Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 6, 1999

УДК 517

МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В F-ПРОСТРАНСТВАХ С КОНУСОМ

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В работе доказываются теоремы о неподвижных точках монотонных операторов в F-пространствах с конусом.

1. Пусть X — векторное пространство над полем скаляров Φ ($\Phi = \mathbb{C}$ *или* $\mathbb{R}$), θ — нулевой элемент этого пространства. Рассмотрим функционал $q(x),\ x \in X$, удовлетворяющий условиям:

1) $q(x)0, \quad q(x) = 0 \iff x = \theta$;
2) $q(\lambda x)q(x)$ *для всех* $x \in X$ *и всех таких* $\lambda \in \Phi,$ *что* $|\lambda|1$;
3) $q(x+y)q(x)+q(y)$ для всех $x,\ y \in X$;
4) $\lim\limits_{\lambda\to 0} q(\lambda x) = 0$ *для всех* $x \in X$.

Функционал $q(x)$ называется *квазинормой* на X. Векторное пространство X с квазинормой $q(x)$ называется *квазинормированным* пространством (см. [4]).

Из определения квазинормы вытекают следующие свойства:

a) $q(\lambda x) = q(x)$ *для всех* $|\lambda| = 1,\ x \in X$;
b) $q(\lambda x)q(\mu x)$ *для всех* $|\lambda||\mu|,\ x \in X$;
c) $q(nx)nq(x)$ *для всех целых* $n0,\ x \in X$;
d) $q(x-y)|q(x)-q(y)|$ *для всех* $x, y \in X$.

С помощью квазинормы q на X определим метрику:

$$d(x,y) = q(x-y), \quad x,y \in X. \tag{1}$$

Метрика (1) инвариантна и удовлетворяет соотношению

$$d(\lambda x, \lambda y) \le d(x,y), \quad x,y \in X, \quad |\lambda| \le 1.$$

Квазинормированное пространство X, полное относительно этой метрики, называется *F-пространством* (см. [4]).

2. В этом пункте и далее будем предполагать, что X — вещественное F-пространство.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset X$ называется *конусом*, если $x \in K$, $x \neq \theta$ влечет за собой $\lambda x \in K$ при $\lambda 0$ и $-x \notin K$.

Любой конус $K \subset X$ позволяет ввести в F-пространстве X полуупорядоченность: $x \geqslant y$, если $x-y \in K$. Элемент $x \geqslant \theta$ (то есть элемент конуса K) называется *положительным.* Свойство замкнутости конуса K позволяет в неравенствах переходить к пределу: если $\{x_n\}, \{y_n\}$ — две сходящиеся (соответственно к точкам x, y) последовательности в пространстве X, полуупорядоченном при помощи конуса K, то есть $q(x_n - x) \to 0$ и $q(y_n - y) \to 0$ при $n \to \infty$, причем $x_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $x \leqslant y$.

Наличие полуупорядоченности в X позволяет ввести понятия мажоранты, миноранты, супремума и инфимума. Если множество $M \subset X$ имеет мажоранту, то его называют ограниченным сверху, если имеет миноранту — ограниченным снизу. *Конусным отрезком* в X называется множество

$$\langle v, w \rangle = \{x \in X | v \leqslant x \leqslant w\}.$$

Множество $\langle v, w \rangle$ выпукло и замкнуто, но, вообще говоря, оно не является ограниченным по квазинорме q.

В каждом конкретном случае специфика конуса, при помощи которого вводится полуупорядоченность в F-пространстве X, может обеспечить дополнительные свойства полуупорядоченности. Это обстоятельство, как и в случае банаховых пространств, стимулирует изучение различных классов конусов в X (см. [1, 2]).

Определение 1. *1. Конус K в X называется миниэдральным, если каждое конечное число элементов $x_1, \ldots, x_n \in X$ имеет точную верхнюю границу $x = \sup\{x_1, \ldots, x_n\}$, и сильно миниэдральным, если* *точная верхняя граница существует у любого ограниченного сверху непустого множества.*

Определение 2. 2. *Конус K в X называется правильным, если каждая неубывающая последовательность*

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant \ldots, \tag{2}$$

ограниченная сверху некоторым элементом,

$$x_n \leqslant y \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

сходится в X.

3. Тот факт, что вещественное F-пространство X полуупорядочено при помощи некоторого конуса K, может использоваться при изучении оператора A, действующего в X, лишь в том случае, когда A обладает свойствами, связанными с полуупорядоченностью.

Определение 3. 3. *Оператор A, действующий в F-пространстве X, называется*

положительным, если $A(K) \subset K$;

монотонным на множестве $D \subseteq X$, если из $x, y \in D$ и $x \geqslant y$ следует $A(x) \geqslant A(y)$.

Для нелинейных операторов указанные свойства независимы, а для линейных — из свойства положительности следует свойство монотонности.

Пусть для монотонного оператора A, действующего в X, могут быть указаны такие элементы v_0, w_0, что

$$v_0 \leqslant w_0 \quad \text{и} \quad Av_0 \geqslant v_0, \quad Aw_0 \leqslant w_0. \tag{4}$$

Тогда оператор A отображает конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в себя. Действительно, из неравенств $v_0 \leqslant x \leqslant w_0$ следует

$$v_0 \leqslant Av_0 \leqslant Ax \leqslant Aw_0 \leqslant w_0.$$

Построим последовательность

$$v_n = A(v_{n-1}), \quad w_n = A(w_{n-1}), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Первая из них, в силу (4), монотонно возрастает и ограничена сверху, а вторая монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому эти последовательности сходятся, если K — правильный конус. Если оператор A непрерывен, то в равенствах (5) можно перейти к пределу. Значит,

$$v^* = Av^*, \quad w^* = Aw^*,$$

где v^* и w^* — пределы последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ соответственно. При этом элементы v^* и w^* могут быть различными.

Приведенные рассуждения показывают, что для доказательства существования решения уравнения $Ax = x$ в пространстве X с непрерывным и монотонным оператором A и для построения последовательных приближений достаточно установить существование элементов v_0, w_0, удовлетворяющих сотношениям (4). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — правильный конус в F-пространстве X и A — непрерывный монотонный оператор на конусном отрезке $\langle v_0, w_0\rangle$, преобразующий этот отрезок в себя. Тогда оператор A имеет на $\langle v_0, w_0\rangle$, по крайней мере, одну неподвижную точку. При этом последовательности* (5) *сходятся к неподвижным точкам оператора A.*

Следующая теорема гарантирует существование неподвижных точек у разрывного оператора A, действующего в X.

Теорема 2 (Принцип Биркгофа—Тарского [2]). *Пусть конус K в пространстве X сильно миниэдрален. Тогда любой монотонный оператор A (не обязательно непрерывный), отображающий конусный отрезок в себя, имеет на нем, по крайней мере, одну неподвижную точку.*

Оператор G, действующий в вещественном F-пространстве X, полуупорядоченном конусом K, называется *гетеротонным*, если он допускает диагональное представление $G(x) = \hat{G}(x, x)$, где оператор $\hat{G}$ определен на $X \times X$ и $\hat{G}(v, w)$ монотонно возрастает по v и убывает по w (если гетеротонный оператор рассматривается на некотором подмножестве $W \subset X$, то в этом случае элементы x, v, w принадлежат W). Выбор сопутствующего оператора $\hat{G}(v, w)$ неоднозначен, и если речь идет о гетеротонном операторе, то подразумевается, что сопутствующий ему оператор фиксирован.

Конусный отрезок $\langle v_0, w_0\rangle$ в F-пространстве X назовем сильно инвариантным для гетеротонного оператора G, если

$$\hat{G}(v_0, w_0) \geqslant v_0, \quad \hat{G}(w_0, v_0) \leqslant w_0.$$

Из сильной инвариантности $\langle v_0, w_0 \rangle$ следует его обычная инвариантность для G.

В теореме существования неподвижной точки у гетеротонного оператора существенным оказывается следующее условие:

H) Система уравнений

$$\hat{G}(v, w) = v, \quad \hat{G}(w, v) = w$$

на множестве $V \subset X$ не имеет решений (v, w), для которых $v \neq w$.

Множество $X \times X$ становится F-пространством, если для пары $(v, w) \in X \times X$ ввести квазинорму $p(v, w) = q(v) + q(w)$. В этом случае можно говорить о непрерывном операторе $\hat{G}$ из $X \times X$ в X.

Теорема 3. *Пусть конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$ в F-пространстве X является сильно инвариантным для гетеротонного оператора G и на $\langle v_0, w_0 \rangle$ выполнено условие H. Кроме того, пусть выполнено хотя бы одно из условий:*

h$_1$) *конус K правилен и оператор $\hat{G}$ непрерывен;*

h$_2$) *конус K сильно миниэдрален.*

Тогда у оператора G существует неподвижная точка $x^* \in \langle v_0, w_0 \rangle$.

Доказательство этой теоремы проводится по такой же схеме, как и в случае локально выпуклого пространства (см. [3]).

Résumé

Some fixed point theorems for monotone operators in F-spaces with a cone are proved.

Литература

[1] Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматгиз, 1962.

[2] Опойцев В. И., Хуродзе Т. А. *Нелинейные операторы в пространствах с конусом.* Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1984.

[3] Мосягин В.В. *К теории операторов в локально выпуклых пространствах с конусом*// Труды ПетрГУ. Серия математика. 1993. Вып. 1. С. 35–40.

[4] Brown A., Pearcy C. *Introduction to Operator Theory I. Elements of Functional Analysis.* Berlin: Springer, 1977.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33