Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 4, 1997

УДК 517.518

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА $\mathbb{R}^N$

С. С. Платонов

Получено описание строения замкнутых линейных подпространств в функциональных топологических векторных пространствах полиномиального роста на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. В частности, получено полное описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств в этих пространствах.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть группа Ли G транзитивно действует на гладком многообразии M. Для $g \in G$ и любой функции $f(x)$ на M пусть

$$(\pi(g)f)(x) := f(g^{-1}x), \quad x \in M. \tag{1.1}$$

Локально выпуклое пространство (ЛВП) $\mathcal{F}$, состоящее из комплекснозначных функций на M (обычных или обобщенных), будем называть π–инвариантным, если из $f(x) \in \mathcal{F}$ следует, что $\pi(g)f \in \mathcal{F}$ при любом $g \in G$ и отображение $g \mapsto \pi(g)f$ из G в $\mathcal{F}$ непрерывно. В этом случае ограничение операторов $\pi(g)$ на $\mathcal{F}$ определяет квазирегулярное представление группы G ЛВП $\mathcal{F}$ (будем обозначать это представление также $\pi(g)$). Линейное подпространство $H \subseteq \mathcal{F}$ будем называть инвариантным подпространством (ИПП), если оно замкнуто и π–инвариантно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 95–01–01391.

Общий вид задач, частные случаи которых рассматриваются в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом: описать в каком-нибудь смысле строение всех ИПП для различных групп Ли G, однородных многообразий M и функциональных пространств $\mathcal{F}$. В качестве $\mathcal{F}$ обычно берутся функциональные пространства, состоящие из функций, удовлетворяющих некоторым условиям гладкости и роста. Задачи такого типа являются одними из основных задач гармонического анализа на группах Ли и им посвящено большое количество работ (см., например, [1–10]).

В настоящей работе, как и в работе [10], рассматривается случай, когда M совпадает с n-мерным евклидовым пространством R^n, G — группа всех изометрий пространства R^n, сохраняющих ориентацию. В [10] рассматривались функциональные пространства $\mathcal{F}$ двух классов. Один класс содержит функциональные пространства, состоящие из функций без ограничений на рост, но с некоторыми ограничениями на гладкость. В этом классе содержатся, например, пространства $C^d(\mathbb{R}^n)$, состоящие из d раз непрерывно дифференцируемых функций, $d = 0, 1, \dots, \infty$. Более точно, в качестве $\mathcal{F}$ можно взять любое полное π–инвариантное ЛВП, состоящее из функций на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющее условию

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}'$$

(вложения предполагаются непрерывными), где $\mathcal{E}$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}'$ — пространство всех обобщенных функций на $\mathbb{R}^n$, пространства $\mathcal{E}$ и $\mathcal{D}'$ берутся с обычными топологиями. Будем называть такие функциональные пространства *пространствами неограниченного роста.* Другой класс функциональных пространств состоит из функциональных пространств *экспоненциального роста*, точное определение этого класса см. в [10]. В настоящей работе вводится новый класс функциональных пространств на $\mathbb{R}^n$, в которых также удается получить полное описание строения инвариантных подпространств. Функциональные пространства из этого класса называются функциональными пространствами степенного роста. Примером функционального пространства степенного роста служит пространство $\mathcal{S}'$ обобщенных функций умеренного роста на $\mathbb{R}^n$. Описание инвариантных подпространств проводится по той же схеме, что и в [10]: доказывается, что любое ИПП $H \subset \mathcal{F}$ однозначно определяется по набору его ячеек $H^{(\lambda)}$, затем получено описание всевозможных ячеек $H^{(\lambda)}$ и установлены условия, при которых из ячеек может быть построено единое ИПП. Как и в [10], каждая ячейка $H^{(\lambda)}$ описывается некоторым спектром σ, но в отличие от [10] спектр обязан быть вещественным, может быть несчетным и в нем допускаются точки бесконечной кратности. В качестве следствия в §2 получено описание неприводимых и неразложимых ИПП.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Далее в этом параграфе будем считать, что $n \geq 2$. Случай $n = 1$ будет отдельно рассмотрен в §3.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $o = (0, \ldots, 0)$, $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Для мультииндекса $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ пусть $|r| = r_1 + \ldots + r_n$, $\partial^r = \partial_{x_1}^{r_1} \ldots \partial_{x_n}^{r_n}$, где ∂_t — дифференцирование по параметру t, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Пусть G — группа всех изометрий пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию. Для $g \in G$ полагаем

$$|g| := |go|.$$

Проверим, что справедливо неравенство

$$|gx| \leq |g| + |x|, \quad x \in \mathbb{R}^n, g \in G.$$

Действительно, так как g изометрия, то

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |gx - gy| = |x - y|. \tag{1.2}$$

Тогда

$$|gx| = |go + gx - go| \leq |go| + |gx - go| = |g| + |x - o| = |g| + |x|.$$

Пусть

$$\alpha(x) := 1 + |x|, \quad \alpha(g) := 1 + |g|.$$

Из неравенства (1.2) следует, что

$$\alpha(gx) \leq \alpha(g)\,\alpha(x), \tag{1.3}$$

а из (1.3) следует неравенство

$$\alpha(g^{-1}x) \geq \alpha(x)/\alpha(g). \tag{1.4}$$

Обозначим через C_k, $k \in \mathbb{R}$, множество непрерывных функций на $M = \mathbb{R}^n$, для которых $|f(x)|(\alpha(x))^{-k} \to 0$ при $|x| \to \infty$. Множество C_k является банаховым пространством (БП) относительно нормы

$$N_k(f) := \sup_{x \in M} |f(x)|(\alpha(x))^{-k}.$$

Пространство

$$C_* := \bigcup_{k>0} C_k$$

снабдим топологией индуктивного предела БП C_k. Через C_k^d ($d \in \mathbb{Z}_+$) обозначим множество всех d раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ таких, что

$$\partial^r f \in C_k$$

для любого мультииндекса $r \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|r| \le d$. Множество C_k^d является банаховым пространством с нормой

$$N_{k,d}(f) := \sum_{|r|\le d} N_k(\partial^r f).$$

Определим еще пространство

$$\mathcal{E}_k = C_k^\infty := \bigcap_{d=1}^{\infty} C_k^d.$$

Топология в $\mathcal{E}_k$ задается семейством полунорм (даже норм) $N_{k,d}$ при $d \in \mathbb{Z}_+$, и пространство $\mathcal{E}_k$ становится локально выпуклым пространством. Пространство

$$C_*^d := \bigcup_{k>0} C_k^d, \quad d = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП C_k^d. Пространство C_*^∞ будем также обозначать $\mathcal{E}_*$.

Пусть

$$\mathcal{S} := \bigcap_{k>0} \mathcal{E}_{-k}.$$

Пространство $\mathcal{S}$ состоит из всех функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, которые вместе со всеми производными стремятся к нулю при $|x| \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Это пространство хорошо известно в теории обобщенных функций (см., например, [11]) и называется пространством быстро убывающих функций. Топологию в $\mathcal{S}$ можно задать счетной системой норм

$$||\varphi||_d := \sum_{|r|\le p} N_{-p}(\partial^r \varphi), \quad d = 0, 1, 2, \dots. \tag{1.5}$$

Обобщенной функцией медленного роста на $\mathbb{R}^n$ называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{S}$. Множество $\mathcal{S}'$ всех обобщенных функций медленного роста, снабженное слабой топологией, является полным ЛВП (см. [11]). Значение функционала f на функции φ будем обозначать $< f, \varphi >$. Операторы $\pi(g)$, $g \in G$, распространяются на $\mathcal{S}'$, если положить

$$< \pi(g)f, \varphi > := < f, \pi(g^{-1})\varphi > .$$

Будем называть полное π–инвариантное ЛВП $\mathcal{F}$ пространством полиномиального роста, если

$$\mathcal{E}_* \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}',$$

причем вложения предполагаются непрерывными.

Приведем примеры пространств полиномиального роста. Через L_p^k ($k, p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$) обозначим БП, состоящее из всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых конечна норма

$$\mathcal{N}_{p,k}(f) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (\alpha(x))^{-k} \, dx \right)^{1/p},$$

где dx — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Пространство

$$L_*^p := \bigcup_{k>0} L_k^p$$

снабдим топологией индуктивного предела БП L_k^p. Пространства L_*^p ($p \geq 1$), C_*^d ($d = 0, 1, \ldots, \infty$) и $\mathcal{S}'$ являются пространствами полиномиального роста. Отметим, что обозначения $L_*^p, C_*^d, \mathcal{E}_*$ и некоторые другие использовались в другом смысле в работе [10] (там рассматривались функциональные пространства экспоненциального роста).

Основным результатом настоящей работы является полное описание инвариантных подпространств в функциональных пространствах полиномиального роста на $\mathbb{R}^n$ (см. далее теоремы 1 и 2). Используемые в работе методы аналогичны методам работ [5 – 10].

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное ЛВП, состоящее из функций на множестве M (если не оговорено противное, то все функции предполагаются комплекснозначными) с топологией, задаваемой системой полунорм $p_\alpha(\cdot)$, $\alpha \in I$. Пусть E — конечномерное унитарное пространство над $\mathbb{C}$

с эрмитовым скалярным произведением $< \cdot, \cdot >$. Тензорное произведение векторных пространств $\mathcal{F} \otimes E$ можно отождествить с множеством всех функций $F(x)$ на M, принимающих значения в E и удовлетворяющих условию

$$\forall \xi \in E \quad f_\xi(x) :=< F(x), \xi >\in \mathcal{F}.$$

Топология в пространстве $\mathcal{F} \otimes E$ задается системой полунорм

$$p_{\alpha,\xi}(F) := p_\alpha(< F(x), \xi >), \quad \xi \in E, \quad \alpha \in I,$$

и $\mathcal{F} \otimes E$ становится локально выпуклым пространством. Если $\mathcal{F}$ — полное ЛВП, то и $\mathcal{F} \otimes E$ будет полным пространством.

Пусть K — стационарная подгруппа точки o в группе G. Группа K изоморфна группе $SO(n)$. Любое конечномерное неприводимое представление группы $SO(n)$ определяется своим старшим весом, который отождествляется с набором целых чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ($m = [n/2]$ — целая часть числа $n/2$), удовлетворяющих условиям

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{m-1} \geq |\lambda_m| \quad \text{при } n = 2m, \tag{1.6}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0 \qquad \text{при } n = 2m + 1. \tag{1.7}$$

Пусть Λ — множество всех старших весов группы K. Через Λ_0 обозначим множество старших весов группы K вида $(l, 0, \ldots, 0)$, где $l \in \mathbb{Z}$ при $n = 2$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ при $n \geq 3$. Пусть $T^l(u)$ — неприводимое представление группы K со старшим весом $(l, 0, \ldots, 0)$, а E^l — пространство этого представления. В E^l фиксируем K-инвариантную эрмитову форму $< \xi, \eta >$, $\xi, \eta \in E^l$. Всюду далее будет предполагаться, что l пробегает множество $\mathbb{Z}_+$ при $n \geq 3$ и множество $\mathbb{Z}$ при $n = 2$.

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное полное π-инвариантное ЛВП, состоящее из функций на $\mathbb{R}^n$. Через $\mathcal{F}^{(l)}$ обозначим множество всех функций $F(x) \in \mathcal{F} \otimes E^l$, удовлетворяющих условию

$$F(ux) = T^l(u)F(x) \qquad \forall u \in K. \tag{1.8}$$

Множество $\mathcal{F}^{(l)}$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F} \otimes E^l$ и, следовательно, является полным ЛВП. В частности, возникают пространства $\mathcal{E}_*^{(l)}$, $C_*^{(l)}$, $C_*^{d(l)}$ и т. д. Для любого ИПП $H \subseteq \mathcal{F}$ через $H^{(l)}$ обозначим множество всех функций $f \in \mathcal{F}^{(l)}$ таких, что для всех $\xi \in E^l$ функции $f_\xi(x) =< F(x), \xi >$ принадлежат H. Очевидно, что $H^{(l)}$ будет замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{F}^{(l)}$.

Известно (см. [11]), что ИПП H однозначно восстанавливается по набору подпространств $H^{(l)}$, а именно H совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех функций $f_\xi(x)$ при $F \in H^{(l)}$, $\xi \in E^l$ и всевозможных l. Будем называть подпространства $H^{(l)}$ ячейками ИПП H или просто инвариантными ячейками. Для описания ИПП достаточно описать все его ячейки.

В дальнейшем пусть $\mathcal{F}$ — пространство полиномиального роста. Для любых чисел $\alpha \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{N}$ обозначим через $V_{\alpha,r}^{(l)}$ линейное подпространство, состоящее из всех функций $F(x) \in \mathcal{E}^{(l)}$, удовлетворяющих уравнению $(\Delta+\alpha^2)^r F = 0$, где $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2$ — оператор Лапласа на $\mathbb{R}^n$. Так как $V_{\alpha,r}^{(l)} = V_{-\alpha,r}^{(l)}$, то без ограничения общности можно считать, что $\alpha \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. В §3 будет показано, что $\dim V_{\alpha,r}^{(l)} = r$ и в пространстве $V_{\alpha,r}^{(l)}$ можно выбрать жорданов базис, т. е. такой базис $F_1, \ldots, F_r$, что $\Delta F_1 = -\alpha^2 F_1$ и $\Delta F_k = -\alpha^2 F_k + F_{k-1}$ при $k \geq 2$. Кроме того, $V_{\alpha,r}^{(l)} \subseteq \mathcal{E}_*^{(l)} \subset \mathcal{F}^{(l)}$. Дополнительно определим подпространство $V_{\alpha,\infty}^{(l)}$ как

$$V_{\alpha,\infty}^{(l)} := \bigcup_{k=1}^{\infty} V_{\alpha,k}^{(l)}.$$

Пусть $H^{(l)}$ — произвольная инвариантная ячейка в $\mathcal{F}^{(l)}$. Будем говорить, что число $\alpha \in \mathbb{R}_+$ принадлежит спектру ячейки $H^{(l)}$, если $V_{\alpha,r}^{(l)} \subset H^{(l)}$ при некотором $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Наибольшее из чисел $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, для которых $V_{\alpha,r}^{(l)} \subset H^{(l)}$, назовем кратностью числа α в спектре, обозначим эту кратность r_α. Обозначим через σ спектр ячейки $H^{(l)}$, причем будем считать, что каждое число α входит в σ с кратностью r_α.

Теорема 1. *Любая инвариантная ячейка $H^{(l)}$ совпадает с замыканием в $\mathcal{F}^{(l)}$ линейной оболочки подпространств $V_{\alpha,r}^{(l)}$, где α пробегает спектр σ, $r = r_\alpha$ — кратность числа α в σ.*

Можно дать и полное описание всевозможных спектров инвариантных ячеек. Пусть σ — произвольное подмножество в $\mathbb{R}_+$, причем каждое число $\alpha \in \sigma$ входит в σ с некоторой кратностью $r_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Пусть

$$\sigma_k := \{\alpha \in \sigma : r_\alpha = k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty.$$

Для того, чтобы подмножество σ было спектром некоторой ячейки $H^{(l)} \subset \mathcal{F}^{(l)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

(s1) *подмножество* σ_∞ *замкнуто в* $\mathbb{R}_+$;

(s2) *подмножество* $\sigma_{fin} := \sigma \setminus \sigma_\infty$ *не более чем счетное, причем все предельные точки этого множества (если они существуют) принадлежат множеству* σ_∞.

Пусть для каждого l в пространстве $\mathcal{F}^{(l)}$ зафиксирована ячейка $H^{(l)}$ некоторого ИПП, вообще говоря, зависящего от l, и пусть $\sigma(l)$ — спектр ячейки $H^{(l)}$.

Теорема 2. *Ячейки* $H^{(l)}$ *соответствуют одному инвариантному подпространству тогда и только тогда, когда при всех* l *спектры* $\sigma(l)$ *совпадают за исключением кратности* $r_0^{(l)}$ *числа* 0 *в этих спектрах, которая может изменяться в зависимости от* l *так, чтобы выполнялись условия:*

1) *при* $l \geq 0$ *кратность* $r_0^{(l+1)}$ *может равняться* $r_0^{(l)}$ *или* $r_0^{(l)} - 1$;

2) *при* $l \leq 0$ *кратность* $r_0^{(l-1)}$ *может равняться* $r_0^{(l)}$ *или* $r_0^{(l)} - 1$.

Если $n \geq 3$, *то нужно оставить только условие 1).*

В совокупности теоремы 1 и 2 дают полное описание инвариантных подпространств в функциональных пространствах полиномиального роста. Доказательство этих теорем приводится в §3. В §2 из теорем 1 и 2 выводится описание неприводимых и неразложимых инвариантных подпространств.

§ 2. Строение неприводимых и неразложимых ИПП

Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство полиномиального роста на $\mathbb{R}^n$. ИПП $H \subset \mathcal{F}$ называется неприводимым, если в H нет инвариантных подпространств кроме $\{0\}$ и всего H. ИПП H называется неразложимым, если $H \neq H_1 + H_2$, где H_1, H_2 — ненулевые ИПП такие, что $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ (здесь $H_1 + H_2$ — замыкание алгебраической суммы подпространств). В этом параграфе при помощи теорем 1 и 2 будет получено описание строения неприводимых и неразложимых ИПП. Строение каждого неприводимого или неразложимого ИПП будет описано как в терминах спектров ячеек этого подпространства, так и в более явном виде.

Пусть H — неприводимое ИПП в $\mathcal{F}$. Из теорем 1 и 2 следует, что для спектров $\sigma(l)$ неприводимого ИПП H есть две возможности:

(а) все спектры $\sigma(l)$ состоят из одного числа $\alpha > 0$ с кратностью 1;

(б) спектр $\sigma(0)$ состоит из числа 0 с кратностью 1, остальные спектры $\sigma(l)$ пустые.

В случае (а) соответствующее спектрам ИПП H состоит из всех функций $f \in \mathcal{E}_*$, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + \alpha^2)f = 0.$$

Обозначим это ИПП через $\mathcal{E}_*(\alpha)$. Из теорем регулярности для эллиптических уравнений легко получить, что $\mathcal{E}_*(\alpha)$ замкнуто в $\mathcal{S}'$, а следовательно, и в любом пространстве $\mathcal{F}$ полиномиального роста. В случае (б) ИПП H одномерно и состоит из всех констант.

Если $H = H_1 + H_2$, H_1 и H_2 — ИПП, то тогда $\sigma(l) = \sigma_1(l) \cup \sigma_2(l)$, где $\sigma_k(l)$ — спектр ячейки $H_k^{(l)}$ подпространства H_k. Легко видеть, что ИПП H неразложимо тогда и только тогда, когда спектры $\sigma(l)$ удовлетворяют одному из двух условий:

(а) Каждый спектр $\sigma(l)$ состоит из единственного числа $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (не зависящего от l) с некоторой конечной кратностью $r^{(l)}$. При $\alpha \neq 0$ кратности $r^{(l)}$ должны быть одинаковые для всех l, при $\alpha = 0$ кратности $r^{(l)}$ могут меняться так, чтобы выполнялись условия теоремы 2.

(б) Существует связное замкнутое подмножество $\sigma \subset \mathbb{R}_+$ такое, что $\sigma(l) = \sigma$ для всех l и все точки из $\sigma(l)$ имеют бесконечную кратность.

Отметим также, что любое связное замкнутое подмножество σ в $\mathbb{R}_+$ совпадает либо с отрезком $[a, b]$ $(0 \leq a < b < \infty)$, либо с точкой $\{a\} \subset \mathbb{R}_+$, либо с полуинтервалом $[a, \infty)$.

Приведем теперь более явное описание неразложимых ИПП.

(а1) Пусть каждый спектр $\sigma(l)$ состоит из единственного числа $\alpha \in \mathbb{R}_+$ с некоторой кратностью r, не зависящей от l. Соответствующее неразложимое ИПП H состоит из всех функций $f \in \mathcal{E}_*$, удовлетворяющих уравнению

$$(\Delta + \alpha^2)^r f = 0.$$

Обозначим это ИПП через $\mathcal{E}_*(\alpha, r)$. Из теорем регулярности для эллиптических уравнений следует, что $\mathcal{E}_*(\alpha, r)$ замкнуто в любом пространстве $\mathcal{F}$ полиномиального роста.

(a2) Пусть $n \geq 3$ и каждый спектр $\sigma(l)$ состоит из числа 0 с кратностью $d_l \in \mathbb{Z}_+$. При $n \geq 3$ числа l пробегают множество $\mathbb{Z}_+$, а кратности d_l должны удовлетворять условию 1) теоремы 2. Будем говорить, что неразложимое ИПП типа (a2) соответствует последовательности $\{d_l\}_{l \in \mathbb{Z}_+}$.

Заметим, что ИПП H, соответствующее последовательности

$$d_l = \begin{cases} k - l & \text{при } 0 \leq l \leq k, \\ 0 & \text{при } l > k \end{cases}$$

совпадает с минимальным ИПП, содержащим ячейку $V_{0,k}^{(0)}$. Ячейка $V_{0,k}^{(0)}$ совпадает с линейной оболочкой функций

$$1, \quad |x|^2, \quad |x|^4, \quad \ldots, \quad |x|^{2(k-1)}.$$

Следовательно, ИПП H совпадает с линейной оболочкой функций $\partial^r |x|^{2(k-1)}$ при $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $|r| \leq 2(k-1)$. Обозначим это ИПП через H_k.

Для любого целого m, удовлетворяющего условию $0 \leq m \leq k$, пусть $H_{k,m} := H_k \cap \mathcal{E}_*(0, m)$. Тогда ИПП $H_{k,m}$ неразложимо и определяется последовательностью

$$d_l = \begin{cases} m & \text{при } 0 \leq l \leq k - m, \\ k - l & \text{при } k - m < l \leq k, \\ 0 & \text{при } l > k. \end{cases}$$

Любое неразложимое ИПП типа (a2) является конечным объединением подпространств вида $H_{k,m}$ и подпространства $\mathcal{E}_*(0, d)$, где $d = \lim d_l$ при $l \to \infty$. Например, последовательность $d_0 = d_1 = 5$, $d_2 = d_3 = 4$, $d_4 = 3$, $d_l = 2$ при $l \geq 5$ соответствует неразложимому ИПП $H = H_{6,5} \cup H_{7,4} \cup \mathcal{E}_*(0, 2)$. Другой пример: пусть H — пространство всех полиномов на $\mathbb{R}^n$ степени ≤ 1, тогда $H = H_{2,1}$ и H соответствует последовательности $d_0 = d_1 = 1$, $d_l = 0$ при $l \geq 2$.

(a3) Пусть $n = 2$ и каждый спектр $\sigma(l)$ состоит из числа 0 с кратностью d_l. В этом случае l пробегает множество $\mathbb{Z}$ и последовательность $\{d_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ должна удовлетворять условиям 1) и 2) теоремы 2. Перейдем в $\mathbb{R}^2$ к комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, $i = \sqrt{-1}$. Пусть $\bar{z} = x_1 - ix_2$, $\partial_z := \frac{1}{2}(\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})$, $\partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_{x_1} - i\partial_{x_2})$, тогда $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 = 4\partial_z \partial_{\bar{z}}$.

Легко видеть, что ячейка $V_{0,k}^{(l)}$ при $l \geq 0$ совпадает с линейной оболочкой функций $z^{l+t}\bar{z}^t$, $t = 0, 1, \ldots, k-1$, а при $l < 0$ с линейной оболочкой функций $z^t\bar{z}^{t-t}$, $t = 0, 1, \ldots, k-1$.

Пусть
$$\mathcal{E}_*^+(0,k) := \{f \in \mathcal{E}_* : \partial_{\bar{z}}^k f = 0\}.$$

Подпространство $\mathcal{E}_*^+(0,k)$ является неразложимым ИПП, соответствующим последовательности

$$d_l = \begin{cases} k & \text{при } l \geq 0, \\ k+l & \text{при } (-k) \leq l \leq 0, \\ 0 & \text{при } l < -k. \end{cases}$$

Аналогично неразложимое ИПП

$$\mathcal{E}_*^-(0,k) := \{f \in \mathcal{E}_* : \partial_z^k f = 0\}$$

соответствует последовательности

$$d_l = \begin{cases} 0 & \text{при } k > l, \\ k-l & \text{при } 0 \leq l \leq k, \\ k & \text{при } l < 0. \end{cases}$$

Как и для случая пространств типа (а2), пусть H_k — минимальное ИПП, содержащее ячейку $V_{0,k}^{(0)}$. ИПП H_k совпадает с линейной оболочкой функций $\partial^r |x|^{2(k-1)}$ при $r \in \mathbb{Z}_+^n$, $|r| \leq 2(k-1)$, и соответствует последовательности

$$d_l = \begin{cases} k - |l| & \text{при } -k \leq l \leq k, \\ 0 & \text{при } |l| > k. \end{cases}$$

Пусть
$$H_{k,m}^+ := H_k \cap \mathcal{E}_*^+(0,m), \quad H_{k,m}^- := H_k \cap \mathcal{E}_*^-(0,m).$$

Любое неприводимое ИПП типа (а3) совпадает с конечным объединением некоторого числа подпространств типа $H_{k,m}^{\pm}$ и подпространств $\mathcal{E}_*^+(0,d_+)$ и $\mathcal{E}_*^-(0,d_-)$, где $d_+ = \lim d_l$ при $l \to +\infty$, $d_- = \lim d_l$ при $l \to -\infty$.

(б) Пусть σ — связное замкнутое подмножество в $\mathbb{R}_+$ и для любого l спектр $\sigma(l)$ совпадает с множеством σ, причем все точки этого спектра имеют бесконечную кратность. Пусть H — соответствующее этим спектрам неразложимое ИПП.

Для функций $f(x) \in \mathcal{S}$ преобразование Фурье определяется формулой

$$\hat{f}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{i(t,x)}\, dx, \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n,$$

где $(t, x) = t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n$.

Обычным образом (см. [11, 12]) преобразование Фурье продолжается на обобщенные функции $f \in \mathcal{S}'$. В частности, можно делать преобразование Фурье для функций из любого функционального пространства $\mathcal{F}$ полиномиального роста, так как $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}'$.

Неразложимое ИПП H состоит из всех функций $f \in \mathcal{F}$, для которых носитель преобразования Фурье $\hat{f}(t)$ содержится в множестве

$$T_\sigma := \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : |t| \in \sigma\}.$$

Отметим один частный случай, когда множество σ состоит из одной точки $0 \in \mathbb{R}_+$. В этом случае H совпадает с множеством обобщенных функций $f \in \mathcal{S}'$ таких, что преобразование Фурье $\hat{f}$ является обобщенной функцией с носителем в точке $o = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Как известно [12], такими функциями являются полиномы на $\mathbb{R}^n$, так что H в этом случае совпадает с множеством всех полиномов.

Сравним описание неразложимых ИПП в пространствах полиномиального роста и в пространствах неограниченного роста и экспоненциального роста (см. [10]). В пространствах неограниченного роста и экспоненциального роста отсутствуют неразложимые ИПП типа (б), а есть только неразложимые ИПП типа (а), но зато в этих пространствах числа $\alpha \in \sigma(l)$ могут быть комплексными.

§ 3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательства теорем 1 и 2 в основном аналогичны доказательствам соответствующих теорем из [10], поэтому будем приводить только основные элементы доказательств. Из теоремы 1 в [13] сразу получаем следующее

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — функциональные пространства полиномиального роста и $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$. Существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными подпространствами в $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, которое получается сопоставлением ИПП $H \subset \mathcal{F}_1$ его замыкания*

$W = [H]$ в $\mathcal{F}_2$. То же самое соответствие получается, если сопоставить ИПП $W \subset \mathcal{F}_2$ подпространство $H = W \cap \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_1$.

Из предложения 1, рассуждая как в [10], получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *В условиях предложения 1 для любого l существует взаимно однозначное соответствие между инвариантными ячейками в пространствах $\mathcal{F}_1^{(l)}$ и $\mathcal{F}_2^{(l)}$. Это соответствие получается сопоставлением ячейке $H^{(l)} \subseteq \mathcal{F}_1^{(l)}$ ее замыкания $[H^{(l)}]$ в $\mathcal{F}_2^{(l)}$. То же самое соответствие получается сопоставлением ячейке $W^{(l)} \subseteq \mathcal{F}_2^{(l)}$ ячейки $W^{(l)} \cap \mathcal{F}_1^{(l)} \subseteq \mathcal{F}_1^{(l)}$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Для доказательств теорем 1 и 2 достаточно доказать эти теоремы для какого-нибудь одного пространства $\mathcal{F}$ полиномиального роста.*

Действительно, если теоремы 1 и 2 справедливы для какого-нибудь пространства $\mathcal{F}$ полиномиального роста, то из предложений 1 и 2 и того, что $\mathcal{E}_* \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}'$, следует, что они справедливы и для пространств $\mathcal{E}_*$ и $\mathcal{S}'$, а следовательно, и для всех других пространств полиномиального роста.

Как в §1, пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — произвольный старший вес группы $K = SO(n)$, $m = [n/2]$. Обозначим через $T^\lambda(u)$ неприводимое представление группы K со старшим весом λ, через E^λ — пространство этого представления, через $< \cdot, \cdot >$ — инвариантную эрмитову форму в E^λ.

Пусть $F(x)$ — функция на $\mathbb{R}^n$, принимающая значения в векторном пространстве E^λ и удовлетворяющая условию

$$F(ux) = T^\lambda(u)\, F(x) \qquad \forall u \in K. \tag{3.1}$$

Из леммы 3 в [10] следует, что если функция $F(x)$ не равна тождественно нулю, то старший вес λ должен принадлежать множеству Λ_0, т. е. $\lambda = (l, 0, \dots, 0)$.

Обозначим через $\alpha(t)$ параллельный перенос на вектор $t\, e_n$, где $t \in \mathbb{R}$, $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. Через K_1 обозначим стационарную подгруппу вектора e_n в группе K. Подгруппа K_1 изоморфна группе $SO(n-1)$. Пусть

$$E_0^\lambda = \{\xi \in E^\lambda : \quad T^\lambda(u)\xi = \xi \quad \forall u \in K_1\}.$$

Известно (см. [10]), что $\dim E_0^\lambda = 1$ при $\lambda \in \Lambda_0$ и $\dim E_0^\lambda = 0$ при $\lambda \notin \Lambda_0$.

Лемма 1. *Пусть функция $F(x)$ принимает значения в векторном пространстве E^λ, $\lambda \in \Lambda_0$, и удовлетворяет условию (3.1), ξ_0 — ненулевой вектор из E_0^λ. Тогда существует комплекснозначная функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, для которой $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$. Функция $F(x)$ однозначно восстанавливается по функции $f(t)$.*

Доказательство. Пусть $u \in K_1$, тогда $u\,\alpha(t) = \alpha(t)\,u$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Проверим, что $F(\alpha(t)o) \in E_0^\lambda$. Действительно,

$$T^\lambda(u)\,F(\alpha(t)o) = F(u\,\alpha(t)o) = F(\alpha(t)\,uo) = F(\alpha(t)o).$$

Так как $\dim E_0^\lambda = 1$, то существует число $f(t) \in \mathbb{C}$, для которого $F(\alpha(t)o) = f(t)\xi_0$. Любую точку x из $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде $x = u\alpha(t)o$, где $u \in K$. Отсюда следует, что $F(x) = F(u\alpha(t)o) = T^\lambda(u)f(t)\xi_0$, следовательно, функция $F(x)$ однозначно определяется по функции $f(t)$. □

Рассмотрим случай, когда $n = 1$. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ — произвольное функциональное пространство полиномиального роста на $\mathbb{R}$, в частности, такими пространствами являются пространство $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного роста и пространства $\mathcal{E}_* = \mathcal{E}_*(\mathbb{R})$, $C_* = C_*(\mathbb{R})$. Линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$ является инвариантным подпространством, если $\mathcal{H}$ замкнуто в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ и инвариантно относительно сдвигов

$$f(x) \mapsto f(t+s) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Говорят, что ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$ *допускает спектральный синтез*, если оно совпадает с замыканием линейной оболочки содержащихся в нем экспоненциальных одночленов

$$\mathrm{e}^{i\alpha t}, \quad t\mathrm{e}^{i\alpha t}, \quad \dots, \quad t^k\mathrm{e}^{i\alpha t}, \quad \dots, \tag{3.2}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, k пробегает неотрицательные числа из промежутка $0 \le k < r_\alpha$, $r_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Пусть $\sigma = \{\alpha \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{i\alpha t} \in \mathcal{H}\}$, причем будем считать, что число α входит в набор σ с кратностью r_α (возможно, бесконечной). Набор σ называется *спектром* подпространства $\mathcal{H}$. Следующее предложение дает полное описание ИПП в функциональных пространствах полиномиального роста на $\mathbb{R}$.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ — произвольное функциональное пространство полиномиального роста на $\mathbb{R}$. Любое ИПП $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$ допускает спектральный синтез. Для того, чтобы подмножество $\sigma \subseteq \mathbb{R}$ было спектром некоторого ИПП в $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (s1) и (s2) из §1, только в условии (s1) нужно заменить $\mathbb{R}_+$ на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то из предложения 1 следует, что предложение 3 достаточно доказать для пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, а для пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ оно доказано в [14] (см. теор. 2, следств. 2 и теор. 4 из [14]). □

Будем называть функциональное пространство $\mathcal{F}$ на $\mathbb{R}$ *симметричным*, если из $f(t) \in \mathcal{F}$ следует, что $f(-t) \in \mathcal{F}$ и отображение $f(t) \mapsto f(-t)$ из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{F}$ непрерывно. Пусть

$$\mathcal{F}_e = \{f(t) \in \mathcal{F} : f(-t) = f(t)\}, \quad \mathcal{F}_o = \{f(t) \in \mathcal{F} : f(-t) = -f(t)\},$$

т. е. $\mathcal{F}_e$ — подпространство всех четных функций, а $\mathcal{F}_o$ — подпространство всех нечетных функций. Если $\mathcal{F}$ — симметричное пространство, то $\mathcal{F}$ разлагается в прямую сумму подпространств $\mathcal{F}_e$ и $\mathcal{F}_o$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H}$ в $\mathcal{F}_e$ или в $\mathcal{F}_o$ будем называть *обобщенно инвариантным подпространством* (ОИПП), если оно инвариантно относительно преобразований

$$f(t) \mapsto \tfrac{1}{2}(f(t+s) + f(t-s)) \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ — произвольное симметричное пространство полиномиального роста. ОИПП в $\mathcal{F}_o$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\sigma \subseteq \mathbb{R}_+$ (каждая точка $\alpha \in \sigma$ входит в σ с некоторой кратностью $r_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$), удовлетворяющими условиям (s1) и (s2) из §1. При этом соответствии подмножеству σ соответствует ОИПП $\mathcal{H}$, которое совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки функций*

$$\sin \alpha t, \quad t\cos \alpha t = \partial_\alpha \sin \alpha t, \quad \dots, \quad \partial_\alpha^k \sin \alpha t, \quad \dots, \tag{3.3}$$

где ∂_α — производная по параметру α, k пробегает неотрицательные целые числа из промежутка $0 \le k < r_\alpha$. При $\alpha = 0$ функции (3.3) *нужно заменить на*

$$t, \quad t^3, \quad \ldots, \quad t^{2k+1}, \quad \ldots, \tag{3.4}$$

$0 \le k < r_0$. *Подмножество σ будем называть спектром ОИПП $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Введем отображение

$$P : h(t) \mapsto \tfrac{1}{2}(h(t+s) + h(t-s)).$$

Если $\mathcal{W}$ — симметричное ИПП в $\mathcal{F}$, то подпространство $\mathcal{H} = P(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{F}_o$ будет обобщенно инвариантным подпространством в $\mathcal{F}_o$. Покажем, что любое ОИПП в $\mathcal{F}_o$ может быть получено таким способом. Действительно, если $\mathcal{H}$ — ОИПП в $\mathcal{F}_o$, то пусть $\mathcal{W}$ — замыкание в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех функций $h(t+s)$ при $h(t) \in \mathcal{H}$, $s \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{W}$ — симметричное ИПП в $\mathcal{F}$ и очевидно, что $P(\mathcal{W}) = \mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{H} = P(\mathcal{W})$, где $\mathcal{W}$ — симметричное ИПП в $\mathcal{F}$. По предложению 3 ИПП $\mathcal{W}$ определяется своим спектром $\tilde{\sigma} \subseteq \mathbb{R}$, пусть $\tilde{r}_\alpha$ — кратность точки $\alpha \in \tilde{\sigma}$. Из симметричности $\mathcal{W}$ следует, что если $\alpha \in \tilde{\sigma}$, то $(-\alpha) \in \tilde{\sigma}$ и $\tilde{r}_\alpha = \tilde{r}_{-\alpha}$. Можно также считать, что кратность числа 0 в $\tilde{\sigma}$ четная или бесконечная, так как если $\tilde{r}_0 = 2d - 1$, то можно заменить ИПП $\mathcal{W}$ на ИПП $\mathcal{W}'$, которое получается из $\mathcal{W}$ увеличением кратности числа 0 в спектре на 1. При этом очевидно, что $P(\mathcal{W}) = P(\mathcal{W}')$. Используя предложение 3, легко видеть, что соответствие $\mathcal{W} \mapsto \mathcal{H} = P(\mathcal{W})$ является взаимно однозначным соответствием между симметричными ИПП в $\mathcal{F}$, удовлетворяющими дополнительному условию четности числа $\tilde{r}_0$, и между ОИПП в $\mathcal{F}_o$.

Для завершения доказательства предложения 4 остается заметить, что при отображении P функции (3.2) переходят, с точностью до ненулевого числового множителя, в функции (3.3) при $\alpha \neq 0$ и в функции (3.4) при $\alpha = 0$. Спектр σ ОИПП $\mathcal{H} = P(\mathcal{W})$ совпадает с множеством $\tilde{\sigma} \cap \mathbb{R}_+$, причем число $\alpha > 0$ входит в σ с кратностью $r_\alpha = \tilde{r}_\alpha$, а число 0 входит с кратностью $r(0) = \tilde{r}_0/2$. $\square$

Замечание. *Аналогично предложению 4 можно описать строение ОИПП в пространстве $\mathcal{F}_e$, где $\mathcal{F}$ — произвольное функциональное пространство полиномиального роста на $\mathbb{R}$. ОИПП в $\mathcal{F}_e$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами $\sigma \subseteq \mathbb{R}_+$, удовлетворяющими условиям (s1) и (s2). При этом соответствии набору σ сопоставляется ОИПП $\mathcal{H}$, совпадающее с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной* *оболочки функций*

$$\cos\alpha t, \quad \partial_\alpha \cos\alpha t, \quad \ldots, \quad \partial_\alpha^k \cos\alpha t, \quad \ldots,$$

где $\alpha \in \sigma$, $0 \le k < r_\alpha$, *если* $\alpha \neq 0$, *и функций*

$$1, \quad t^2, \quad \ldots, \quad t^{2k}, \quad \ldots,$$

где $0 \le k < r_0$, *если* $\alpha = 0$.

Доказательство этих утверждений проводится аналогично доказательству предложения 4.

Как и в [10], теорему 1 будем доказывать отдельно для случая $l = 0$, а затем для произвольного l. Пусть $l = 0$. В этом случае $\dim E^0 = 1$, представление $T^0(u)$ единичное и пространство $\mathcal{F}^{(0)}$ состоит из комплекснозначных функций $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условию

$$f(ux) = f(x) \quad \forall u \in K.$$

Теорему 1 достаточно доказать для пространства $C_*^{(0)}$. Легко видеть, что отображение

$$D^0 : f(x) \mapsto h(t) = f(\alpha(t)o)$$

является изоморфизмом топологического векторного пространства $C_*^{(0)} = C_*^{(0)}(\mathbb{R}^n)$ на пространство $C_*(\mathbb{R})_e$. Как в [10] (см. доказательство теоремы 1), доказывается, что замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C_*(\mathbb{R})_e$ имеет вид $\mathcal{H} = D^0(H^{(0)})$ для некоторой инвариантной ячейки $H^{(0)} \subseteq C_*^{(0)}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ инвариантно относительно обобщенных сдвигов τ^s (обозначения из [10]) Дельсарта—Левитана, соответствующих оператору Бесселя $\mathcal{D}_t = \partial_t^2 + (n-1)t^{-1}\partial_t$.

Рассуждая как в работе [15], получаем, что замкнутые линейные подпространства $\mathcal{H} \subseteq C_*(\mathbb{R})_e$, инвариантные относительно обобщенных сдвигов τ^s, находятся во взаимно однозначном соответствии с наборами $\sigma \subseteq \mathbb{R}_+$, удовлетворяющими условиям (s1) и (s2). При этом соответствии набору σ сопоставляется подпространство, совпадающее с замыканием в $C_*(\mathbb{R})$ линейной оболочки функций

$$j_{n-1}(\alpha t), \quad t\, j'_{n-1}(\alpha t), \quad \ldots, \quad t^k j^{(k)}_{n-1}(\alpha t), \quad \ldots, \tag{3.5}$$

где $\alpha \in \sigma$, $0 \le k < r_\alpha$, $j_{n-1}(\alpha t)$ — четная собственная функция оператора $\mathcal{D}_t$, нормированная условием $j_{n-1}(0) = 1$. При $\alpha = 0$ функции

(3.5) должны быть заменены на

$$1, \quad t^2, \quad \ldots, \quad t^{2k}, \quad \ldots. \tag{3.6}$$

Доказательство этого результата получается аналогично доказательству теоремы 1.1 в [15], где рассматривались другие функциональные пространства, только при этом вспомогательное описание ОИПП в пространстве $\mathcal{L}_*$ из [15] заменяется описанием ОИПП из предложения 4.

Остается заметить, что прообразы функций (3.5) и (3.6) при отображении D^0 образуют базис в пространстве $V_{\alpha,r}^{(0)}$, $r = r_\alpha$, а так как вектор $(D^0)^{-1}\,(j_{n-1}(\alpha t))$ является единственным собственным вектором для оператора Δ в пространстве $V_{\alpha,r}^{(0)}$, то в этом пространстве существует и жорданов базис, что завершает доказательство теоремы 1 для случая $l = 0$.

Доказательство теоремы 1 для $l \neq 0$ и доказательство теоремы 2 проводятся так же, как доказательства соответствующих теорем в [10].

Résumé

Let G be a transitive group of transformations of a set M, $\mathcal{F}$ be some locally convex space consisting of complex–valued functions on M,

$$\pi(g) : f(x) \mapsto f(g^{-1}x), \quad f(x) \in \mathcal{F},$$

be the quasiregular representation of G. A linear subspace $H \subseteq \mathcal{F}$ we call an invariant subspace if H is closed and invariant with respect to the representation π. In the paper we consider the case when M is n-dimensional Euclidean space R^n, G is the group of all orientation–preserving isometries. The function spaces are spaces of polynomial growth, for example $\mathcal{F} = \mathcal{S}'$ is the space of tempered distributions on R^n. The main result of the paper is the complele description of invariant subspaces of this function spaces. In particular we obtain the description of irreductible and indecomposable subspaces.

Литература

[1] Ehrenpreis L., Maytner F.J. *Some properties of the Fourier transform on the semisimple Lie groups,* III// Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90. P. 431–484.

[2] Рашевский П. К. *Описание инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах* // Труды ММО. 1979. Т. 38. С. 139–185.

[3] Berenstein C. A. *Spectral synthesis on symmetric spaces*// Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 1–25.

[4] Wawrzynczyk A. *Spectral analisis and synthesis on symmetric spaces*// J. Math. Ann. and Appl. 1987. V. 127. P. 1–17.

[5] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах.* I// Известия РАН. Серия математическая. 1995. Т. 59. Ѓ 5. С. 127–172.

[6] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на* n*–мерном пространстве Лобачевского*// Мат. сборник. 1988. Т. 137. Ѓ 4. С. 435–461.

[7] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе движений евклидовой плоскости*// Сибирский матем. журн. 1990. Т. 31. Ѓ 3. С. 135–146.

[8] Платонов С. С. *О спектральном синтезе на симметрических пространствах ранга 1*// Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. Вып. 4. С. 182–195.

[9] Platonov S. S. *Invariant subspaces in certain function spaces on Euclidean space*// Math. Scandinavica. 1995. V. 76. P. 115–138.

[10] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на евклидовом пространстве*// Труды ПГУ. Сер. матем. 1995. Вып. 2. С. 92–112.

[11] Владимиров В. С. *Обобщенные функции и их применения в математической физике.* М.: Наука, 1979.

[12] Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1981.

[13] Платонов С. С. *О взаимно однозначном соответствии между инвариантными подпространствами в некоторых пространствах* // Труды ПГУ. Сер. матем. Вып. 1. 1993. С. 54–60.

[14] Платонов С. С. *О спектральном синтезе в одном топологическом векторном пространстве целых функций*// Труды ПГУ. Сер. матем. Вып. 3. 1996. С. 132–152.

[15] Платонов С. С. *Подпространства, инвариантные относительно обобщенных сдвигов*// Мат. заметки. 1990. Т. 47. Вып. 6. С. 91–101.