Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 4, 1997

УДК 517

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Мосягин

В статье доказана теорема существования единственного решения нелокальной краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения с параметром в локально выпуклом пространстве.

Пусть (E, τ) — секвенциально полное хаусдорфово локально выпуклое линейное топологическое пространство, $\Gamma = \{p\}$ — система полунорм на E,определяющая топологию τ. Следуя работе [1], линейный оператор $F : E \to E$ будем называть Γ-конечным, если существует такая константа $M < \infty$, что для всех $y \in E$ и $p \in \Gamma$ выполняется неравенство $p(F(y)) \leq Mp(y)$.

В пространстве E рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \tag{1}$$

$$x(0) + g(x) = x_0, \tag{2}$$

$$x(T) = X, \tag{3}$$

где параметр $u \in E$; x_0, X — заданные элементы из $E, T > 0$, $f : [0, T] \times E \times E \to E,\ g : C([0, T], E) \to E$ (f, g — заданные операторы, удовлетворяющие некоторым условиям; $C([0, T], E)$ — множество всех непрерывных функций на $I = [0, T]$ со значениями в E).

Рассматривая далее $\tilde{E} = C(I, E)$ как линейное пространство, определим на $\tilde{E}$ систему полунорм $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{p}\}$, где

$$\tilde{p}(z) = \sup_{t \in I} p(x(t)), x \in \tilde{E}, p \in \Gamma.$$

Пара $(\tilde{E}, \tilde{\Gamma})$ — секвенциально полное хаусдорфово локально выпуклое пространство.

Укажем достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3) в пространстве E.

Теорема. *Пусть выполнены условия* H1)–H4)*:*

H1) *оператор f непрерывен из $I \times E \times E$ в E и удовлетворяет условию Липшица*

$$p(f(t, x_1, u_1) - f(t, x_2, u_2)) \leq K_p(p(x_1 - x_2) + p(u_1 - u_2)), \tag{4}$$
$$K_p > 0, \quad \forall (t, x_1, u_1), (t, x_2, u_2) \in I \times E \times E, \quad p \in \Gamma;$$

H2) *оператор g удовлетворяет условию Липшица*

$$p(g(x_1) - g(x_2)) \leq L_p \tilde{p}(z_1 - z_2), L_p > 0, \forall z_1, z_2 \in \tilde{E}, p \in \Gamma; \tag{5}$$

H3) *существует такой линейный непрерывный оператор A, действующий в E , что для любой функции $x(s)$ из $\tilde{E}$ и любых $u_1, u_2 \in E$ выполнено неравенство*

$$p[\int_0^T (f(s, x(s), u_1) - f(t, x(s), u_2))ds - A(u_1 - u_2)] \leq$$
$$\leq \varepsilon p(u_1 - u_2), \quad \varepsilon > 0, \quad p \in \Gamma. \tag{6}$$

Кроме того, предполагаем, что оператор A имеет Γ*-конечный обратный оператор A^{-1},*

$$p(A^{-1} y) \leq N p(y), \forall y \in E, p \in \Gamma,$$

причем

$$\varepsilon N = \varepsilon_0 < 1; \tag{7}$$

H4) *справедливы неравенства*

$$(K_p T + L_p)\left(1 + \frac{N}{1 - \varepsilon_0} K_p T\right) = q_p < 1, p \in \Gamma. \tag{8}$$

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение.

Доказательство. Разрешимость задачи (1)–(3) будем доказывать методом последовательных приближений. За нулевое приближение возьмем любую непрерывную функцию $x^{(0)}(s)$ из $\tilde{E}$.

Докажем, что уравнение

$$x_0 - g(x^{(0)}) + \int_0^T f(s, x^{(0)}(s), u)ds = X \tag{9}$$

разрешимо в E. Преобразуем уравнение (9) к виду

$$u = u + A^{-1}(X - x_0) + A^{-1}g(x^{(0)}) - A^{-1}\int_0^T f(s, x^{(0)}(s), u)ds \equiv Bu. \tag{10}$$

Из неравенств (6), (7) следует,что

$$p(Bu_1 - Bu_2) \le \varepsilon_0 p(u_1 - u_2), \quad \varepsilon_0 < 1, \quad \forall u_1, u_2 \in E, \quad p \in \Gamma.$$

Следовательно, уравнение (10) имеет единственное решение в E. Обозначим его через $u^{(0)}$.

В качестве первого приближения возьмем

$$x^{(1)}(t) = x_0 - g(x^{(0)}) + \int_0^t f(s, x^{(0)}(s), u^{(0)})ds, \quad t \in I. \tag{11}$$

Видно,что

$$x^{(1)}(0) = x_0 - g(x^{(0)}), \quad x^{(1)}(T) = X.$$

Рассмотрим уравнение

$$x_0 - g(x^{(1)}) + \int_0^T f(s, x^{(1)}(s), u)ds = X. \tag{12}$$

Однозначная разрешимость уравнения (12) в пространстве E устанавливается так же, как и разрешимость уравнения (9). Пусть $u^{(1)}$ — решение уравнения (12).

Второе приближение определим так:

$$x^{(2)}(t) = x_0 - g(x^{(1)}) + \int\limits_0^t f(s, x^{(1)}(s), u^{(1)})ds, \quad t \in I. \tag{13}$$

Функция $x^{(2)}(t)$, определенная формулой (13), удовлетворяет соотношениям

$$x^{(2)}(0) = x_0 - g(x^{(1)}), \quad x^{(2)}(T) = X.$$

Пусть уже построено $(n-1)$ приближение, тогда n-ое приближение определим следующим образом :

$$x^{(n)}(t) = x_0 - g(x^{(n-1)}) + \int\limits_0^t f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)})ds, \quad t \in I, \tag{14}$$

где $u^{(n-1)}$ — решение уравнения

$$x_0 - g(x^{(n-1)}) + \int\limits_0^T f(s, x^{(n-1)}(s), u)ds = X.$$

Снова видим, что

$$x^{(n)}(0) = x_0 - g(x^{(n-1)}), \quad x^{(n)}(T) = X.$$

Установим сходимость последовательностей $\{x^{(n)}\}$ и $\{u^{(n)}\}$. Имеем $(n \geq 2)$:

$$\begin{gathered} x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t) = (g(x^{(n-2)}) - g(x^{(n-1)}))+ \\ + \int\limits_0^t (f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}, u^{(n-1)}))ds+ \\ + \int\limits_0^t (f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)}))ds. \end{gathered} \tag{15}$$

При $t = T$ из (15) следует, что для любого $p \in \Gamma$

$$p(\int\limits_0^T (f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)}))ds) =$$

$$= p(\int_0^T (f(s, x^{(n-1)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}))ds+$$

$$+(g(x^{(n-2)}) - g(x^{(n-1)}))) \leq (K_p T + L_p) \max_{t \in I} p(x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)).$$

Оценим левую часть неравенства (16) снизу, используя неравенства (6) и (7). Для любого $p \in \Gamma$ имеем

$$p(\int_0^T (f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-1)}) - f(s, x^{(n-2)}(s), u^{(n-2)}))ds - A(u^{(n-1)} -$$

$$-u^{(n-2)}) + A(u^{(n-1)} - u^{(n-2)})) \geq \frac{1-\varepsilon_0}{N} p(u^{(n-1)} - u^{(n-2)}). \qquad (17)$$

Из неравенств (16) и (17) получаем неравенство

$$p(u^{(n-1)} - u^{(n-2)}) \leq$$
$$\leq \frac{N(K_p T + L_p)}{1-\varepsilon_0} \max_{t \in I} p(x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)), \quad p \in \Gamma. \qquad (18)$$

Теперь из соотношений (15) и (18) приходим к неравенству

$$p(x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)) \leq$$
$$\leq (K_p T + L_p) \left(1 + \frac{N K_p T}{1-\varepsilon_0}\right) \max_{t \in I} p(x^{(n-1)}(t) - x^{(n-2)}(t)), \quad p \in \Gamma.$$

Отсюда

$$\Delta_n^{(p)} = \max_{t \in I} p(x^{(n)}(t) - x^{(n-1)}(t)) \leq q_p \Delta_{(k-1)}^{(p)}, \quad p \in \Gamma, \qquad (19)$$

где по условию (8) $q_p < 1$. Неравенство (19) показывает, что $\Delta_n^{(p)} \leq \leq q_p^{(n-1)} \Delta_1$, что равносильно равномерной сходимости последовательности $\{x^{(n)}(t)\}$. Сходимость последовательности $\{u^{(n)}\}$ вытекает из неравенства (18). Пусть

$$x(t) = \lim_{n \to \infty} x^{(n)}(t), \quad u = \lim_{n \to \infty} u^{(n)}.$$

При $n \to \infty$ из (14) получаем равенство

$$x(t) = x_0 - g(x) + \int_0^t f(s, x(s), u)ds, \quad t \in I.$$

Очевидно $\{x(t), u\}$ и является решением задачи (1)–(3). Единственность решения этой задачи доказывается обычным образом. $\square$

Résumé

In this paper we consider the existence of a solution of nonlocal boundary value problem for a nonlinear differential equation in lically convex space.

Литература

[1] Moore R. T. *Banach algebra of operators on locally covex spaces*//Bull. Amer. Math. Soc. 1969. 75. P. 68–73.