Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 6, 1999

УДК 515.12

К ВОПРОСУ О НЕПРЕРЫВНЫХ СЕЛЕКЦИЯХ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Е. В. Моисеев

В статье рассматривается условие, сформулированное в терминах метрики, при выполнении которого многозначные отображения в стандартных предположениях допускают непрерывные селекции.

Предварительные определения и обозначения. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Непрерывное отображение (реализацию) $f : P \to X$ политопа P (см. [1, с. 78]) в пространство Y будем называть ε-реализацией, если $diam(f(\sigma)) < \varepsilon$ для любого симплекса $\sigma \in P$. Соответственно, 0-мерной ε-реализацией политопа P будем называть непрерывное отображение $f : P_0 \to X$ (где P_0 это 0-мерный остов политопа P), если выполняется условие $diam(\sigma \cap P_0) < \varepsilon$ для любого симплекса $\sigma \in P$.

Пусть $s = \{S\}$ — семейство подмножеств пространства X. Реализацию f политопа P будем называть ε-близкой к семейству s, если для любого симплекса $\sigma \in P$ существует $S \in s$ такое, что $f(\sigma) \subset B(S, \varepsilon)$ (где $B(S, \varepsilon) = \{x \in X; \rho(x, S) < \varepsilon\}$).

Будем говорить, что реализация f политопа P удовлетворяет условию $(f, P, s, \delta, \varepsilon)$, если для любых $\sigma \in P, S \in s$ включение $f(\sigma \cap P_0) \subset B(S, \delta)$ влечет $f(\sigma) \subset B(S, \varepsilon)$.

Определение. Семейство $s = \{S\}$ подмножеств пространства X будем называть равномерным относительно реализаций политопов (*popn*-семейством), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любая 0-мерная реализация любого политопа P, δ-близкая к семейству s, продолжается до полной реализации f таким образом, что выполняется условие $(f, P, s, \delta, \varepsilon)$.

Семейство s будем называть локально равномерным относительно реализаций политопов (*лрорп*-семейством), если для любых η, $\varepsilon > 0$ существуют $\delta(\varepsilon, \eta) > 0$ и $\mu(\eta) > 0$ (зависящее только от η) такие, что любая 0-мерная μ-реализация любого политопа P, δ-близкая к семейству s, продолжается до полной η-реализации и при этом выполняется условие $(f, P, s, \delta, \epsilon)$.

Теорема 1. *Пусть Y — полное метрическое $ANR(\mathcal{M})$-пространство (см. [1, с. 95]), $F : X \to Y$ — многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в Y. Семейство $s = \{F(x); x \in X\}$ является лрорп-семейством, состоящим из замкнутых подмножеств Y. Пусть A — замкнутое подмножество X. Тогда для любой непрерывной селекции g отображения $F|_A$ найдется такая окрестность U множества A в пространстве X, что селекция g продолжается до непрерывной селекции отображения $F|_U$.*

Теорема 2. *Пусть Y — полное метрическое пространство, $F : X \to Y$ — многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в Y. Семейство $s = \{F(x); x \in X\}$ является рорп- и лрорп-семейством, состоящим из замкнутых подмножеств Y. Тогда отображение F обладает непрерывной селекцией.*

Лемма 1. *Пусть $F : X \to Y$ — многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в метрическое пространство Y. Тогда для любых чисел $\varepsilon, \mu > 0$, любого непрерывного отображения $k : X \to Y$, такого, что $k(x) \in B(F(x), \frac{1}{2}\varepsilon)$ для любого $x \in X$, существуют открытое локально конечное покрытие γ пространства X и отображение $p : P_0(\gamma) \to Y$ 0-мерного остова нерва покрытия γ (см. [2, с. 118]) в пространство Y такое, что для любой точки $x \in X$, любого множества $U \in \gamma$ условие $x \in U$ влечет: $p(U) \in B(F(x), \mu)$ и $\rho(p(U), k(x)) < \varepsilon$.*

Доказательство. Для всевозможных пар $z, y \in Y$, удовлетворяющих условию $\rho(z, y) < min(\frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}\mu)$, введем обозначение $G_{zy} = k^{-1}(B(z, \frac{1}{2}\varepsilon)) \cap F^{-1}(B(y, \frac{1}{2}\mu))$. В силу непрерывности отображения k и полунепрерывности снизу отображения F множества G_{zy} открыты. В силу условия $k(x) \in B(F(x), \frac{1}{2}\varepsilon)$ эти множества образуют покрытие пространства X. Впишем в него локально конечное покрытие γ. Произвольному элементу U покрытия γ сопоставим точки $z(U), y(U)$, для которых $U \subset G_{zy}$, и точку $p(U) \in B(z(U), \frac{1}{2}\varepsilon) \cap B(y(U), \frac{1}{2}\mu)$. Пусть $U \in \gamma$ и $x \in U$. Так как $k(x) \in B(z(U), \frac{1}{2}\varepsilon)$, то $\rho(p(U), k(x)) < \varepsilon$.

Далее, по построению $x \in G_{z(U)y(U)}$, поэтому $F(x) \cap B(y(U), \frac{1}{2}\mu) \neq \oslash$ и, следовательно, $p(U) \in B(y(U), \frac{1}{2}\mu) \subset O_\mu F(x)$.

Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполняется условие теоремы 1, тогда для любых чисел $\varepsilon, \eta > 0$ существует число $\tau(\eta)$ (зависящее только от η) такое, что если $k : X \to Y$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию $k(x) \in B(F(x), \tau(\eta))$ для любой точки $x \in X$, то существует непрерывное отображение $g : X \to Y$ такое, что $g(x) \in B(F(x), \varepsilon)$ и $\rho(g(x), k(x)) < \eta$ для любой точки $x \in X$.*

Доказательство. По определению *лорп*-семейства для любых ε, $\eta > 0$ существуют $\delta(\varepsilon, \eta)$ и $\mu(\eta) > 0$ такие, что выполняются требуемые свойства. Положим $\tau(\eta) = \dfrac{\mu(\frac{\eta}{2})}{4}$, тогда по лемме 1 существуют открытое локально конечное покрытие γ пространства X и отображение $p : P_0(\gamma) \to Y$ такие, что если $x \in U$, то $p(U) \in B(F(x), \delta(\varepsilon, \eta))$ и $\rho(p(U), k(x))\dfrac{\mu(\frac{\eta}{2})}{2}$. Таким образом, p является 0-мерной μ-реализацией политопа $P(\gamma)$, δ-близкой к семейству $s = \{F(x) : x \in X\}$, следовательно, она продолжается до p-полной $\frac{\eta}{2}$-реализации и при этом выполняется условие $(p, P, s, \delta, \varepsilon)$.

Далее, пусть $G : X \to P(\gamma)$ — каноническое отображение пространства X в нерв покрытия $P(\gamma)$ (см. [2, с. 119]). Положим $g = p \circ G$, тогда если $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_k$, то $g(x) \in p(\sigma)$, где σ — симплекс с вершинами $U_1, \ldots, U_k$. По построению $diam(p(\sigma)) < \frac{\eta}{2}$, а также $\rho(p(U_i), k(x)) < \frac{\mu(\frac{\eta}{2})}{2}$ для $i = 1, \ldots, k$, следовательно, $\rho(g(x), k(x)) < \eta$.

Аналогично $p(\sigma) \in B(F(x), \varepsilon)$, то есть $g(x) \in B(F(x), \varepsilon)$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $F : X \to Y$ — многозначное полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в метрическое пространство Y и семейство $\{F(x) : x \in X\}$ является ророп-семейством.*

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует непрерывное отображение $g : X \to Y$, удовлетворяющее для любой точки $x \in X$ условию: $f(x) \in B(F(x), \varepsilon)$.

Доказательство. Ниже обозначение $\delta(\varepsilon)$ будем использовать в контексте определения *ророп*-семейства. В силу полунепрерывности снизу отображения F семейство открытых множеств $F^{-1}(B(y, \frac{\delta(\varepsilon)}{2}), y \in Y)$

является открытым покрытием пространства X. Впишем в него открытое локально конечное покрытие γ. Сопоставим каждому множеству $U \in \gamma$ точку $p_0(U) = y$ такую, что $U \subset F^{-1}(B(y, \frac{\delta(\varepsilon)}{2}))$. Таким образом, p_0 является отображением 0-мерного остова $P_0(\gamma)$ нерва покрытия γ, которое непрерывно продолжается по определению *popn*-семейства на весь нерв $P(\gamma)$.

Пусть $G : X \to P(\gamma)$— каноническое отображение пространства X в нерв покрытия $P(\gamma)$, тогда отображение g определим как композицию $g = p \circ G$. Если точка $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_k$, где U_i — элементы покрытия γ, то $g(x) \in p(\sigma)$, где σ — симплекс с вершинами $U_1, \ldots, U_k$. По построению $p(U_i) \in B(F(x), \delta(\epsilon))$, следовательно, $p(\sigma) \subset B(F(x), \varepsilon)$, что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 1. Любое непрерывное отображение замкнутого подмножества паракомпакта в банахово пространство непрерывно продолжается на весь паракомпакт (см. [2, с. 116]), а пространство Y в условиях теоремы вкладывается как замкнутое подмножество в банахово пространство, поэтому существуют окрестность U подмножества A в пространстве X и непрерывное отображение $k : U \to Y$, продолжающее отображение g. Для $x \in X$ положим $r(x) = \rho(k(x), F(x))$.

Докажем, что для любого $a > 0$ множество $r^{-1}([0, a[)$ открыто в U. Пусть $x \in U$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим окрестность

$$O_x = F^{-1}(B(k(x), r(x) + \frac{\varepsilon}{2}) \cap k^{-1}(k(x), \frac{\varepsilon}{2}).$$

Если $t \in O_x$, то существует $y \in F(t) \cap B(k(x), r(x) + \frac{\varepsilon}{2})$, следовательно, справедлива цепочка неравенств:

$$\rho(k(t), y) \leq \rho(k(t), k(x)) + \rho(k(x), y) < \frac{\varepsilon}{2} + r(x) + \frac{\varepsilon}{2} = r(x) + \varepsilon,$$

поэтому $r(t) < r(x) + \varepsilon$. Утверждение доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим через U окрестность подмножества A, равную $r^{-1}([0, \tau(\frac{1}{2})[)$, где обозначение $\tau(\frac{1}{2})$ использовано в контексте формулировки леммы 2. В соответствие с этой леммой существует непрерывное отображение $f_1 : U \to Y$, удовлетворяющее заключению леммы для $\eta = \frac{1}{2}$ и $\varepsilon = min(\frac{1}{2^2}, \tau(\frac{1}{2^2}))$. Продолжая подобные рассуждения, получим последовательность непрерывных отображений $f_n : U \to Y, n = 1, 2, \ldots$ Эти отображения будут удовлетворять условиям:

$$\rho_c(f_n, f_{n+1}) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \textit{и} \quad f_n(x) \in B(F(x), \frac{1}{2^n}) \quad \textit{для любого} \quad x \in U.$$

Последовательность функций f_n является фундаментальной, следовательно, сходится к некоторой непрерывной функции, для которой $\rho(f(x), F(x)) = 0$, то есть $f(x) \in F(x)$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. В силу леммы 3 существует отображение $k : X \to Y$ такое, что $\rho(k(x), F(x)) < \tau(\frac{1}{2})$ для любой точки $x \in X$. Обозначение $\tau(\frac{1}{2})$ используется в контексте формулировки леммы 2. Далее, дословно повторяя заключительную часть доказательства теоремы 1, строим однозначную непрерывную селекцию. Доказательство теоремы закончено. □

Résumé

This paper is devoted to selection theorems for set-valued mappings. As a result, we get some metric conditions under which set-valued mappings with ordinary properties admit continuous selections.

Литература

[1] Борсук К. *Теория ретрактов.* М.: Мир, 1971.

[2] Федорчук В. В., Филиппов В. В. *Общая топология. Основные конструкции.* М.: Изд-во МГУ, 1988.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33