Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 6, 1999

УДК 515.12

А. В. Иванов

О НАСЛЕДСТВЕННОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ СЧЕТНО КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В предположении аксиомы Йенсена дано положительное решение вопроса А. В. Архангельского и В. В. Федорчука [1] о существовании совершенно нормального наследственно сепарабельного счетно компактного пространства, которое не уплотняется на бикомпакт.

Основным результатом работы является теорема 1, утверждающая (в предположении аксиомы Йенсена $\diamondsuit$), что для любого наследственно сепарабельного совершенно нормального бикомпакта Z существует некоторое специальное счетно компактное не бикомпактное пространство Y, произведение которого на Z совершенно нормально и наследственно сепарабельно. Следствием из этой теоремы является положительное решение вопроса А. В. Архангельского и В. В. Федорчука [1] о существовании совершенно нормального наследственно сепарабельного счетно компактного пространства, которое не уплотняется на бикомпакт. (В работе [1] было доказано (также в предположении $\diamondsuit$) существование аналогичного пространства с заменой требования наследственной сепарабельности на сепарабельность.)

Теорема 1. *Теорема 1 ($\diamondsuit$). Для любого наследственно сепарабельного совершенно нормального бикомпакта Z существует такое счетно компактное пространство Y, что выполняются следующие условия:*

1) Y локально бикомпактно и локально счетно.

2) Y является объединением растущей последовательности $\{U_\alpha : \alpha < \omega\}$ открытых подпространств со счетной базой.

3) Из любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств Y, по крайней мере, одно бикомпактно.

4) Произведение $Y \times Z$ наследственно сепарабельно и совершенно нормально.

Доказательство. Мы будем пользоваться следующей формулировкой аксиомы Йенсена. Пусть R — некоторое множество мощности c и α — порядковое число. Обозначим через ${}^{\alpha}R$ множество отображений из α в R. Любую последовательность вида

$$\langle s_\beta : \beta < \alpha \rangle, \ s_\beta \in {}^{\alpha}R$$

будем называть (R, α)-последовательностью. Для каждой (R, α)-последовательности $p = \langle s_\beta : \beta < \alpha \rangle$ и каждого ординала $\gamma < \alpha$ определено ограничение p на γ:

$$p|_\gamma = \langle s_\beta|_\gamma : \beta < \gamma \rangle.$$

Аксиома Йенсена $\diamondsuit$ утверждает, что для каждого $\alpha < \omega_1$ можно выбрать (R, α)-последовательность g_α так, что для любой (R, ω_1)-последовательности x множество $\{\alpha : x|_\alpha = g_\alpha\}$ стационарно [1] в ω_1. При этом последовательность $\Gamma = \langle g_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ называется универсальной гиперпоследовательностью. Аксиома Йенсена совместима с ZFC (см. [3]). В дальнейшем мы будем предполагать, что универсальная гиперпоследовательность Γ фиксирована.

Рассмотрим обратный спектр множеств $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\}$, в котором $X_\alpha = \alpha + 1 = \{\gamma : \gamma \le \alpha\}$, а проекции $p^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ определяются так: $p^\alpha_\beta(\gamma) = \gamma$ при $\gamma \le \beta$ и $p^\alpha_\beta(\gamma) = \beta$ при $\gamma > \beta$. Все множества спектра S умножим на Z и получим спектр

$$S_1 = \{X_\alpha \times Z, r^\alpha_\beta = p^\alpha_\beta \times id_Z : \alpha, \beta < \omega_1\},$$

состоящий из множеств мощности $\le c$. ($|Z| \le c$, так как Z — бикомпакт с первой аксиомой счетности.)

Рассмотрим спектр

$$T = \{{}^{\alpha}R, q^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\},$$

проекции которого определены по формуле: $q^\alpha_\beta(s) = s|_\beta$, и зафиксируем какое-нибудь вложение

$$\{f_\alpha : 1 \le \alpha \le \omega_1\} : \ S_1 \to T$$

[1]Подмножество $B \subset \omega_1$ стационарно в ω_1, если для любого замкнутого несчетного подмножества $F \subset \omega_1$ пересечение $F \cap B$ непусто.

спектра S_1 в T. Тем самым точки каждого пространства $X_\alpha \times Z$ отождествляются с элементами ${}^\alpha R$. В дальнейшем мы будем говорить, что элемент g_α универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в $X_\alpha \times Z$, если $g_\alpha \subset f_\alpha(X_\alpha \times Z)$.

Проведем теперь по рекурсии топологизацию спектра S. На множествах X_α при $\alpha < \omega_0$ зададим дискретную топологию. Предположим теперь, что на всех множествах X_β при $\beta < \alpha$ уже задана топология так, что выполнены следующие условия:

1_α) X_β — компакты, $\beta < \alpha$;

2_α) если элемент g_β $(\beta < \alpha)$ универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в $(X_\beta \setminus \{\beta\}) \times Z$, то для любого γ $(\beta < \gamma < \alpha)$ имеет место равенство

$$[(r^\gamma_\beta)^{-1} g_\beta] = (r^\gamma_\beta)^{-1}[g_\beta];$$

3_α) спектр $S_\alpha = \{X_\beta, p^\beta_\gamma : \beta, \gamma < \alpha\}$ непрерывен.

Если α — предельное число, зададим на X_α топологию предела спектра S_α. Легко видеть, что условия $1_{\alpha+1}) - 3_{\alpha+1}$) при этом выполнены.

Пусть теперь $\alpha = \delta + 1$. Для каждого $g_\beta \in \Gamma$, лежащего в $(X_\beta \setminus \{\beta\}) \times Z$, $\beta \leq \delta$, положим $E_\beta = (r^\delta_\beta)^{-1} g_\beta$. В пересечении $[E_\beta] \cap (\{\delta\} \times Z)$ (если оно непусто) выделим счетное плотное подмножество $D_\beta = \{d^\beta_i\}$ (такое существует в силу наследственной сепарабельности Z). Для каждой точки d^β_i в множестве E_β выберем последовательность C^β_i, сходящуюся к d^β_i, так, чтобы отображение проектирования $p^\delta : X_\delta \times Z \to X_\delta$ взаимно однозначно отображало последова- тельность C^β_i на последовательность $p^\delta(C^\beta_i) = \{x^\beta_{ij} : j \in N\}$, которая, очевидно, сходится к точке δ. Потребуем, кроме того, чтобы все последовательности $p^\delta(C^\beta_i)$ попарно не пересекались и чтобы множество

$$C = \bigcup_{i,\beta} p^\delta(C^\beta_i)$$

было последовательностью, сходящейся к точке δ (выполнения этих условий всегда можно добиться путем перехода к подпоследовательностям). Определим теперь отображение h из множества C в двоеточие $(p^\alpha_\delta)^{-1}(\delta) = \{\delta, \alpha\}$ по формуле: $h(x^\beta_{ij}) = \delta$, если j четно, $h(x^\beta_{ij}) = \alpha$, если j нечетно. Продолжим отображение $h : C \to \{\delta, \alpha\}$ до непрерывного отображения пространства $X_\delta \setminus \{\delta\}$ в двоеточие $\{\delta, \alpha\}$. Полученное продолжение также обозначим через h.

Наконец, топологизируем X_α, положив

$$X_\alpha = B(X_\delta, Y_x, h_x),$$

где B — пространство В. В. Федорчука [2], $Y_x = \{x\}$ при $x \neq \delta$, $Y_\delta = (p^\alpha_\delta)^{-1}\delta$, $h_\delta = h$.

Проверим выполнение условия $2_{\alpha+1}$), а именно покажем, что для любого $g_\beta \subset (X_\beta \setminus \{\beta\}) \times Z$ ($g_\beta \in \Gamma$, $\beta < \alpha$) выполнено равенство

$$[(r^\alpha_\beta)^{-1} g_\beta] = (r^\alpha_\beta)^{-1}[g_\beta].$$

Пусть $t \in (r^\alpha_\beta)^{-1}[g_\beta]$. Покажем, что $t \in [(r^\alpha_\beta)^{-1} g_\beta]$. Если $t \notin ((p^\alpha_\delta)^{-1}\delta) \times Z$, то это сразу следует из 2_α) и взаимной однозначности отображения g^α_β в точке t. Пусть теперь $t \in ((p^\alpha_\delta)^{-1}\delta) \times Z$, т. е. либо $t = (\delta, z)$, либо $t = (\alpha, z)$ (здесь $z \in Z$). Пусть (для определенности) $t = (\alpha, z)$ и пусть $t' = r^\alpha_\delta(t) = (\delta, z) \in X_\delta \times Z$. В силу условия 2_α)

$$t' \in [(r^\delta_\beta)^{-1} g_\beta] = [E_\beta]$$

и, следовательно, в любой окрестности точки t' имеются точки множества D_β. Рассмотрим произвольную базисную окрестность Ot точки t в $X_\alpha \times Z$ вида

$$Ot = O(\delta, U, \{\alpha\}) \times W,$$

где W — окрестность z в Z, а $O(\delta, U, \{\alpha\})$ — базисная окрестность точки α в топологии пространства $B(\ldots)$:

$$O(\delta, U, \{\alpha\}) = \{\alpha\} \cup (h^{-1}(\alpha) \cap U),$$

U — окрестность точки δ в X_δ. Множество $Ot' = U \times W$ является окрестностью t', следовательно, существует точка $d^\beta_i \in D_\beta$, лежащая в Ot'. Но тогда и все члены последовательности C^β_i, начиная с некоторого, также содержатся в Ot'. По построению отображения h множество $h^{-1}(\alpha)$ содержит все точки последовательности $p^\delta(C^\beta_i)$ с нечетными номерами. Следовательно, $Ot \cap (r^\alpha_\delta)^{-1} C^\beta_i \neq \emptyset$ и $Ot \cap (r^\alpha_\beta)^{-1} g_\beta \neq \emptyset$. Значит, $t \in [(r^\alpha_\beta)^{-1} g_\beta]$, что и требовалось доказать.

Продолжая топологизацию множеств X_α, мы получим непрерывный спектр $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \ \alpha, \beta < \omega_1\}$, удовлетворяющий условиям $1_{\omega_1}) - 3_{\omega_1}$). Предельное пространство этого спектра обозначим через X, предельные проекции — через p_α. Бикомпакт X имеет единственную точку, в которой характер X несчетен. Эту точку мы обозначим через ω_1. Положим $Y = X \setminus \{\omega_1\}$ и докажем, что пространство Y — искомое. Условие 1), очевидно, выполнено. Для доказательства выполнения условия 2) достаточно положить $U_\alpha = (p_\alpha)^{-1}(X_\alpha \setminus \{\alpha\})$.

Для проверки остальных условий нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть F — непустое замкнутое подмножество $X \times Z$, такое, что $F = [F \setminus (\{\omega_1\} \times Z)]$. Тогда найдется $\alpha < \omega_1$ такое, что элемент g_α универсальной гиперпоследовательности Γ лежит в $(X_\alpha \setminus \{\alpha\}) \times Z$ и $[g_\alpha] = r_\alpha F$, где $r_\alpha = p_\alpha \times id_Z$ — предельная проекция спектра S_1.*

Доказательство. Занумеруем точки множества $F' = F \setminus (\{\omega_1\} \times Z)$ счетными ординалами в (R, ω_1)-последовательность[2]

$$F' =< x_\alpha : \ \alpha < \omega_1 >$$

(возможно, нумерацию придется вести с повторением) так, чтобы для каждого предельного $\alpha < \omega_1$ множество

$$F'|_\alpha = \{x_\beta|_\alpha = r_\alpha(x_\beta) : \ \beta < \alpha\}$$

лежало в множестве $Q_\alpha = r_\alpha F \setminus (\{\alpha\} \times Z)$ и было всюду плотно в нем. (Выполнения требования всюду плотности $F'|_\alpha$ в Q_α можно добиться, например, так. В каждом Q_α выделим счетное всюду плотное множество G_α и далее пронумеруем точки F' так, чтобы точки каждого счетного множества $r_\alpha^{-1} G_\alpha \subset F'$ имели номера $< \alpha$.) В силу аксиомы Йенсена множество

$$A = \{\alpha : \ F'|_\alpha = g_\alpha, \ \alpha \ - \quad \}$$

стационарно в ω_1. Положим

$$F_\alpha = \pi_\alpha r_\alpha (F \cap r_\alpha^{-1}(\{\alpha\} \times Z)),$$

где π_α — проекция произведения $X_\alpha \times Z$ на Z. Очевидно, что $F_\alpha \supset F_{\alpha'}$ при $\alpha' > \alpha$. Поскольку Z — совершенно нормальный бикомпакт, последовательность $\{F_\alpha : \ \alpha < \omega_1\}$ стабилизируется, начиная с некоторого α_0, т.е. $F_\alpha = F_{\alpha_0}$ при $\alpha \geq \alpha_0$. Нетрудно показать, что $F_{\alpha_0} = \pi(F \cap (\{\omega_1\} \times Z))$ (π — проекция $X \times Z$ на Z).

[2]Это можно сделать, поскольку $\diamondsuit$ влечет CH.

Для каждого α положим

$$B_\alpha = \pi_\alpha([Q_\alpha] \cap (\{\alpha\} \times Z)).$$

Покажем, что $B_\alpha \subset B_{\alpha'}$ при $\alpha' > \alpha$ ($\alpha,\ \alpha' \in A$). По построению g_α всюду плотно в Q_α. Следовательно, в силу условия 2_{ω_1})

$$[(r_\alpha^{\alpha'})^{-1} Q_\alpha] = (r_\alpha^{\alpha'})^{-1}[Q_\alpha] \supset \{\alpha'\} \times B_\alpha.$$

Но, в свою очередь, $[(r_\alpha^{\alpha'})^{-1} Q_\alpha] \subset [Q_{\alpha'}]$. Итак, $[Q_{\alpha'}] \supset \{\alpha'\} \times B_\alpha$, откуда следует, что $B_\alpha \subset B_{\alpha'}$. Покажем, что

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = F_{\alpha_0}.$$

Поскольку

$$[Q_\alpha] \cap (\{\alpha\} \times Z) \subset r_\alpha(F \cap r_\alpha^{-1}(\{\alpha\} \times Z)),$$

включение $\cup B_\alpha \subset F_{\alpha_0}$ очевидно. Докажем обратное включение. Предположим противное. Пусть $z \in F_{\alpha_0} \setminus \cup B_\alpha$. Тогда для любого $\alpha \in A$ точка (α, z) имеет в $X_\alpha \times Z$ окрестность $V_\alpha \times O_\alpha z$, которая не пересекает Q_α. При этом $O_\alpha z$ можно выбирать из фиксированной счетной базы окрестностей z, а открытое в X_α (напомним, что $X_\alpha = \alpha + 1$) множество V_α содержит все ординалы β, удовлетворяющие неравенствам $\sigma(\alpha) \leq \beta \leq \alpha$, где $\sigma(\alpha)$ — некоторый ординал, меньший α (здесь существенно, что α — предельное число и спектр S непрерывен). Тем самым определено отображение $\sigma : A \to \omega_1$, удовлетворяющее условию $\sigma(\alpha) < \alpha$ для любого $\alpha \in A$. В [2] доказано, что в этом случае обязательно найдется $\beta_0 < \omega_1$, прообраз которого $\sigma^{-1}(\beta_0)$ несчетен. Выделим из множества $\sigma^{-1}(\beta_0)$ несчетное подмножество H, для всех элементов α которого окрестности $O_\alpha z$ одинаковы: $O_\alpha z = O$. Для любого $\alpha \in H$ имеем

$$\{\beta :\ \beta_0 \leq \beta \leq \alpha\} \times O \cap Q_\alpha = \emptyset.$$

Возьмем наименьшее $\alpha_1 \in H$. Тогда $(V_{\alpha_1} \times O) \cap Q_{\alpha_1} = \emptyset$ и, следовательно,

$$r_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1} \times O) \cap r_\alpha^{-1} Q_\alpha = \emptyset$$

для любого $\alpha \in H$. Таким образом, окрестность $r_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1} \times O)$ точки (ω_1, z) не пересекает множества

$$F' = \bigcup_{\alpha \in H} r_\alpha^{-1} Q_\alpha.$$

Противоречие, поскольку $z \in F_{\alpha_0} = \pi(F \setminus F')$.

Итак,

$$\bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = F_{\alpha_0}.$$

Поскольку F_{α_0} сепарабельно, последовательность $\{B_\alpha : \ \alpha < \omega_1\}$ стабилизируется, начиная с некоторого α_2, т. е. для любого $\alpha > \alpha_2$ $B_\alpha = F_{\alpha_0}$. Таким образом, для каждого $\alpha \in A, \ \alpha > \alpha_2$

$$[Q_\alpha] \cap (\{\alpha\} \times Z) = r_\alpha(F \cap r_\alpha^{-1}(\{\alpha\} \times Z)).$$

Следовательно, $[Q_\alpha] = r_\alpha F$, и, значит, $[g_\alpha] = r_\alpha F$. $\square$

Покажем теперь, что $X \times Z$ наследственно сепарабельно. Для этого достаточно проверить сепарабельность замкнутых подмножеств. Пусть F' — замкнутое подмножество $Y \times Z$ и $F = [F']_{X \times Z}$. В силу леммы существует α такое, что $g_\alpha \in (X \setminus \{\alpha\}) \times Z$ и $[g_\alpha] = r_\alpha F$. По условию 2_{ω_1+1}) r_α неприводимо отображает множество F на $r_\alpha F$. В самом деле, если T — собственное замкнутое подмножество F и $r_\alpha T = r_\alpha F$, то

$$T \supset [r_\alpha^{-1} g_\alpha] = r_\alpha^{-1}[g_\alpha] = r_\alpha^{-1} r_\alpha F$$

— противоречие.

Множество $r_\alpha F$ сепарабельно. Так что из неприводимости r_α на F следует сепарабельность F. Следовательно, $Y \times Z$ наследственно сепарабельно.

Заметим, что из равенства $r_\alpha^{-1} r_\alpha F = F$ и совершенной нормальности произведения $X_\alpha \times Z$ следует, что F имеет тип G_δ в $X \times Z$ и, значит, F' — G_δ-подмножество $Y \times Z$.

Покажем, что $Y \times Z$ нормально. Пусть F_1' и F_2' — непересекающиеся замкнутые подмножества $Y \times Z$ и пусть $F_i = [F_i']_{X \times Z}, \ i = 1, 2$. В силу леммы существует такое $\alpha < \omega_1$, что $r_\alpha^{-1} r_\alpha F_i, \ i = 1, 2$. Если $r_\alpha F_1 \cap r_\alpha F_2 \neq \emptyset$, то множество $(F_1 \cap F_2) \setminus (\{\omega_1\} \times Z)$ также непусто — противоречие с дизъюнктностью $F_1', \ F_2'$. Следовательно, $r_\alpha F_1 \cap r_\alpha F_2 = \emptyset$ и, значит, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Таким образом, любые непересекающиеся замкнутые подмножества в $Y \times Z$ имеют непересекающиеся замыкания в $X \times Z$. Нормальность $Y \times Z$ доказана, следовательно, $Y \times Z$ совершенно нормально.

Проверим свойство 3) пространства Y. Отождествим Y со слоем $Y \times \{z\}$ произведения $Y \times Z$. Тогда замкнутые непересекающиеся подмножества $F_1, \ F_2 \subset Y$ можно считать подмножествами $Y \times Z$. Мы уже показали, что замыкания F_1, F_2 в $Y \times Z$ не пересекаются. Но замыкание F_i может отличаться от самого F_i только на одну точку (ω_1, z). Так что хотя бы одно из множеств F_i замкнуто в $X \times Z$, а значит, бикомпактно.

Счетная компактность Y следует из свойства 3) (см. [1]). $\square$

Следствие($\diamondsuit$). *Существует совершенно нормальное наследственно сепарабельное счетно компактное пространство E, которое не уплотняется на бикомпакт.*

Доказательство. Возьмем в качестве бикомпакта Z в теореме 1 "две стрелки"П. С. Александрова и получим пространство Y, удовлетворяющее условиям 1) – 4). Затем для Y построим пространство $E(Y)$, описанное в [1], и положим $E = E(Y)$. Все свойства E, сформулированные в условиях следствия, кроме наследственной сепарабельности, доказаны в [1]. Наследственная сепарабельность E следует из наследственной сепарабельности $Y \times Z$. $\square$

Résumé

We present an example of a countably compact perfectly normal hereditarily separable space that does not admit a one-to-one mapping onto some Hausdorff compact space. Thus we give a positive solution to A.V. Arhangelskii and V.V.Fedorchuk's question.

Список литературы

[1] Архангельский А. В., Федорчук В. В. Об уплотнениях счетно компактных пространств на бикомпакты// Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. № 4. С. 871–880.

[2] Федорчук В. В. Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств// Матем. сборник. 1976. Т. 99. № 1. С. 3–33.

[3] Jensen R. B. The fine structure of the costructible hierarchy// Ann. Math. Logic. 2:3. 1972. P. 229–308.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33