Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 6, 1999

УДК 519.31

О СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ $\widehat{M}$-ОЦЕНОК

М. М. Кручек

В статье приведено доказательство сильной состоятельности $\widehat{M}$-оценки, явно опирающееся на усиленный закон больших чисел в пространстве C.

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин X_i, $i \geq 1$, определенных на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Считаем, что X_i на $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ подчиняются вероятностному распределению P_θ, где $\{P_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ есть известное нам семейство распределений, зависящих от параметра θ. Под $\mathrm{X}_n = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$ будем понимать n-мерную выборку из генеральной совокупности X, а под θ_0 — значение параметра распределения, при котором сделана выборка. Координаты x_i выборки обозначаем ”прямыми” буквами, ”наклонные” x используем для обозначения переменных величин. Так как будем иметь дело с выборкой неограниченно возрастающего объема, то удобно предполагать, что задана выборка $\mathrm{X}_\infty = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots)$ бесконечного объема, а X_n — совокупность ее первых координат. X_∞ — объект выборочного вероятностного пространства $(\mathcal{X}^\infty, \mathcal{B}^\infty, P_\theta)$, где $\mathcal{X}^\infty$ — пространство последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, $\mathcal{B}^\infty = \prod\limits_1^\infty \mathcal{B}$. $\mathrm{X}_n = [\mathrm{X}_\infty]_n$, где $[\cdot]_n$ — оператор проектирования из $\mathcal{X}^\infty$ в $\mathcal{X}^n$.

Оценка по обобщенному методу моментов (M-оценка, или ее модификация $\widehat{M}$-оценка) была введена П. Хьюбером [5] как обобщение оценки максимального правдоподобия. Напомним определение.

Определение 1. *1. $\widehat{M}$-оценкой $\widehat{\theta}_n$ неизвестного параметра распределения θ_0 называется значение $\theta \in \Theta$, при котором достигается*

$$\max_\theta \sum\nolimits_{i=1}^n \psi(\mathrm{x}_i, \theta).$$

Очевидно, что использование $\widehat{M}$-оценок естественно в тех случаях, когда существует функция $\psi(x,\theta)$, такая, что неизвестный параметр θ_0 максимизирует $\int \psi(x,\theta)P_{\theta_0}(dx)$.

Определение 2. 2. *Оценка $\widehat{\theta}_n$ сильно состоятельна, если $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{п.н.} \theta_0$.*

Перечислим условия, достаточные для сильной состоятельности $\widehat{M}$-оценок [1].

(A_c) Множество Θ компактно.

(A_0) Функция $\psi(x,t)$ такова, что $\int \psi(x,t)P_{\theta_0}(dx)$ достигает своего максимума в единственной точке $t=\theta_0$ так, что

$$\Psi(t,\theta_0,P_{\theta_0}) \equiv \int (\psi(x,t)-\psi(x,\theta_0))P_{\theta_0}(dx) < 0 \quad \forall t \neq \theta_0,\, t\in\Theta.$$

Таким образом, $\widehat{M}$-оценка является и точкой максимума функции $\Psi(t,\theta_0,\widehat{P}_n)$, где $\widehat{P}_n$ — эмпирическое распределение.

$$(\bar{A}_0) \quad \forall\delta>0 \inf_{t:|t-\theta_0|\geq\delta} \Psi(t,\theta_0,P_{\theta_0}) < -\varepsilon \text{ при некотором } \varepsilon=\varepsilon(\delta)>0.$$

Замечание. . Очевидно, что условие $(\bar{A}_0)$ будет следствием (A_c), (A_0) и непрерывности $\Psi(t,\theta_0,P_{\theta_0})$ по t.

$(A_0^{\triangle})$ $\quad \forall\delta>0$ существует $\Delta=\Delta(\delta)$: $\forall t$, $|t-\theta_0|>\delta$,

$$\int (\psi^{\triangle}(x,t)-\psi(x,\theta_0))P_{\theta_0}(dx) < -\varepsilon$$

при некотором $\varepsilon>0$. Здесь $\psi^{\triangle}(x,t)=\sup\limits_{|u|\leq\triangle}\psi(x,t+u)$.

Теорема 1. [1] *Если выполнены (A_c), (A_0), $(A_0^{\triangle})$, то $\widehat{M}$-оценка сильно состоятельна.*

В [1] предлагается следующая схема доказательства теоремы 1.

Пусть δ фиксировано и Δ удовлетворяет условию $(A_0^{\triangle})$. Рассматривается конечное покрытие множества $\Theta\setminus(\theta_0)^\delta$ (где $(\theta_0)^\delta$ — δ-окрестность θ_0) окрестностями $\Delta_k=\{t : |t-t_k|\leq\Delta,\ k=1,\dots,N\}$, где $t_k\in\Theta$, $t_k\notin(\theta_0)^\delta$. Достаточно показать, что с вероятностью 1

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{|t-\theta_0|\geq\delta}\Psi(t,\theta_0,\widehat{P}_n) < -\varepsilon \quad \text{при некотором } \varepsilon>0.$$

Справедливо неравенство

$$\sup_{|t-\theta_0|\geq\delta} \Psi(t,\theta_0,\widehat{P}_n) \leq \max_k \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^n \sup_{\Delta_k}[\psi(\mathrm{x}_i,t)-\psi(\mathrm{x}_i,\theta_0)].$$

Случайные функции $\widetilde{\psi}_i(x,t) = \sup\limits_{\Delta_k}[\psi(\mathrm{x}_i,t)-\psi(\mathrm{x}_i,\theta_0)]$ принимают значения в $\mathbb{R}^N$ и в силу условий теоремы подчиняются усиленному закону больших чисел (у.з.б.ч.) для независимых одинаково распределенных случайных величин в конечномерном пространстве. Применение условия $(A_0^\triangle)$ завершает доказательство теоремы.

Идея доказательства близка к использованному Вальдом [2] методу исследования состоятельности оценки максимального правдоподобия. Ее модификации встречаются и в ряде других работ, например в [4].

Фактически состоятельность оценки обеспечивается путем аппроксимации непрерывной случайной функции $\psi(x,t)-\psi(x,\theta_0)$ на множестве $\Theta \setminus (\theta_0)^\delta$ кусочно-постоянными случайными функциями, принимающими конечное число значений, удовлетворяющими у.з.б.ч. Можно утверждать, что метод доказательства состоятельности $\widehat{M}$-оценки, предложенный в [1], использует в скрытом виде идею применения предельных теорем в функциональных пространствах для исследования асимптотических свойств статистических оценок.

Проведем доказательство состоятельности $\widehat{M}$-оценки, явно опираясь на у.з.б.ч. в пространстве C.

Итак, для состоятельности $\widehat{M}$-оценки достаточно установить, что с вероятностью 1, начиная с некоторого n, $\max\limits_{\theta\in\Theta} \sum_{i=1}^n \psi(\mathrm{x}_i,\theta)$ достигается внутри сколь угодно малой окрестности значения θ_0.

Условия (A_c), (A_0),

(B) $\Psi(t,\theta_0,P_\theta)$ непрерывна по t на Θ,

(C) $\Psi(t,\theta_0,\widehat{P}_n)$ равномерно по t на $\Theta\setminus(\theta_0)^\delta$ сходится к $\Psi(t,\theta_0,P_{\theta_0})$ с вероятностью 1 при $n\to\infty$

достаточны для сильной состоятельности $\widehat{M}$-оценки.

Действительно, так как $\Psi(t,\theta_0,P_{\theta_0})$ непрерывно зависит от t, то существует такое $\eta(\delta)>0$, что

$$\Psi(\theta_0,\theta_0,P_{\theta_0} - \Psi(t,\theta_0,P_{\theta_0}) > \eta, \quad t\in\Theta\setminus(\theta_0)^\delta. \tag{1}$$

$$\Psi(\theta_0, \theta_0, \widehat{P}_n) > \Psi(\theta_0, \theta_0, P_{\theta_0}) - \frac{\eta}{3}, \tag{2}$$

$$\Psi(t, \theta_0, \widehat{P}_n) < \Psi(t, \theta_0, P_{\theta_0}) + \frac{\eta}{3} \tag{3}$$

соответственно. Вычитая (3) из (2) и учитывая (1), получим, что для $B_n = B_{n1} \cap B_{n2}$ имеет место неравенство

$$\Psi(t, \theta_0, \widehat{P}_n) < 0, \quad t \in \Theta \setminus (\theta_0)^\delta. \tag{4}$$

В силу равномерной по t сходимости п.н. $\Psi(t, \theta_0, \widehat{P}_n)$ к $\Psi(t, \theta_0, P_{\theta_0})$ на $\Theta \setminus (\theta_0)^\delta$ $\forall \varepsilon > 0$ можно указать такой номер $N(\varepsilon, \delta)$, что

$$P_{\theta_0}(\sup_{n > N(\varepsilon,\delta)} B_{ni}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad i = 1, 2,$$

и, следовательно,

$$P_{\theta_0}(\sup_{n > N(\varepsilon,\delta)} \Psi(t, \theta_0, \widehat{P}_n)) > 1 - \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon, \delta),$$

т. е. $\widehat{M}$-оценка сильно состоятельна.

Приведем условия, достаточные для выполнения (B) и (C).

Если $\psi(x, \theta)$ для п.в. x непрерывна по θ, то отображение $(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to (\{\psi(x, t) - \psi(x, \theta_0)\}_{t \in \Theta \setminus (\theta_0)^\delta}, \mathcal{B})$ в силу сепарабельности $C(\Theta \setminus (\theta_0)^\delta)$ $\mathcal{B} - \mathcal{F}$ измеримо ($\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра в $C(\Theta \setminus (\theta_0)^\delta)$. Таким образом, $\psi(x, t) - \psi(x, \theta_0)$ является случайным элементом со значением в $C(\Theta \setminus (\theta_0)^\delta)$. При условии

$$(A_{\text{ср}}) \quad \int \sup_{t \in \Theta \setminus (\theta_0)^\delta} |\psi(x, t) - \psi(x, \theta_0)| P_{\theta_0}(dx) < \infty$$

для каждого $\theta_0 \in \Theta$ существует среднее значение случайного элемента $\psi(x, t) - \psi(x, \theta_0)$ по индуцированной в $C(\Theta \setminus (\theta_0)^\delta)$ мере $\mathcal{P}_{\theta_0}$ (т. е. выполнено (B)). Тогда согласно у.з.б.ч. для независимых одинаково распределенных случайных элементов со значением в сепарабельном банаховом пространстве [3]

$$\Psi(t, \theta_0, \widehat{P}_n) \longrightarrow \Psi(t, \theta_0, P_{\theta_0}) \text{ п.н. равномерно по } t \text{ при } n \to \infty. \tag{5}$$

Теорема 2. *Условия* (A_c), (A_0), *непрерывность* $\psi(x,\theta)$ *по* θ *для п.в.* x, (A_{cp}) *достаточны для сильной состоятельности* $\widehat{M}$*-оценки.*

Доказательство содержится в приведенных выше рассуждениях.

Résumé

Borovkov [1] proved strong consistency of $\widehat{M}$-estimator. Some new technique for proving is proposed.

Литература

[1] Боровков А. А. *Математическая статистика.* М.: Наука, 1988. 304 с.

[2] Vald A. *A note on the consistency of the maximum likelihood estimate*// Ann. Math. Statist. 1949. V. 20. P. 595–601.

[3] Гренандер У. *Вероятности на алгебраических структурах.* М.: Мир, 1965. 276 с.

[4] Hoadley B. *Asymptotic properties of maximum likelihood estimates for the independent but not identically distributed case*// Ann. Math. Statist. 1971. V. 42. P. 1977–1990.

[5] Huber P. J. *Robust estimation of a location parameter*// Ann. Math. Statist. 1964. V. 35. P. 73–101.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33