ветвящимися процессами Гальтона—Ватсона, возникает необходимость доказательства ряда утверждений о предельном поведении случайной величины (с.в.), равной общему числу частиц, существовавших в процессе Гальтона—Ватсона до его вырождения.

Придерживаясь обозначений, принятых в [1], через $\mathrm{F}_{N,n}$ обозначим класс лесов, состоящих из N корневых деревьев (корни занумерованы) с n некорневыми вершинами, помеченными некоторым образом. Классу $\mathrm{F}_{N,n}$ соответствует ветвящийся процесс Гальтона—Ватсона G, распадающийся на N процессов $G^{(1)},\dots,G^{(N)}$, каждый из которых начинается с одной частицы. Как и в [1], введем вспомогательную с.в. ξ, имеющую дискретное распределение

$$\mathsf{P}\{\xi=k\}=p_k,\qquad k=0,1,\dots,\tag{1}$$

с максимальным шагом d и производящей функцией

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_kz^k,\tag{2}$$

считая при этом, что множество значений ξ, имеющих ненулевую вероятность, содержит нуль и не совпадает с множеством $\{0,1\}$. Пусть $\mathsf{M}\xi = 1$, $\mathsf{D}\xi = B$ и $F'''(1) < \infty$. Очевидно, что $B > 0$. Будем считать, что число прямых потомков одной частицы ветвящегося процесса G имеет распределение

$$p_k(\lambda) = \lambda^k p_k / F(\lambda), \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

где $0 < \lambda < 1$. Пусть также $\nu^{(i)}$ обозначает с.в., равную числу частиц, существовавших в процессе $G^{(i)}$ за все время его существования, $i \in \{1, \ldots, N\}$, ν — с.в., равную числу частиц, существовавших в процессе G до его вырождения. Очевидно, $\nu = \nu^{(1)} + \ldots + \nu^{(N)}$.

Так как с.в. $\nu^{(1)}, \ldots, \nu^{(N)}$ независимы, а сумма ν зависит, вообще говоря, от N, n, то мы имеем схему серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^{N}$. В лемме 2.3.2 книги [1] доказана локальная сходимость суммы ν к нормальному закону при стремлении[1] параметров N и n к бесконечности так, что $n/N^2 \to 0$. В ходе доказательства приходится рассматривать различные зоны изменения параметров N, n и различные значения шага d. Необходимость специального доказательства локальной сходимости для конкретных сумм, связанных с комбинаторными вероятностями, отмечалась в книге [2] в связи с недостаточным развитием теории локальных предельных теорем для схем серий. В последнее время получены значительные продвижения в этой теории (см. [3]). Целью настоящей статьи является установление границ применимости известных достаточных условий локальной сходимости к исследованию предельного поведения ν. Ниже будет показано, что лемма 2.3.2 книги [1] является следствием теоремы 1 статьи [3] в случае $d = 1$, в то время как при $d > 1$ указанная лемма не выводима из данной теоремы.

Обозначим через $\langle\alpha\rangle$ расстояние от вещественного α до ближайшего целого числа.

Пусть также

$$H(\nu^{(1)}, t) = \mathsf{M}\langle(\nu^{(1)} - \nu^{(2)})t\rangle^2,$$
$$H_N(t) = N H(\nu^{(1)}, t), \quad H_N = N \inf_{1/4 \le t \le 1/2} H(\nu^{(1)}, t),$$

[1] Здесь и далее все пределы, а также символы Ландау ($o(\ldots), O(\ldots)$) рассматриваются при $N, n \to \infty$, если не оговорено противное.

$$B^2(\nu^{(1)}, u) = 2 \sum_{1 \le k \le u} k^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\}, \quad B_N^2(u) = NB^2(\nu^{(1)}, u),$$
$$B_N = \sqrt{N\sigma^2}, \qquad \sigma^2 = \mathsf{D}\nu^{(1)}.$$

Для дальнейших рассуждений нам потребуется с.в., равная общему числу частиц, существовавших в критическом процессе Гальтона—Ватсона G^*, начавшемся с одной частицы, в котором число потомков одной частицы равно с.в. ξ, введенной выше. Как и в [1], обозначим эту с.в. через $\nu^{*(1)}$. Для того, чтобы можно было рассматривать симметризованную с.в. для $\nu^{*(1)}$, обозначим через $\nu^{*(2)}$ с.в., одинаково распределенную с $\nu^{*(1)}$ и независимую от $\nu^{*(1)}$. Тогда симметризованная с.в. для $\nu^{*(1)}$ примет вид $\nu^{*(1)} - \nu^{*(2)}$.

Заметим, что для ν выполняется и.п.т. в силу леммы 2.3.1 книги [1] при наложении тех же ограничений, что и в лемме 2.3.2, а именно: $n/N^2 \to 0$, $N\lambda^j \to \infty$, где $j = \min\{k > 0 |\ p_k > 0\}$, а $\lambda = \lambda(N, n)$ определяется соотношением

$$\frac{\lambda F'(\lambda)}{F(\lambda)} = \frac{n}{N+n}. \qquad (4)$$

В теореме 1 статьи [3] доказаны достаточные условия следования л.п.т. из и.п.т. Перечислим эти условия:

I. $B_N^2 = O(H_N)$.

II. $H_N \to \infty$ и существует такое $M > 0$, что $B_N = O(B_N(M))$.

III. $H_N \to \infty$ и существует такое $\mu < 1/2$, что $B_N = O(B_N(H_N^\mu))$.

IV. $H_N \to \infty$ и существуют такие $\mu < 1/2$, $\alpha > 0$ и $\rho \in (0, 2]$, что для $u \in [H_N^\mu, B_N]$ справедливо неравенство $B_N^2(u) \ge \alpha B_N^\rho u^{2-\rho}$.

Обозначим M_p подмножество $\mathbb{Z}$, являющееся множеством значений некоторой целочисленной с.в. η, принимаемых ею с ненулевой вероятностью, причем с.в. η имеет максимальный шаг p и удовлетворяет равенству

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathsf{P}\{\eta = kp\} = 1.$$

Такие множество M_p и с.в. η будем называть соответствующими. Ясно, что одному множеству M_p может соответствовать больше одной с.в.

Для произвольно выбранного $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ обозначим

$$q\mathbb{Z} = \{qr|\ r \in \mathbb{Z}\}.$$

Очевидно, что с.в. η имеет максимальный шаг p тогда и только тогда, когда $M_p \subseteq p\mathbb{Z}$, но при любом $s > p, s \in \mathbb{N}$, $M_p \not\subseteq s\mathbb{Z}$. Заметим, что в случае конечного множества M_p понятие максимального шага η совпадает с понятием наибольшего общего делителя (НОД) элементов множества M_p.

Легко проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Если с.в. η имеет максимальный шаг 1, то в M_1 найдется конечное подмножество с НОД, равным 1.*

Рассмотрим теперь целочисленную с.в. ξ с распределением (1) и максимальным шагом d. Положим $M = \{k \in \mathbb{N}|\ p_k = \mathsf{P}\{\xi = k\} > 0\}$. Пусть $d = 1$, тогда множество M удовлетворяет лемме 1, в силу которой существует конечное подмножество $N = \{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq M$ с НОД, равным 1, т. е. числа $n_1, \ldots, n_m$ взаимно просты. Тогда, пользуясь леммой книги [4,с.206], заключаем, что существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что при любом натуральном $k > k_0$ имеет место равенство:

$$k = x_1 n_1 + \ldots + x_m n_m, \tag{5}$$

где $x_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Рассмотрим критический процесс Гальтона—Ватсона, начинающийся с одной частицы, в котором число потомков каждой частицы имеет распределение (1). Используя (5), легко получить, что для этого процесса существует такое натуральное k_0, что $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = k\} > 0$ при всех $k > k_0 + 1$. Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. *Если максимальный шаг с.в. ξ равен 1, то*

$$\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} - \nu^{*(2)} = 1\} > 0.$$

Предположим, что максимальный шаг целочисленной с.в. ξ с распределением (1) равен $d > 1$. Тогда число потомков одной частицы в критическом процессе Гальтона—Ватсона G^*, очевидно, будет кратно d. Отсюда легко видеть, что симметризованная величина $\nu^{*(1)} - \nu^{*(2)}$ принимает с ненулевой вероятностью только значения из множества $d\mathbb{Z}$, т. е.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} - \nu^{*(2)} = kd\} = 1. \tag{6}$$

Теорема 2. *Для схемы серий* $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ *с шагом* $d>1$ *условия* I–IV *не выполнены.*

Доказательство. Используя равенство (2.2.4) книги [1], заключаем, что

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=k+1\}=\frac{\lambda^k}{F^{k+1}(\lambda)}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=k+1\},\quad k=0,1,\dots$$

Так как $\lambda\in(0,1)$, то $\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=k+1\}>0$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=k+1\}>0$. Поэтому и $\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}>0$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}-\nu^{*(2)}=k\}>0$ при любом $k\in\mathbb{Z}$.

Теперь, принимая во внимание равенство (6), получаем

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=kd\}=1,$$

т. е. симметризованная с.в. $\nu^{(1)}-\nu^{(2)}$ с ненулевой вероятностью принимает лишь значения, кратные d, откуда

$$H(\nu^{(1)},t)=\mathsf{M}\langle(\nu^{(1)}-\nu^{(2)})t\rangle^2=$$
$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle kt\rangle^2\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle kdt\rangle^2\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=kd\}.$$

Подставляя вместо t число $[d/2]/d$, где $[\alpha]$ — целая часть вещественного α, получаем

$$H(\nu^{(1)},[d/2]/d)=0.$$

Поэтому $H_N=\inf\limits_{1/4\le t\le 1/2}H(\nu^{(1)},t)=0$, откуда $H_N\not\to\infty$, и условия II, III, IV не выполняются. Условие I, которое требует, чтобы $B_N^2=O(H_N)$, очевидно, не выполняется, т. к. $\lim\limits_{N\to\infty}H_N/B_N^2$ равен нулю. □

Предположим теперь, что шаг распределения с.в. ξ равен 1. В этом случае, как утверждает теорема 1, симметризованное распределение с.в. $\nu^{*(1)}$ удовлетворяет следующему неравенству

$$\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}-\nu^{*(2)}=1\}>0. \tag{7}$$

Дальнейшее наше исследование справедливости л.п.т. для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ мы разобьем на три части в зависимости от поведения дроби n/N при стремлении $n,N\to\infty$, которые будут выражены следующими тремя теоремами (символы $C_1, C_2, \ldots$ обозначают положительные постоянные, не зависящие от n и N). Как и раньше, положим $j = \min\{k > 0 | \; p_k > 0\}$, где p_k заданы соотношением (1), а λ удовлетворяет (4).

Теорема 3. *Если $n, N \to \infty$ так, что $0 < C_1 \le n/N \le C_2 < \infty$, то для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ выполнена л.п.т.*

Доказательство. Справедливость и.п.т. для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ следует, как уже было отмечено выше, из леммы 2.3.1 книги [1].

Оценим $B_N^2 = N\sigma^2$. Используя соотношение (2.3.2) книги [1], имеем:

$$\sigma^2 = \mathsf{D}\nu^{(1)} = B_\lambda (1-m)^{-3}, \tag{8}$$

где m и B_λ обозначают, соответственно, математическое ожидание и дисперсию распределения (3).

В [1] показано, что

$$m = n/(n+N) \tag{9}$$

и $0 < C_3 \le B_\lambda \le C_4 < \infty$. Тогда из (8) и (9) следует, что $0 < C_5 \le \le \sigma^2 \le C_6 < \infty$. Окончательно для $B_N^2 = N\sigma^2$ получаем следующую оценку:

$$B_N^2 = O(N). \tag{10}$$

Оценим теперь $H_N = N \inf\limits_{1/4 \le t \le 1/2} H(\nu^{(1)}, t)$. Во-первых, заметим, что

$$H(\nu^{(1)}, t) = \mathsf{M}\langle(\nu^{(1)} - \nu^{(2)})t\rangle^2 \le 1/4.$$

Во-вторых,

$$H(\nu^{(1)}, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle kt \rangle^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} \ge$$
$$\ge \langle t \rangle^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = 1\} \ge \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = 1\}/16.$$

Теперь, в силу (7) $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} - \nu^{*(2)} = 1\} > 0$. А так как $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = = 0\} = 0$, то найдется $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, при котором $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l\} > 0$ и $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l+1\} > 0$, причем обе эти вероятности не зависят от n, N, т. к. распределение числа потомков в процессе G^* не зависит от n, N. Поэтому

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = 1\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu^{(1)} = k+1\} \mathsf{P}\{\nu^{(2)} = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2k-1}}{F^{2k+1}(\lambda)} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = k+1\} \mathsf{P}\{\nu^{*(2)} = k\} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda^{2l-1}}{F^{2l+1}(\lambda)} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l+1\} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l\} \geq 16C_7 > 0,$$

где мы воспользовались равенством (2.2.4) книги [1] и тем, что $\nu^{*(1)}$ и $\nu^{*(2)}$ одинаково распределены.

Итак, $0 < C_7 \leq H(\nu^{(1)}, t) \leq C_8 < \infty$. Тогда $H_N = O(N)$, откуда в силу (10) получаем $B_N^2 = O(H_N)$ и, следовательно, условие I выполнено. □

Теорема 4. *Если $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to 0$, $N\lambda^j \to \infty$, то для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ выполнена л.п.т.*

Доказательство. Проверим выполнение условия I, так как и.п.т. верна для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ в силу условия $N\lambda^j \to \infty$ и леммы 2.3.1 книги [1].

Оценим $B_N^2 = N\sigma^2$. Из (9) получаем

$$(1-m)^{-3} = (1+n/N)^3 \to 1. \tag{11}$$

По лемме 2.2.1 [1] при $n/N \to 0$ имеем $\lambda^j = O(n/N)$, откуда, во-первых, $\lambda \to 0$, во-вторых, $F(\lambda) \to p_0 > 0$ и при любом $k > j$ имеем $\lambda^k = o(\lambda^j)$. Поэтому в силу равенства

$$m = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)} = \sum_{k=j}^{\infty} k \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)} = O(\lambda^j)$$

получаем, что $m^2 = o(\lambda^j)$. А так как

$$B_\lambda = \sum_{k=j}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)} - m^2,$$

то $B_\lambda = O(\lambda^j)$. Отсюда и из (8), (11) заключаем, что $\sigma^2 = O(\lambda^j) = O(n/N)$, откуда

$$B_N^2 = N\sigma^2 = O(n). \tag{12}$$

Оценим теперь $H_N = N \inf\limits_{1/4 \leq t \leq 1/2} H(\nu^{(1)}, t)$.

$$H(\nu^{(1)}, t) = \mathsf{M}\langle(\nu^{(1)} - \nu^{(2)})t\rangle^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \langle kt\rangle^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\}. \tag{13}$$

Рассмотрим вероятность $\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}$. Полагая $K=\max\{0,k\}$ и учитывая, что $\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=l\}=0$ при $l\le 0$, имеем

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}=\sum_{l=1}^{\infty}\mathsf{P}\{\nu^{(1)}=l\}\mathsf{P}\{\nu^{(2)}=l-k\}=$$

$$=\sum_{l=K}^{\infty}\frac{\lambda^{2l-k}}{F^{2l+2-k}(\lambda)}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\},$$

где мы воспользовались равенством (2.2.4) [1] и одинаковой распределенностью с.в. $\nu^{*(1)}$ и $\nu^{*(2)}$. Из определения числа j видно, что $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=j+1\}>0$, но $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l\}=0$ при $0<l\le j$, т. к. число потомков одной частицы в процессе G^* либо равно нулю, либо не меньше j.

Пусть $k<0$, тогда $K=0$ и

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2l-k}}{F^{2l+2-k}(\lambda)}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\}.$$

Очевидно, при любом $l\ge 0$ получим $2l-k>0$. Рассмотрим только такие l, для которых $2l-k<j$. При этом получим $l+1<j/2+m/2+1$, откуда $l+1<j$. Тогда при выбранных l имеем $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}=0$, если $l>0$, а при $l=0$ получим $-k<j$ и $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\}=0$. Итак, при $2l-k<j$ имеем $\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\}=0$ и, следовательно,

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}=$$

$$=\sum_{2l-k\ge j}\frac{\lambda^{2l-k}}{F^{2l+2-k}(\lambda)}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\}\le C_1\lambda^j. \quad (14)$$

Пусть теперь $k>0$, тогда $K=k$ и

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}=\sum_{l=k}^{\infty}\frac{\lambda^{2l-k}}{F^{2l+2-k}(\lambda)}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)}-\nu^{(2)}=k\}=$$

$$=\sum_{2l-k\ge j}\frac{\lambda^{2l-k}}{F^{2l+2-k}(\lambda)}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)}=l-k+1\}\le C_2\lambda^j. \quad (15)$$

Если $|k| > j$, то нетрудно видеть, что

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} \leq C_3\lambda^{|k|} = o(\lambda^j).$$

Поэтому в сумме (13) только конечное число слагаемых (не больше $2j$) может быть величиной порядка λ^j. Тогда

$$H(\nu^{(1)}, t) \leq C_4\lambda^j. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = j\} = \sum_{l=j}^{\infty} \frac{\lambda^{2l-j}}{F^{2l+2-j}(\lambda)} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l-j+1\} \geq$$
$$\geq \frac{\lambda^j}{F^{j+2}(\lambda)} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = j+1\}\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = 1\} > 0.$$

Следовательно, $\mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = j\} \geq C_5\lambda^j$, откуда

$$H(\nu^{(1)}, t) \geq C_6\lambda^j. \tag{17}$$

Окончательно из (16) и (17) получаем

$$H(\nu^{(1)}, t) = O(\lambda^j) = O(n/N).$$

Проведенные оценки справедливы при любом $t \in [1/4, 1/2]$, поэтому

$$H_N = N \inf_{1/4 \leq t \leq 1/2} H(\nu^{(1)}, t) = O(n). \tag{18}$$

Из (12) и (18) получаем $B_N^2 = O(H_N)$ и теорема доказана. □

Теорема 5. *Если $n, N \to \infty$ так, что $n/N \to \infty$, $n/N^2 \to 0$, то для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ выполнена л.п.т.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, справедливость и.п.т. следует из леммы 2.3.1 [1]. Покажем теперь, что для схемы серий $\{\nu^{(i)}\}_{i=1}^N$ выполнено условие IV.

Оценим $B_N^2 = N\sigma^2$. Из (8), (9) получаем

$$\sigma^2 = B_\lambda(1-m)^{-3} = B_\lambda(1+n/N)^3 = B_\lambda O(n^3/N^3).$$

По лемме 2.2.1, в силу условий теоремы $\lambda, m \to 1$, поэтому

$$B_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k p_k}{F(\lambda)} - m^2 = O\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k\right) - m^2 = O(B + 1 - m^2) = O(B),$$

где $B = \mathsf{D}\xi > 0$. Следовательно, $\sigma^2 = O(n^3/N^3)$, откуда

$$B_N^2 = O(n^3/N^2). \tag{19}$$

Оценим $H_N = N \inf_{1/4 \le t \le 1/2} H(\nu^{(1)}, t)$. Так же, как в теореме 3 (здесь замена условия $0 < A \le \lambda \le B < 1$ на условие $\lambda \to 1$ на доказательство не влияет), доказывается, что $H_N = O(N)$.

Оценим теперь величину $B_N^2(u) = 2N \sum_{1 \le k \le u} k^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\}$. Снова из (2.2.4) [1] имеем

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{\lambda^{2l-k}}{F^{2l+2-k}(\lambda)} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l+1\} \mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l-k+1\}.$$

Из леммы 1.3.12 [1] следует, что при $l \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mathsf{P}\{\nu^{*(1)} = l\} = \frac{1 + o(1)}{\sqrt{2\pi B}\, l^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2Bl}\right\} = O(l^{-3/2}).$$

Поэтому, выбирая произвольно $k \in [K_0, \infty)$, где $K_0 \to \infty$, из последних двух соотношений получаем

$$\mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} = O\left(\sum_{l=k}^{\infty} (l+1)^{-3/2} (l-k+1)^{-3/2}\right) = \\ = O\left(\sum_{l=k+1}^{\infty} [l(l-k)]^{-3/2}\right).$$

Тогда

$$\sum_{1 \le k \le u} k^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} \ge C_1 \sum_{k=K_0}^{u} k^2 \sum_{l=k+1}^{\infty} [l(l-k)]^{-3/2}, \tag{20}$$

где $u \ge K_0$, причем, не ограничивая общности, мы считаем $u \in \mathbb{Z}$.

Правую часть последнего неравенства можно оценить следующим образом:

$$\sum_{l=k+1}^{\infty} [l(l-k)]^{-3/2} \geq \int\limits_{k+1}^{\infty} (x^2 - xk)^{-3/2} dx. \tag{21}$$

Вычисляя интеграл, из (20) и (21) получаем:

$$\sum_{1 \leq k \leq u} k^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} \geq C_2 \sum_{k=K_0}^{u} \frac{k^2}{k+1+(1+k/2)\sqrt{k+1}}. \tag{22}$$

Аналогично рассуждая, приходим к следующему неравенству. Если K_0 и $u \to \infty$ таким образом, что $K_0 = o(u)$, например, при $u \in [K_0^\gamma, \infty)$, $\gamma > 1$, то:

$$\sum_{k=K_0}^{u} \frac{k^2}{k+1+(1+k/2)\sqrt{k+1}} \geq \int\limits_{K_0-1}^{u} \frac{x^2}{x+1+(1+x/2)\sqrt{x+1}} dx =$$
$$= \frac{4}{3}(\sqrt{u+1}-1)^3 - \frac{4}{3}(\sqrt{K_0}-1)^3 = O(u^{3/2}).$$

Итак,

$$\sum_{k=K_0}^{u} \frac{k^2}{k+1+(1+k/2)\sqrt{k+1}} \geq C_3 u^{3/2},$$

поэтому из (22) имеем

$$\sum_{1 \leq k \leq u} k^2 \mathsf{P}\{\nu^{(1)} - \nu^{(2)} = k\} \geq C_4 u^{3/2}.$$

Таким образом, $B_N^2(u) \geq C_5 N u^{3/2}$.

В условии IV положим $\rho = 1/2$. Тогда в силу проведенных выше оценок из (19) заключаем, что

$$B_N^\rho u^{2-\rho} = \sqrt{B_N}\, u^{3/2} = O(n^{3/4} N^{-1/2} u^{3/2}).$$

Так как в силу условия теоремы $n/N^2 \to 0$, то

$$\frac{n^{3/4} N^{-1/2} u^{3/2}}{N u^{3/2}} = \frac{n^{3/4}}{N^{3/2}} \to 0,$$

поэтому $B_N^\rho u^{2-\rho} = o(Nu^{3/2})$. Это означает, что найдутся натуральные n_0, N_0 и вещественные $\alpha, \beta > 0$ такие, что для всех $n \geq n_0$, $N \geq$ $\geq N_0$ справедливы неравенства

$$\alpha B_N^\rho u^{2-\rho} \leq \beta N u^{3/2} \leq B_N^2(u)$$

при $u \in [K_0^\gamma, \infty)$, $\gamma > 1$.

Теперь, полагая $K_0 = \left[H_N^{\mu/\gamma}\right]$, где $0 < \mu < 1/2$, получим $K_0^\gamma =$ $= O(H_N^\mu)$ (например, $\mu = 1/4$, $\gamma = 5/4$).

Окончательно имеем: $H_N \to \infty$ и существуют такие $\mu < 1/2$, $\alpha > 0$ и $\rho \in (0, 2]$, что для $u \in [H_N^\mu, B_N]$ справедливо неравенство $B_N^2(u) \geq$ $\geq \alpha B_N^\rho u^{2-\rho}$. Теорема доказана. $\square$

Résumé

Borders of applicability of known sufficient conditions of local convergence of series of sums discrete components for study random forests are determined.

Литература

[1] Павлов Ю. Л. *Случайные леса*/ КНЦ РАН. Петрозаводск, 1996.

[2] Колчин В. Ф. *Случайные отображения*. М.: Наука, 1984.

[3] Мухин А. Б. *Локальные предельные теоремы для решетчатых случайных величин*// Теория вероятностей и ее применения. 1991. Т. 36. Вып. 4. С. 660–674.

[4] Боровков А. А. *Курс теории вероятностей*. М.: Наука, 1972.