Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 5, 1998

УДК 511

М. Б. Хрипунова

СТЕПЕНИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ И ЧИСЛА ДЕЛИТЕЛЕЙ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Работа посвящена задаче, относящейся к аддитивной проблеме делителей. Получена асимптотическая формула для сумм (2) и (3) при $g(n) = \omega(n)$ и $g(n) = \Omega(n)$.

Одной из известных задач в теории чисел является аддитивная проблема делителей, которая состоит в нахождении асимптотики при $N \to \infty$ сумм вида

$$\sum_{|a|<n<N} \tau_k(n)\tau_l(n+a), \qquad \sum_{n<N} \tau_k(n)\tau_l(N-n),$$

где $a \neq 0$ — целое число, $\tau_k(n)$ — число представлений n в виде произведения k натуральных сомножителей. Если $k = 2$, то $\tau_2(n)$ обозначают $\tau(n)$ и $\tau(n) = \sum\limits_{d|n} 1$. В настоящее время проблема решена при $l = 2$ и любом k (см. [1]).

Много работ посвящено обобщению этой проблемы. В них исследуется поведение при $N \to \infty$ сумм вида

$$\sum_{n<N}{}' f(n)\tau\left(|an+b|\right), \tag{1}$$

где сумма $\sum'$ распространяется на те n, для которых $an + b \neq 0$. Например, в работах [2], [3] изучаются эти суммы при условии, что $f(n)$ — мультипликативная функция из некоторого класса. Одним из

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант N 96-01-00502.

методов решения этих задач является доказательство теорем о равномерном распределении $f(n)$ по прогрессиям с модулями до $\frac{\sqrt{N}}{\log^A N}$, то есть результатов типа теоремы А. И. Виноградова—Бомбьери. Именно так решена задача для суммы (1) в работах [4], [5], [6] в случае, когда $f(n)$ — характеристическая функция множества чисел с $g(n) = k$, где $g(n) = \Omega(n)$, либо $g(n) = \omega(n)$, то есть $f(n) = 1$, если $g(n) = k$, и нулю в противном случае. Здесь и далее $\Omega(n)$ и $\omega(n)$ — число простых делителей n с уччтом и без учета их кратности соответственно.

Полученные в [4], [5], [6] результаты равномерны по k при $k \leq$ $\leq (2-\varepsilon)\ln_2 N$, где $\ln_2 N = \ln(\ln N)$. Это позволяет найти асимптотику при $N \to \infty$ сумм

$$T_1(N,\sigma,g) = \sum_{n<N} (g(n))^\sigma \tau(n-1), \tag{2}$$

$$T_2(N,\sigma,g) = \sum_{n<N} (g(n))^\sigma \tau(N-n), \tag{3}$$

равномерную по σ при $|\sigma| \leq \sqrt[3]{\ln_2 N}\frac{1}{3}$. Это и является целью настоящей работы.

Если $\sigma = r$, r — натуральное число, $g(n) = \omega(n)$, то, найдя асимптотику суммы (3), мы тем самым найдчм асимптотику для числа представлений N в виде $N = mn + [p_1,\ldots,p_r]t$, где n, m, t — натуральные числа, $p_1,\ldots,p_r$ — простые числа, $[p_1,\ldots,p_r] = (p_1,\ldots,p_r)$.

Если $\sigma = 1$, то $g(n)$ — аддитивная функция и можно показать, что $\omega(n)$, $\Omega(n)$ хорошо распределены по прогрессиям с модулями почти до $\sqrt{x}$, и обычным способом найти асимптотики сумм (2) и (3). Однако этот способ не подходит, например, уже при $\sigma = -1$.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $|\sigma| \leq (1/3)(\ln_2 N)^{1/3}$. Тогда при $N \to \infty$, $i = 1,2$*

$$T_i(N,\sigma,g) = N(\ln N)(\ln_2 N)^\sigma \left(1 + O\left(\frac{|\sigma| + \ln_3 N}{(\ln_2 N)^{\frac{1}{3}}}\right)\right)$$

равномерно по σ, где $\ln_3 N = \ln\ln_2 N$.

Замечание. . Неравенство Харди-Рамануджана (см., например, [9])

$$\sum_{n,N} (g(n) - \ln_2 N)^2 = O(\ln_2 N)$$

показывает, что функция $g(n)$ «близка» к $\ln_2 N$. То же отражает и теорема 1.

Необходимые из работ [4,5,6] результаты объединим в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть*

$$S_1(N,k,g) = \sum_{\substack{n<N\\ g(n)=k}} \tau(n-1), \quad S_2(N,k,g) = \sum_{\substack{n<N\\ g(n)=k}} \tau(N-n).$$

Тогда при $k \le (2-\varepsilon)\ln N, \quad 0<\varepsilon<1, \quad i=1,2$

$$S_i(N,k,g) = CN\frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!}F\left(\frac{k}{\ln_2 N}, g\right)\times$$
$$\times E_i(N,g)E_i\left(N, \frac{k}{\ln_2 N}, g\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\right)\right),$$

где C *— постоянная,*

$$C = \prod_p \left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right),$$

$$F(z,\Omega) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^z \cdot \left(1-\frac{z}{p}\right)^{-1} \cdot \left(1-\frac{z}{p^2-p+1}\right),$$

$$F(z,\omega) = \frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^z \cdot \left(1+\frac{z}{p-1}\left(1-\frac{p}{p^2-p+1}\right)\right),$$

$$E_1(N,g)=1, \quad E_1(N,z,g)=1, \quad E_2(N,g) = \prod_{p|N}\frac{(p-1)^2}{p^2-p+1},$$

$$E_2(N,z,\Omega) = \prod_{p|N}\left(1-\frac{z}{p^2-p+1}\right)\times$$
$$\times\left(1+\sum_{r<\alpha(N,p)}\frac{z}{p^r}+\frac{p^2-p+1-z}{(p-1)^2}\cdot\frac{z^{\alpha(N,p)}}{p^{\alpha(N,p)}}\right),$$

$$E_2(N,z,\omega) = \prod_{p|N}\left(1+\frac{zp}{(p-1+z)(p-1)}\right)\times$$

$$\times \left(1+\frac{z}{p-1}\left(1-\frac{p}{(p^2-p+1)}\right)\right)^{-1}\cdot\left(1+\frac{z}{p-1}\right),$$

$\alpha(N,p)$ — наибольший показатель степени, в которой p делит N, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Следующая лемма представляет собой теорему Шиу [7].

Лемма 2. *Пусть $f(n)\ 0$ — такая мультипликативная функция, что $f(p^r)\le A^r$ для всех p и $r\ge 1$, A — фиксированная постоянная, $f(n)=O_\varepsilon(n^\varepsilon)$, тогда при $k<x^{1-\alpha}$, $0<\alpha<1/2$*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv\ \pmod k}} f(n)=O\left(\frac{x}{\varphi(k)\cdot\ln x}\cdot\exp\left(\sum_{\substack{p\le x\\ p\nmid k}}\frac{f(p)}{p}\right)\right)$$

равномерно по $k,a,(k,a)=1,\varphi(n)$ — функция Эйлера.

Доказательство теоремы 1. Отметим, что случай с суммой (3) при $g(n)=\Omega(n)$ наиболее сложный, поэтому, проведчм подробное доказательство для него. При $g(n)=\omega(n)$ сумма (3) исследуется аналогично. Для сумм (2) доказательство теоремы более простое. Это следует из вида функций в лемме 1, которая играет основную роль при доказательстве теоремы.

Имеем:

$$T_2(N,\sigma,\Omega)=\sum_k k^\sigma\sum_{\substack{n<N\\ \Omega(n)=k}}\tau(N-n).$$

Разобьем сумму $T_2(N,\sigma,\Omega)$ на три: $T_{21}(N,\sigma,\Omega)$ по $k\le k_1$, $T_{22}(N,\sigma,\Omega)$ по $k\ge k_2$ и $T_{23}(N,\sigma,\Omega)$ по $k_1<k<k_2$, где $k_1=(2-\varepsilon)\ln_2 N$, $k_2= =\theta\ln_2 N$, $0<\varepsilon<1$, $\theta>2$.

Покажем, что $T_{22}(N,\sigma,\Omega)$ и $T_{23}(N,\sigma,\Omega)$ не дают вклада в главный член асимптотики. Оценим T_{22}. Учитывая, что при $n<N$ функция $\Omega(n)\le\dfrac{\ln N}{\ln 2}$, получим:

$$T_{22}(N,\sigma,\Omega)\le(\ln_2 N)^{3|\sigma|}\cdot\sum_{k_2\le k\le(\ln_2 N)^3}\ \sum_{\substack{n<N\\ \Omega(n)=k}}\tau(N-n)+$$
$$+\left(\tfrac{\ln N}{\ln 2}\right)^{|\sigma|}\cdot\textstyle\sum_{k>(\ln_2 N)^3}\sum_{\substack{n<N\\ \Omega(n)=k}}\tau(N-n).$$

Применяя неравенство Коши, получим, что при $1 < q < \sqrt{2}$ справедливо неравенство:

$$\sum_{k\geq T} \sum_{\substack{n<N\\ \Omega(n)=k}} \tau(N-n) \leq q^{-T} \sum_{n<N} q^{\Omega(n)}\tau(N-n) \leq$$
$$\leq q^{-T}\left(\sum_{n<N} q^{2\Omega(n)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n<N} \tau^2(n)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следующие две оценки можно найти, например, в [9]:

$$\sum_{n<N} q^{2\Omega(n)} = O(N\cdot(\ln N)^{q^2-1}), \quad \sum_{n<N}\tau^2(n) = O(N\cdot(\ln N)^3).$$

При $(\theta-1)\ln q > (q^2+2)/2+1$, $|\sigma| \leq (\ln_2 N)^{1/3}$ имеем:

$$T_{22}(N,\sigma,\Omega) = O\Bigg(\Bigg(q^{-\theta \ln_2 N (\ln_2 N)^{3|\sigma|}} + q^{-(\ln_2 N)^3}\times$$
$$\times\left(\frac{\ln N}{\ln 2}\right)^{|\sigma|}\Bigg) N(\ln N)^{(q^2+2)/2}\Bigg) = O\left(\frac{N}{\ln N}\right).$$

Теперь оценим $T_{23}(N,\sigma,\Omega)$. При $|\sigma| \leq (\ln_2 N)^{1/3}$, $1 < q < \sqrt{2}$ имеем:

$$T_{23}(N,\sigma,\Omega) \leq 2(\theta\ln_2 N)^{|\sigma|} \sum_{d\leq\sqrt{N}} q^{-(2-\varepsilon)\ln_2 N}\times$$
$$\times \sum_{\substack{n<N\\ n\equiv N (\mathrm{mod}\ d)}} q^{\Omega(n)} = O\left(\exp(2(\ln_2 N)^{\frac{1}{3}}\cdot \ln_3 N - (2-\varepsilon)\ln q\cdot\ln_2 N\right)\times$$
$$\times \sum_{\substack{d\delta\leq\sqrt{N}\\ \delta|N,\ \left(d,\ \frac{N}{\delta}\right)=1}} q^{\Omega(\delta)} \sum_{\substack{n\leq\ \frac{N}{\delta}\\ n\equiv\ \frac{N}{\delta}\left(\mathrm{mod}\ d\right)}} q^{\Omega(n\delta)-\Omega(\delta)}.$$

С помощью леммы 2 получаем, что сумма по n есть

$$O\Bigg(\frac{1}{\varphi(d)}\cdot\frac{N}{\delta}\cdot\frac{1}{\ln\frac{N}{\delta}}\exp\left(\sum_{p<N}\frac{q}{p}\right)\Bigg) = O\left(\frac{N(\ln N)^{q-1}}{\varphi(d)\delta}\right).$$

Учитывая, что при $1 < q < \sqrt{2}$ справедливо неравенство $\ln q < (q-1) - \frac{(q-1)^2}{2}$, и выбрав q таким, что

$$(q-1) - (2-\varepsilon)(q-1) + (2-\varepsilon)\frac{(q-1)^2}{2} < -\frac{q-1}{4},$$

получим:

$$T_{23}(N,\sigma,\Omega) = O\left(N(\ln N)^{1-\varepsilon}\sum_{\delta/N}\frac{q^{\Omega(\delta)}}{\delta}\right) = O\left(N(\ln N)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

Отметим, что в последней оценке мы воспользовались следующим неравенством

$$\sum_{\delta/N}\frac{q^{\Omega(\delta)}}{\delta} \le \exp\left(2\sum_{p/N}\frac{q}{p}\right) \le \exp\left(2q\sum_{p\le\ln N}\frac{1}{p} + \frac{2q}{\ln N}\cdot\frac{\ln N}{\ln 2}\right) =$$
$$= O\left((\ln_2 N)^{2q}\right) = O\left((\ln N)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right).$$

Перейдем к исследованию суммы $T_{21}(N,\sigma,\Omega)$. Воспользовавшись леммой 1, получим:

$$T_{21}(N,\sigma,\Omega) = NCE_2(N,\Omega)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln_2 N}}\right)\right)\sum_{k\le k_1}\frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot k^{\sigma}\times$$
$$\times F\left(\frac{k}{\ln_2 N},\Omega\right)E_2\left(N,\frac{k}{\ln_2 N},\Omega\right).$$

Отметим, что $CF(1,\Omega) = 1,\ E_2(N,\Omega)E_2(N,1,\Omega) = 1$.

Теперь заменим $\frac{k}{\ln_2 N}$ в $F\left(\frac{k}{\ln_2 N},\Omega\right)$ и $E_2\left(N,\frac{k}{\ln_2 N},\Omega\right)$ на единицу. Для этого заметим, что

$$\ln(F(z,\Omega)\cdot\Gamma(z+1)) = \sum_p\left(z\ln\left(1-\frac{1}{p}\right) - \ln\left(1-\frac{z}{p}\right) + \right.$$
$$\left. + \ln\left(1-\frac{z}{p^2-p+1}\right)\right) = \sum_p a(p,z).$$

При $0 \le z \le (2-\varepsilon)$

$$a'(p,z) = \ln\left(1-\frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p\left(1-\frac{z}{p}\right)} - \frac{1}{(p^2-p+1)\left(1-\frac{z}{p^2-p+1}\right)} = O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Следовательно, ряд, составленный из производных, сходится равномерно и поэтому при $0 \le z \le 2-\varepsilon \quad E(z,\Omega) = O(1)$ и

$$E\left(\frac{k}{\ln_2 N},\Omega\right) - E(1,\Omega) = O\left(\left|\frac{k}{\ln_2 N}-1\right|\right). \tag{4}$$

Далее положим $E_2^*(N,z,\Omega) = E_2(N,z,\Omega)\exp\left(-\sum_{p|N}\frac{z}{p}\right)$. Тогда найдутся такие положительные постоянные A_1, A_2, A_3, что при $0 \le \le z \le 2-\varepsilon$ имеем $A_1 \le E_2^*(N,z,\Omega) \le A_2$, $\left|(E_2^*(N,z,\Omega))'\right| \le A_3$. Кроме этого

$$\sum_{p/N}\frac{1}{p} \le \sum_{p\le \ln N}\frac{1}{p} + \frac{1}{\ln N}\sum_{p/N} 1 \le \ln_3 N + O(1).$$

Поэтому при $z \in [0; 2-\varepsilon]$, $|z-1|\ln_3 N \le 1$ имеем

$$E_2(N,z,\Omega) - E_2(N,1,\Omega) = O\left(E_2(N,1,\Omega)\cdot|z-1|\ln_3 N\right) \tag{5}$$

и при $0 \le z \le 2-\varepsilon$

$$E_2(N,z,\Omega) = O\left((\ln_2 N)^z\right). \tag{6}$$

Нам потребуются неравенства (см. [8]): при $x>0$, $0<\alpha<1<\beta$, $Q(\lambda) := \lambda\ln\lambda - \lambda + 1$

$$\sum_{k\le\alpha x}\frac{x^k}{k!} < \frac{e^x}{1-\alpha}\cdot\frac{e^{-Q(\alpha)x}}{\sqrt{\alpha x}}, \quad \sum_{k\ge\beta x}\frac{x^k}{k!} < \frac{e^x}{\beta-1}\left(\frac{\beta}{2\pi x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^{-Q(\beta)x}.$$

Положим x равным $\ln_2 x$, $\alpha = 1-\delta(x)$, $\beta = 1+\delta(x)$, $0<\delta(x)<\frac{1}{2}$. Тогда

$$1-Q(\alpha) = -(1-\delta)\ln(1-\delta) + 1 - \delta \le 1 - \frac{\delta^2}{3},$$

$$1-Q(\beta) = -(1+\delta)\ln(1+\delta) + 1 + \delta \le 1 - \frac{\delta^2}{3}.$$

Поэтому при $0 < \delta(x) < \frac{1}{2}$ имеем

$$\sum_{k\le(1-\delta)\ln_2 x} \frac{(\ln_2 x)^k}{k!} < \frac{\sqrt{2}}{\delta\sqrt{\ln_2 x}}(\ln x)^{1-\frac{\delta^2}{3}}, \tag{7}$$

$$\sum_{k\ge(1+\delta)\ln_2 x} \frac{(\ln_2 x)^k}{k!} < \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{\delta\sqrt{\ln_2 x}}(\ln x)^{1-\frac{\delta^2}{3}}. \tag{8}$$

Вернемся к исследованию $T_{21}(N,\sigma,\Omega)$. Разобьем сумму по k на следующие пять сумм: $\Gamma_1(N)$, в которой $k\in[1;(1-\delta_1)\ln_2 N)=I(1)$;
$\Gamma_2(N)$ с $k\in[(1-\delta_1)\ln_2 N;(1-\delta_2)\ln_2 N)=I(2)$;
$\Gamma_3(N)$ с $k\in[(1-\delta_2)\ln_2 N;(1+\delta_2)\ln_2 N)=I(3)$;
$\Gamma_4(N)$ с $k\in[(1+\delta_2)\ln_2 N;(1+\delta_1)\ln_2 N)=I(4)$;
$\Gamma_5(N)$ с $k\in[(1+\delta_2)\ln_2 N;(2-\varepsilon)\ln_2 N)=I(5)$;
где $\delta_1=(\ln_3 N)^{-1}$, $\delta_2=3\cdot(\ln_2 N)^{-\frac{1}{3}}$.

Сумма $\Gamma_3(N)$ формирует асимптотику исследуемой суммы. Если $k\in I(3)$, то из (5) следует

$$E_2\left(N,\frac{k}{\ln_2 N},\Omega\right)=E_2(N,1,\Omega)(1+O(\delta_2\ln_3 N)).$$

Так как $|\sigma|\delta_2\le 1$, то

$$k^\sigma=(\ln_2 N)^\sigma(1+O(\delta_2))^\sigma=(\ln_2 N)^\sigma\left(1+O\left(\delta_2|\sigma|\right)\right),$$

следовательно, учитывая (4) , имеем

$$\Gamma_3(N)=F(1,\Omega)E_2(N,1,\Omega)(\ln_2 N)^\sigma\left(1+O\left(\delta_2\left(|\sigma|+\ln_3 N\right)\right)\right)\times$$
$$\times\sum_{k\in I(3)}\frac{(\ln_2 N)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Полная сумма по k равна $\ln N$. Используя неравенства (7) и (8), получим, что дополнительные суммы равны

$$O\left(\left(\delta_2\sqrt{\ln N}\right)^{-1}\cdot(\ln N)^{1-\frac{\delta_2^2}{3}}\right)=O\left(\exp\left(-(\ln_2 N)^{-\frac{1}{4}}\right)\ln N\right).$$

Поэтому имеем:

$$\Gamma_3(N)=F(1,\Omega)E_2(N,1,\Omega)(\ln N)(\ln_2 N)^\sigma\left(1+O\left(\delta_2\left(\ln_2 N+|\sigma|\right)\right)\right).$$

Оценим оставшиеся суммы. Пусть $k \in I(1)$. Так как $\delta_1 \ln_3 N = 1$, то из (6) следует $E_2\left(N, \frac{k}{\ln_2 N}, \Omega\right) = O(\ln_2 N)^{1-\delta_1} = O(\ln_2 N)$. Пусть $k \in I(2)$ или $k \in I(4)$, то из (5) вытекает $E_2\left(N, \frac{k}{\ln_2 N}, \Omega\right) = O\left(E_2(N, 1, \Omega)\right)$.

Следовательно, используя (8), получим:

$$\Gamma_1(N) + \Gamma_2(N) = O\Bigg(\ln_2 N \frac{((1-\delta_1)\ln_2 N)^{|\sigma|}}{\delta_1\sqrt{\ln_2 N}} \cdot (\ln N)^{1-\frac{\delta_1^2}{3}} +$$
$$+E_2(N,1,\Omega)\left((1-\delta_1)^\sigma + (1-\delta_2)^\sigma\right)\frac{(\ln_2 N)^\sigma}{\delta_2\sqrt{\ln_2 N}}(\ln N)^{1-\frac{\delta_2^2}{3}}\Bigg).$$

И далее

$$\Gamma_4(N) + \Gamma_5(N) = O\Bigg(\left((1+\delta_1)^\sigma + (1+\delta_2)^\sigma\right)\cdot(\ln_2 N)^\sigma \frac{E_2(N,1,\Omega)}{\delta_2\sqrt{\ln_2 N}} \times$$
$$\times(\ln N)^{1-\frac{\delta_2^2}{3}} + (\ln_2 N)^{2-\varepsilon}\left((2-\varepsilon)\ln_2 N\right)^{|\sigma|}\left(\delta_1\sqrt{\ln_2 N}\right)(\ln N)^{1-\frac{\delta_1^2}{3}}\Bigg).$$

Учитывая выбор δ_1 и δ_2 и условие $|\sigma|\delta_2 \le 1$, получаем:

$$(3\ln_2 N)^{2|\sigma|+2}(\ln N)^{-\frac{\delta_1^2}{3}} = O\Bigg(\exp\Bigg(-\frac{1}{3}\frac{\ln_2 N}{(\ln_3 N)^2} +$$
$$+2(\ln_2 N)^{\frac{1}{3}}\cdot(\ln_3 N)\Bigg)\Bigg) = O\Bigg(\exp\Bigg(-\frac{\ln_2 N}{(\ln_3 N)^3}\Bigg)\Bigg),$$
$$\frac{(1\pm\delta_1)^\sigma + (1\pm\delta_2)^\sigma}{(\ln N)^{\delta_2^2/3}} = O\left(\exp\left(-\frac{1}{3}\frac{\ln_2 N}{(\ln_2 N)^{\frac{2}{3}}}\ln_2 N + 2|\sigma|\delta_1\right)\right) =$$
$$= O\left(\exp\left((\ln_2 N)^{\frac{1}{3}}\left(-3+\frac{2}{3}\right)\right)\right) = O\left(\exp\left(-2\left((\ln_2 N)^{\frac{1}{3}}\right)\right)\right).$$

Таким образом, имеем:

$$\sum_{i=1}^{5}\Gamma_i(N) = F(1,\Omega)E_2(N,1,\Omega)(\ln_2 N)^\sigma \cdot \left(1 + O\left(\frac{|\sigma| + \ln_3 N}{\sqrt[3]{\ln_2 N}}\right)\right).$$

Учитывая оценки для T_{22} и T_{23} и асимптотику суммы T_{21}, вытекающую из последнего равенства, получаем теорему для случая $g(n) = \Omega(n)$. $\square$

Автор благодарит профессора Н. М. Тимофеева за полезные советы и обсуждения по данной работе.

Résumé

The problem of this paper belongs to the set of problems known as the additive divisors problem. It's proved asimtotic formulas for sums (2) and (3) for $g(n) = \omega(n)$ and $g(n) = \Omega(n)$.

Список литературы

[1] Линник Ю. В. *Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах*. Л.: Изд-во ЛГУ, 1961. 208 с.

[2] Бредихин Б. М., Уфимцева Л. И. *Бинарные аддитивные задачи и мультипликативные функции*// Труды МИАН СССР. 1972. Т. 128. С. 66–75.

[3] Тимофеев Н.М. *Аддитивная проблема делителей и ец обобщение*// Записки научных семинаров ЛОМИ. 1986. Т. 151. С. 184–194.

[4] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. *Распределение чисел с заданным числом простых делителей в прогрессиях*// Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 144–156.

[5] Тимофеев Н. М., Хрипунова М. Б. *Проблема Титчмарша с числами, имеющими заданное число простых делителей*// Математические заметки. 1998. Т. 59. Вып.4. С. 586–603.

[6] Хрипунова М. Б. *Аддитивные задачи, с числами имеющими заданное число простых делителей*// Математические заметки. 1998. Т. 5. Вып. 3. С. 749–762.

[7] Shiu P. *A Brun-Tichmarsh Theorem for multiplicative functions*// J. reine auger. Math. 1980. 313. P. 161–170.

[8] Norton K. K. *On the number of restricted prime factors of an integer I*// Illinois J. Math. 1976. 20. P. 681–705.

[9] Постников А. Г. *Введение в аналитическую теорию чисел*. М.: Наука, 1971. 416 с.