Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 6, 1999

УДК 515.12

О ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДЛЯ КОТОРЫХ $eX = \beta X$

К. В. Матюшичев

В статье показано, что класс вполне регулярных пространств X, для которых наибольшая полурегулярная e-компактификация eX совпадает с расширением Стоуна—Чеха βX, не замкнут относительно операций взятия сумм, прямых произведений и перехода к подпространству. С помощью пространств этого класса установлены некоторые свойства e-компактификации eX. Вводится также счетная регулярность пространств, которая, подобно e-компактифицируемости, является усилением регулярности.

Введение

Рассматриваются только хаусдорфовы пространства. Расширение Y пространства X называется e-компактификацией пространства X, если из любого открытого покрытия пространства Y можно выделить конечное подсемейство, покрывающее X. Пространства, обладающие e-компактификациями, называются e-компактифицируемыми. В [1] К. П. Харт и Дж. Вермеер показали, что e-компактифицируемые пространства занимают промежуточное положение между вполне регулярными и регулярными пространствами. Для каждого e-компактифицируемого пространства можно определить наибольшую полурегулярную e-компактификацию eX, обладающую следующим характеризующим ее свойством: для каждой полурегулярной e-компактификации αX найдется θ-непрерывное отображение $\varphi : eX \to \alpha X$, тождественное на X. В [1] показано, что не для всех вполне регулярных пространств выполнено равенство $eX = \beta X$, и тем самым выделен новый класс вполне регулярных пространств, для которых это равенство выполняется. В [2] А. В. Иванов описал для произвольного вполне регулярного пространства X все его полурегулярные e-компактификации Y, в которых оно s-вполне регулярно, то есть для любой точки $y \in Y$ пространство $\{y\} \cup X$ вполне регулярно. В [3] автор показал, что для вполне регулярного пространства выполнено равенство $eX = \beta X$ в том и только в том случае, если оно s-вполне регулярно в любой своей e-компактификации. С помощью этой характеристики в данной работе установлено, что свойство $eX = \beta X$ не сохраняется при взятии (бесконечных) сумм, прямых произведений и переходе к подпространству. На простом примере показано также, что $\varkappa$-нормальность (то есть отделимость дизъюнктными окрестностями дизъюнктных канонических замкнутых множеств), фигурировавшая в [1] как достаточное условие равенства $eX = \beta X$, не является его необходимым условием. Пространства, для которых $eX = \beta X$, позволяют легко усмотреть некоторые свойства операции взятия наибольшей полурегулярной e-компактификации, определенной для любого, не обязательно вполне регулярного, e-компактифицируемого пространства. Поскольку e-компактифицируемые пространства занимают промежуточное положение между регулярными и вполне регулярными пространствами, имеет смысл рассматривать другие классы пространств с тем же свойством: установление связей между ними и e-компактифицируемыми пространствами позволит лучше понять место, занимаемое e-компактифицируемостью в ряду аксиом отделимости. Один из таких классов (а именно счетно регулярные простанства) рассматривается в §3.

§ 1. Пространства со свойством $eX = \beta X$

Напомним, что система $\theta = \{P\}$ множеств в топологическом пространстве X называется (вполне) регулярной, если для любого $P_1 \in \theta$ найдется $P_2 \in \theta$ такое, что $[P_2] \subset \langle P_1 \rangle$ (P_2 и $X \setminus P_1$ функционально отделимы), и свободной, если $\bigcap\{P : P \in \theta\} = \emptyset$.

Определяемое ниже пространство служит основным элементом для построения нужных нам примеров; оно обладает свойством $eX = \beta X$ и вместе с тем не $\varkappa$-нормально. Символом αX обозначается здесь не александровская компактификация, а пространство регулярных концов пространства X с обычной топологией (см. [4]).

Пример 1. В [5] на $X^* = I \times I \setminus \{(0;0)\}$ (здесь $I = [0;1]$) была определена топология с помощью задания системы окрестностей:

1) все точки (x, y) с $x > 0, y > 0$ объявляются изолированными;

2) окрестностью точки вида $(x, 0)$ объявим любое множество вида $\{(x,0)\} \cup ((\{x\} \times I) \setminus K)$, где $|K| < \aleph_0$;

3) окрестностью точки вида $(0, y)$ объявим любое множество вида $\{(0,y)\} \cup ((I \times \{y\}) \setminus K)$, где $|K| < \aleph_0$.

Множество $L = (\{0\} \times I) \cap X^*$ назовем левым краем пространства X^*, а множество $R = (I \times \{0\}) \cap X^*$ — правым краем пространства X^*. Справедливо следующее свойство пространства X^*:

Если система непустых открытых множеств пространства X^* свободна, регулярна и замкнута относительно конечных пересечений, то она и вполне регулярна.

Доказательство. Пусть $\xi = \{U\}$ — система открытых множеств пространства X^*, удовлетворяющая условию. Возможны два случая:

1) для любого $U \in \xi$ множество $U \cap (L \cup R)$ бесконечно;

2) найдется $U \in \xi$ такое, что множество $U \cap (L \cup R)$ конечно.

Рассмотрим первый случай. Пусть $U_0 \in \xi$. Найдется $U_1 \in \xi$ такое, что $[U_1] \subset U_0$. Так как $|U_1 \cap (L \cup R)| \geq \aleph_0$, то либо $|U_1 \cap L| \geq \aleph_0$, либо $|U_1 \cap R| \geq \aleph_0$. Предположим, для определенности, что $|U_1 \cap L| \geq \aleph_0$. Пусть $\{(0, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — попарно различные точки, лежащие в $U_1 \cap L$. Тогда для $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие K_n, что $(I \times \{y_n\}) \setminus K_n \subset U_1$ и $|K_n| < \aleph_0$. Далее, $|\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n| \leq \aleph_0$ и все точки из R, кроме, возможно, счетного их множества, имеют абсциссы, не совпадающие ни с одной из абсцисс точек из $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Понятно, что все такие точки из R принадлежат $[U_1]$, а значит, и U_0. Итак, для любого множества $U \in \xi$ пересечения $U \cap L$ и $U \cap R$ бесконечны. Повторяя рассуждение, получаем, что для любого $U \in \xi$ справедливо: $|L \setminus U| \leq \aleph_0$ и $|R \setminus U| \leq \aleph_0$. Докажем больше: для любого $U \in \xi$ множества $L \setminus U$ и $R \setminus U$ конечны. Предположим противное. Тогда найдется $U_0 \in \xi$, для которого, положим, $|L \setminus U| \geq \aleph_0$. Пусть $\{(0, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ — попарно различные точки, не принадлежащие U_0. Найдем $U_1 \in \xi$ такое, что $[U_1] \subset U_0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется конечное множество K_n такое, что $((I \times \{y_n\}) \setminus K_n) \cap U_1 = \emptyset$. Так как $|\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n| \leq \aleph_0$ и $|R \setminus U_1| \leq \aleph_0$, то найдется точка $(x_0, 0) \in U_1$ такая, что x_0 не совпадает ни с одной из абсцисс точек из $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Точка x_0 лежит в U_1 с некоторой своей окрестностью, и в то же время любая ее окрестность имеет непустое пересечение с $\bigcup_{n=1}^{\infty}(I\times\{y_n\})\setminus K_n$. Противоречие. Докажем, наконец, что система $\xi = \{U\}$ вполне регулярна. Пусть $U_0 \in \xi$ и найдем $U_1 \in \xi$ такое, что $[U_1] \subset U_0$. Имеем: $L\setminus[U_1] = \{(0,y_i)\}_{i=1}^{n}$, $R\setminus[U_1] = \{(x_j,0)\}_{j=1}^{m}$. Находим конечные множества $N_i, i = 1,\dots,n$, и $M_j, j = 1,\dots,m$, такие, что $((I\times\{y_i\})\setminus N_i)\cap[U_1] = \emptyset, i = 1,\dots,n$, и $((\{x_j\}\times I)\setminus M_j)\cap[U_1] = \emptyset, j = 1,\dots,m$. Искомую функцию $f : X^* \to I$ определяем следующим образом: она равна 1 на множестве

$$\bigcup_{i=1}^{n}(\{(0,y_i)\}\cup(I\times\{y_i\})\setminus N_i)\cup\bigcup_{j=1}^{m}(\{(x_j,0)\}\cup(\{x_j\}\times I)\setminus M_j)\cup(X^*\setminus U_0).$$

В остальных точках положим функцию f равной 0. Легко видеть, что f непрерывна и функционально отделяет $[U_1]$ от $X^*\setminus U_0$.

Рассмотрим второй случай. Пусть $U_0 \in \xi$ такое, что $U_0\cap(L\cup R)$ конечно. Так как система ξ свободна и замкнута относительно конечных пересечений, то найдется $U_1 \in \xi$ такое, что $U_1\cap(L\cup R) = \emptyset$. Пусть теперь $V_0 \in \xi$. Найдем $V_1 \in \xi$ такое, что $[V_1] \subset V_0\cap U_1 \subset V_0$. Функцию $f : X^* \to I$ определяем следующим образом: она равна 0 на $[V_1]$ и 1 во всех остальных точках пространства X^*. Функция f, как легко видеть, непрерывна и функционально отделяет $[V_1]$ от $X^*\setminus V_0$. Доказательство завершено.

Ясно теперь, что всякий регулярный конец пространства X^* вполне регулярен, то есть $\alpha X^* = \beta X^*$. Так как αX^* компактно, то оно является e-компактификацией X^*, откуда (см. [3]) $\alpha X^* = eX^*$. Итак, для пространства X^* установлено $\alpha X^* = \beta X^* = eX^*$. Покажем теперь, что пространство X^* не $\varkappa$-нормально. Положим $U_1 = [1/4;1/2]\times[1/4;1/2]$ и $U_2 = [3/4;1]\times[3/4;1]$ — открытые множества в X^*. Очевидно, что $[U_1]$ и $[U_2]$ — дизъюнктные канонические замкнутые множества в X^*. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что $[U_1]$ и $[U_2]$ нельзя заключить в дизъюнктные окрестности. В рассуждениях, в которых участвуют непрерывные вещественные функции, определенные на X^*, основную роль будет играть следующее легко проверяемое утверждение: любая такая функция постоянна на $L\cup R$, кроме, быть может, счетного множества точек.

Покажем теперь, что сумма вполне регулярных пространств со свойством $eX = \beta X$ может не обладать этим свойством. Пусть X^* — пространство, определенное в примере 1. Для $n \in \mathbb{Z}$ положим

$X_n = X^* \times \{n\}$. В сумме $\oplus_{i=1}^n X_i$ отождествим правый край X_i с левым краем X_{i+1}, то есть каждую точку вида $(x,0)$ из X_i с точкой $(0,x)$ из X_{i+1}; полученное пространство обозначим $Y_n (n \in \mathbb{N})$. Пусть $\varphi_n : \oplus_{i=1}^n X_i \to Y_n$ — соответствующее фактор-отображение. Образ левого края пространства X_1 при отображении φ_n назовем левым краем пространства Y_n, а образ правого края пространства X_n — правым краем пространства Y_n. Легко видеть, что $eY_n = \beta Y_n$ (см. пример 1) для любого n. Однако пространство $\oplus_{n=1}^\infty Y_n$ этим свойством уже не обладает. Рассуждения в целом аналогичны приведенным в [3,6]. Левым краем в $\oplus_{n=1}^\infty Y_n$ назовем объединение левых краев пространств $Y_n, n \in \mathbb{N}$; аналогично определяем правый край в $\oplus_{n=1}^\infty Y_n$. В [3,6] топология на множестве $Y_{[0,1]} = \oplus_{n=1}^\infty Y_n \cup I$ введена так, что $0 \in I$ невозможно функционально отделить от правого края пространства $\oplus_{n=1}^\infty Y_n$; само пространство $Y_{[0,1]}$ при этом e-компактифицируемо. Ясно, что любая e-компактификация пространства $Y_{[0,1]}$ будет e-компактификацией и пространства $\oplus_{n=1}^\infty Y_n$, в которой оно не s-вполне регулярно, откуда (см. Введение) следует, что пространство $\oplus_{n=1}^\infty Y_n$ не обладает свойством $eX = \beta X$. Аналогично определяются и пространства $Y_{[n,n+1]} = \oplus_{n=1}^\infty Y_n \cup [n, n+1]$ для $n \in \mathbb{Z}$. Однако конечная сумма пространств со свойством $eX = \beta X$ обладает этим свойством, что сразу следует из равенства $e(\oplus_{i=1}^n X_i) = \oplus_{i=1}^n eX_i$, доказанного ниже для произвольных e-компактифицируемых пространств.

Сохраняя прежние обозначения, приведем пример, показывающий, что свойство $eX = \beta X$ не сохраняется при переходе к подпространству.

Пример 2. В сумме $\oplus_{i \in \mathbb{Z}} X_i$ отождествим правый край X_i с левым краем X_{i+1} для $i \in \mathbb{Z}$ (см. выше) и определенное таким образом пространство обозначим Y^*. Покажем, что $eY^* = \beta Y^*$, для чего достаточно проверить, что Y^* s-вполне регулярно в любой своей e-компактификации (см. Введение). Пусть $\varphi : \oplus_{i \in \mathbb{Z}} X_i :\to Y^*$ — соответствующее фактор-отображение. Образ правого края X_{i-1} (или левого края X_i) назовем i-м ребром пространства Y^*. Пусть Z — произвольная e-компактификация пространства Y^*. Для i-го ребра (i — произвольное) пространства Y^* найдется точка $z_i \in Z \setminus Y^*$, любая окрестность которой содержит бесконечное множество точек i-го ребра. Для любой точки $z \in Z \setminus Y^*$ система $\{Oz \cap Y^* :$ *Oz – окрестность z в Z*$\}$ свободна, регулярна и замкнута относительно конечных пересечений, и рассуждения, аналогичные приведенным в примере 1, позволяют заключить, что $z_i = z_{i+1} = z^*$ для любого $i \in \mathbb{Z}$ и что любая окрестность точки z^* содержит все точки i-го ребра (i — любое), кроме, возможно, конечного их множества. Аналогично доказывается и полная регулярность систем $\{Oz \cap Y^* :$ Oz *– окрестность* z *в* $Z\}$ для любого $z \in Z \setminus Y^*$. Итак, $eY^* = \beta Y^*$. Легко видеть, что пространство $\oplus_{n=1}^{\infty} Y_n$ можно вложить в Y^* как каноническое замкнутое множество. Таким образом, свойство $eX = \beta X$ не сохраняется при переходе даже к каноническим замкнутым множествам. Удалив из $\oplus_{n=1}^{\infty} Y_n$ левый и правый края, по-прежнему получим пространство, не обладающее свойством $eX = \beta X$, которое очевидным образом вкладывается в Y^* в качестве открытого множества (и даже всюду плотного), так что свойство $eX = \beta X$ не наследуется и открытыми, и всюду плотными множествами.

Произведение пространств со свойством $eX = \beta X$ может уже им не обладать.

Пример 3. Подобную пару образуют пространства Y^*, определенное выше, и $\mathbb{N}$ (с дискретной топологией). Для $n \in \mathbb{N}$ положим $Z_n = Y^* \times \{n\}$ и получим $Y^* \times \mathbb{N} = \oplus_{n=1}^{\infty} Z_n$. Относительно пространства $\oplus_{n=1}^{\infty} Z_n$ и будем вести рассуждение. Левым и правым краями пространства $Y_{[n,n+1]} = \oplus_{i=1}^{\infty} Y_i \cup [n, n+1]$ назовем объединение левого края пространства $\oplus_{i=1}^{\infty} Y_i$ и точки n и объединение правого края пространства $\oplus_{i=1}^{\infty} Y_i$ и точки $n+1$ соответственно. Теперь в пространстве $\oplus_{n\in\mathbb{Z}} Y_{[n,n+1]}$ отождествим правый край $Y_{[n-1,n]}$ с левым краем $Y_{[n,n+1]}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$ и полученное пространство обозначим Z. Очевидно, пространство $\oplus_{n=1}^{\infty} Z_n$ содержится в Z в качестве всюду плотного открытого подмножества. Понятно, что в любой e-компактификации пространства Z пространство $\oplus_{n=1}^{\infty} Z_n$ не s-вполне регулярно (см. соответствующее рассуждение для пространства $Y_{[0,1]}$), следовательно, не обладает свойством $eX = \beta X$. Итак, осталось показать, что пространство Z e-компактифицируемо. Действительно, учитывая вложение $\oplus_{n=1}^{\infty} Z_n$ в Z, можно представить Z в виде дизъюнктной суммы следующим образом: $Z = \mathbb{R} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$, причем все Z_n открыты в Z. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть $Z_n \cup \{z_n\}$ — александровская компактификация Z_n. Пусть $\psi : \oplus_{n\in\mathbb{Z}} Y_{[n,n+1]} \to Z$ — естественное фактор-отображение. В пространстве $Y_{[n,n+1]} = \oplus_{i=1}^{\infty} Y_i \cup [n, n+1]$ (n — произвольное целое) определим: $M_n^k = Y_{[n,n+1]} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} Y_i$. Теперь положим в пространстве Z для $m \in \mathbb{N}$: $M_m = int(\psi(\bigcup_{n \geq m} M_n^m \cup \bigcup_{n \leq -(m+1)} M_n^m))$. На множестве $Z \cup \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{z_\omega\}$ зададим топологию следующим образом: Z будет открытым в этом множестве, базу окрестностей точки $z_n (n \in \mathbb{N})$ образуют ее окрестности в $Z_n \cup \{z_n\}$, базу окрестностей точки z_ω образуют множества $M_m, m \in \mathbb{N}$. Стандартными рассуждениями показывается, что $Z \cup \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{z_\omega\}$ — e-компактификация пространства Z.

§ 2. О наибольшей полурегулярной e-компактификации

Сделаем теперь несколько замечаний об операции взятия наибольшей полурегулярной e-компактификации, определенной на произвольных (необязательно вполне регулярных) e-компактифицируемых пространствах.

Предложение. *Для конечного множества e-компактифицируемых пространств $X_i, i = 1, \ldots, n$, справедливо равенство $e(\oplus_{i=1}^n X_i) = \oplus_{i=1}^n eX_i$.*

Доказательство. В [1] для каждого e-компактифицируемого пространства X определена e-компактификация εX со следующим свойством: любая e-компактификация αX пространства X допускает непрерывное продолжение отображения $id : X \to \alpha X$ на εX, то есть $f : \varepsilon X \to \alpha X, f|_X = id$ [1]. Напомним еще следующее (см. [2]): если Y — e-компактификация пространства X, то Y_σ, полурегуляризация Y, и Y_τ, базу которого образуют множества вида $\{y\} \cup (U \cap X)$, где $y \in Y$, а U — окрестность точки y в Y в исходной топологии, суть снова e-компактификации пространства X. Легко видеть (см. [3]), что $(eX)_\tau = \varepsilon X$.

Итак, пусть $X_i, i = 1, \ldots, n$, — e-компактифицируемые пространства. Пусть, далее, Y — e-компактификация пространства $\oplus_{i=1}^n X_i$. Так как $[X_i]_Y, i = 1, \ldots, n$, — e-компактификации пространств $X_i, i = 1, \ldots, n$, то найдутся непрерывные отображения $f_i : (eX_i)_\tau \to [X_i]_Y$, тождественные на $X_i, i = 1, \ldots, n$, и определяется непрерывное отображение $\nabla_{i=1}^n f_i : \oplus_{i=1}^n (eX_i)_\tau \to Y$, тождественное на $\oplus_{i=1}^n X_i$. Таким образом, $\oplus_{i=1}^n (eX_i)_\tau = \varepsilon(\oplus_{i=1}^n X_i)$. Теперь имеем:

$$e(\oplus_{i=1}^n X_i) = (\varepsilon(\oplus_{i=1}^n X_i))_\sigma =$$

[1] В [1] e-компактификация εX обозначалась eX, но поскольку у нас подобные e-компактификации встречаются эпизодически, то через eX обозначается наибольшая *полурегулярная* e-компактификация.

$$= (\oplus_{i=1}^n (eX_i)_\tau)_\sigma = ((\oplus_{i=1}^n eX_i)_\tau)_\sigma = (\oplus_{i=1}^n eX_i)_\sigma = \oplus_{i=1}^n eX_i.$$

Предложение доказано. □

Как известно (в доказательстве предложения мы уже пользовались этим), если Y — e-компактификация пространства X, то для любого $B \subset X$ пространство $[B]_Y$ является e-компактификацией пространства B. Покажем, что, вообще говоря, $[B]_{eX} \neq eB$. Действительно (мы пользуемся обозначениями примера 2), пусть $B = \varphi(X_1 \cup X_4) \subset Y$. Так как $B = X_1 \oplus X_4$, то $eB = \beta B$. Кроме того, $eY = \beta Y$, и $[B]_{\beta Y} \neq \beta B$, так как, очевидно, не всякая непрерывная на B функция имеет непрерывное продолжение на Y. Итак, $[B]_{eY} \neq eB$. Заметим, наконец, что, вообще говоря, $e(X_1 \times X_2) \neq eX_1 \times eX_2$. Действительно, взяв $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$, имеем $e\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}$, $e(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \beta(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \neq \beta\mathbb{N}\times\beta\mathbb{N} = e\mathbb{N}\times e\mathbb{N}$ (насчет неравенства $\beta(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \neq \beta\mathbb{N} \times \beta\mathbb{N}$ см. [7]).

§ 3. CR-пространства

В [8] (там же содержатся ссылки на более ранние источники) Х. Бранденбург и А. Мысьор дали короткое доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пространство X вполне регулярно тогда и только тогда, когда в пространстве X существует база β, удовлетворяющая следующему условию (полной регулярности): для любого $U \in \beta$ найдутся $U_n, V_n \in \beta, n \in \mathbb{N}$ такие, что $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ и $U_n \subset X \setminus V_n \subset U$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.*

Регулярные пространства характеризуются наличием в них регулярной базы: базу β в пространстве X назовем регулярной, если для любого $U \in \beta$ найдутся такие $U_\alpha \in \beta$, что $U = \bigcup U_\alpha$ и $[U_\alpha] \in U$ для каждого α. Сравнивая определения регулярности и полной регулярности, данные выше для баз, нельзя не придти к определению счетной регулярности баз: базу β в пространстве X назовем счетно регулярной, если для любого $U \in \beta$ найдутся такие $U_n \in \beta, n \in \mathbb{N}$, что $U = \bigcup_{n=1}^\infty U_n$ и $[U_n] \subset U$ для каждого n. Кратко будем говорить о CR-базах и CR-пространствах, то есть пространствах, обладающих CR-базой [2]. Очевидно, CR-пространства регулярны, а вполне регулярные пространства суть CR. Следующие утверждения легко проверяются.

[2] CR — countably regular.

1) Свойство CR наследственно.
2) Сумма, произведение и предел обратного спектра CR-пространств обладают свойством CR.

Класс CR-пространств строго содержится в классе регулярных пространств, но автору неизвестно, положителен или отрицателен ответ на следующий

Вопрос 1. Каждое ли CR-пространство вполне регулярно?

Известные автору регулярные не вполне регулярные пространства не имеют CR-баз (пример см. ниже). Отметим еще, что свойство CR не сохраняется совершенными отображениями ни в сторону образа, ни в сторону прообраза. В сторону образа: любое регулярное не счетно регулярное пространство X и его абсолют hX с совершенным естественным отображением $\pi_X : hX \to X$ (определения абсолюта и естественного отображения см., например, в [9]). В сторону прообраза: не вполне регулярный совершенный прообраз вполне регулярного пространства (см. [6]) не обладает CR-базой (рассуждение в основных чертах повторяет приведенное ниже в примере 4). Поскольку e-компактифицируемость переходит к совершенным прообразам (см. [1]), то мы получаем пример e-компактифицируемого не счетно регулярного пространства.

Вопрос 2. Влечет ли счетная регулярность e-компактифицируемость?

Покажем теперь на типичном примере (восходящем к А. Н. Тихонову) регулярного не вполне регулярного пространства, какое рассуждение доказывает отсутствие CR-баз. С теми или иными модификациями это рассуждение проходит для многих подобных пространств.

Пример 4. Ординалы рассматриваем как топологические пространства с естественной порядковой топологией. Пусть $T = (\omega_1 + 1)\times(\omega+1)\setminus\{(\omega_1,\omega)\}$ — плоскость Тихонова. Пусть, далее, R обозначает фактор-пространство пространства $T\times\mathbb{Z}$, когда точки (ω_1, y, n) и $(\omega_1, y, n+1)$ отождествляются при нечетном n, и точки (x,ω,n) и $(x,\omega,n+1)$ отождествляются при четном n. Пусть $\varphi : T\times\mathbb{Z} \to R$ — соответствующее фактор-отображение. Положим $T_n = \varphi(T \times \{n\}), n \in \mathbb{Z}$. Пусть теперь $S = R\cup\{\infty\}$. В множестве S положим R открытым; базу в ∞ образуют множества $V_n = int_R(\bigcup_{m\geq n} T_m), n \in \mathbb{Z}$. Пространство S регулярно, но не счетно регулярно.

Введем обозначения $K = \{(\alpha,\beta) \in T : \beta = \omega\}$, $L = \{(\alpha,\beta) \in T : \alpha = \omega_1\}$. Пусть U открыто в T и $|U \cap K| = \omega_1$. Докажем, что тогда

$|L \setminus [U]| < \omega$. Действительно, предположим, что $|L \setminus [U]| = \omega$, то есть $L \setminus [U] = \{(\omega_1, n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $n_k \neq n_l$, если $k \neq l$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется $\alpha_k \in \omega_1$ такое, что $((\alpha_k, \omega_1] \times \{n_k\}) \cap U = \emptyset$. Найдется $\alpha \in \omega_1$ такое, что $(\alpha, \omega) \in U \cap K$ и $\alpha > sup\alpha_k$. Точка (α, ω) лежит в U вместе с некоторой окрестностью, которая в то же время пересекает множество $\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k, \omega_1] \times \{n_k\}$, — противоречие. Так же просто доказать и обратное: если U открыто в T и $|U \cap L| = \omega$, то $|[U] \cap K| = \omega_1$.

Предположим, что в S найдется CR-база $\beta = \{U\}$. Для V_0 найдем $U \in \beta$ и V_n такие, что $\{\infty\} \cup V_n \subset U \subset \{\infty\} \cup V_0$. Положив ($n$ — любое целое) $K_n = \varphi(K \times \{n\}), L_n = \varphi(L \times \{n\})$, видим, что найдется четное n_0 такое, что $|K_{n_0} \cap U| = \omega_1$. По определению счетной регулярности $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k, [U_k] \subset U, k \in \mathbb{N}$. Найдется k_0 такое, что $|K_{n_0} \cap U_{k_0}| = \omega_1$. Еще раз свойство CR: $U_{k_0} = \bigcup_{l=1}^{\infty} U_l, [U_l] \subset U_{k_0}, l \in \mathbb{N}$. Найдется l_0 такое, что $|K_{n_0} \cap U_{l_0}| = \omega_1$. По доказанному выше $|L_{n_0} \setminus [U_{l_0}]| < \omega$, откуда $|L_{n_0} = L_{n_0-1} \setminus U_{k_0}| < \omega$, и снова $|[U_{k_0}] \cap K_{n_0-1} = K_{n_0-2}| = \omega_1$, откуда $|K_{n_0-2} \cap U| = \omega_1$. Итак, равенство $|K_{n_0} \cap U| = \omega_1$ влечет $|K_{n_0-2} \cap U| = \omega_1$ и т. д., что противоречит включению $U \subset \{\infty\} \cup V_0$.

Résumé

Let eX denote the largest semiregular e-compactification of an e-compactifiable space X. In [1] K. P. Hart and J. Vermeer presented an example of a completely regular space X for which $eX \neq \beta X$, thus distinguishing a new class of completely regular spaces having the property $eX = \beta X$. This paper shows that this property is not preserved by sums, subspaces and Cartesian products. A few remarks are made about eX itself. Finally, we introduce countably regular spaces that are presumably intermediate between completely regular and regular spaces. A space X is called countably regular (CR) if it has a countably regular (CR) base, i. e., a base β such that for every $U \in \beta$ there exists a sequence $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ in β such that $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ and $[U_n] \subset U$ for each $n \in \mathbb{N}$. Most widely known regular non-completely regular spaces are not CR. Every time there is machinery killing complete regularity it also kills CR. Two questions arise. Does there exist a CR space that is not completely regular? Does countable regularity imply e-compactifiability as is the case with complete regularity?

Литература

[1] Hart K. P., Vermeer J. *Non-Tychonoff e-compactifiable spaces*// Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89. P. 725–729.

[2] Иванов А. В. *Относительно компактные расширения вполне регулярных пространств*// Труды ПетрГУ. Серия математика. 1996. Вып. 3. С. 79–87.

[3] Матюшичев К. В. *О е-компактификациях и е-компактифицируемых пространствах*// Препринт: $http://www.karelia.ru/psu/Chairs/KMA/math/arh\_a.html$

[4] Александров П. С. *О понятии пространства в топологии*// УМН. 1947. Т. 2(17). С. 5–57.

[5] Матюшичев К. В. *Простейший пример вполне регулярного не нормального пространства*// Труды ПетрГУ. Серия математика. 1997. Вып. 4. С. 97–98.

[6] Chaber J. *Remarks on open-closed mappings*// Fund. Math. 1972. V. 74. P. 197–208.

[7] Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986.

[8] Brandenburg H., Mysior A. *Short proof of an internal characterization of complete regularity*// Canad. Math. Bull. 1984. V. 27(4). P. 461–462.

[9] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М.: Наука, 1977.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33