Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 6, 1999

УДК 517

СХОДИМОСТЬ И СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ В НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

С. С. Платонов

[1]

В некоторых функциональных пространствах, являющихся индуктивными пределами нормированных пространств, исследуются связи между различными определениями сходимости последовательностей, ограниченности и замкнутости множеств. В частности, в некоторых топологических векторных пространствах, состоящих из функций на однородном пространстве некоторой локально компактной топологической группы G, доказана эквивалентность замкнутости и секвенциальной замкнутости для линейных G–инвариантных подпространств.

Введение

Многие важные для приложений линейные функциональные пространства имеют вид $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — линейные нормированные или счетно-нормированные пространства, последовательность линейных пространств E_k расширяется, т. е.

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_k \subset \ldots,$$

и все вложения $E_k \subset E_{k+1}$ непрерывны (индекс k всюду пробегает множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел). В пространстве E можно двумя способами ввести сходимость. С одной стороны, E можно снабдить

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00782

топологией индуктивного предела локально выпуклых пространств (ЛВП) E_k и рассматривать сходимость последовательностей и обобщенных последовательностей в этой топологии. С другой стороны, E можно превратить в *пространство секвенциальной сходимости*, если ввести сходимость последовательностей, рассматривая E как *счетное объединение* пространств E_k в смысле Гельфанда — Шилова (точные определения этих понятий см. в §1). Соответственно в E можно двумя способами определить ограниченные подмножества и замкнутые подмножества. Вообще говоря, эти определения могут приводить к различным объектам, но для многих интересных пространств E и подмножеств $A \subset E$ ограниченность или замкнутость в одном смысле равносильна ограниченности или замкнутости в другом смысле. Основной целью настоящей работы является изучение связей между этими двумя видами сходимости, ограниченности и замкнутости для некоторых конкретных функциональных пространств, которые используются в работах по гармоническому анализу. В §1 приводятся необходимые общие сведения об индуктивных пределах ЛВП и *счетных объединениях* ЛВП. В §2 в некоторых функциональных пространствах доказывается совпадение двух видов сходимости последовательностей и ограниченности множеств. В §3 доказывается совпадение двух видов замкнутости для некоторых подмножеств специального вида (линейных подпространств в некоторых функциональных пространствах, инвариантных относительно квазирегулярного представления топологической группы).

§ 1. Общие свойства индуктивных пределов ЛВП

Мы будем рассматривать только векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел или над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Необходимые сведения из теории топологических векторных пространств см. в [1, 2]. Термин *линейное подпространство* понимается в алгебраическом смысле, т. е. линейное подпространство в топологическом векторном пространстве не обязательно замкнуто.

Пусть E_k ($k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$) — последовательность локально выпуклых пространств, причем E_k — линейное подпространство в E_{k+1} и вложение $\omega_k : E_k \mapsto E_{k+1}$ непрерывно. *Индуктивным пределом* последовательности пространств E_k относительно указанных вложений называется их объединение

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

снабженное сильнейшей из локально выпуклых топологий, при которых все вложения E_k в E непрерывны. Будем писать $E = \lim\operatorname{ind} E_k$. Нетрудно понять, что в этой топологии фундаментальную систему окрестностей нуля образуют подмножества $U \subset E$, обладающие следующими свойствами: 1) U — абсолютно выпуклое подмножество; 2) для всякого $k \in \mathbb{N}$ множество $U_k = U \cap E_k$ является окрестностью нуля в E_k. Пространство E является локально выпуклым пространством, и обычным образом в E определяются сходимость последовательностей или обобщенных последовательностей, замкнутые подмножества и ограниченные подмножества.

Отметим еще полезный критерий линейного оператора: *линейный оператор D, отображающий E в любое ЛВП F (и, в частности, линейный функционал), непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен на каждом E_k.*

С другой стороны, можно не снабжать линейное пространство $E = \bigcup_k E_k$ топологией, а наделить его структурой *счетного объединения* ЛВП E_k в смысле Гельфанда — Шилова (см. [3, 4]). Для этого в E определяется сходимость последовательностей: последовательность x_n сходится к x, если найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что все элементы x_n, x содержатся в E_k и $x_n \to x$ по топологии этого пространства. Снабженное такой сходимостью E становится *пространством с секвенциальной сходимостью* (см. [4] или [5]). В этом случае подмножество $A \subset E$ называется ограниченным, если A целиком содержится и ограничено в некотором пространстве E_k. Подмножество $A \subset E$ называется замкнутым, если все множества $A_k := A \cap E_k$ замкнуты в E_k. Будем называть такую сходимость, ограниченность и замкнутость соответственно s-сходимостью, s-ограниченностью и s-замкнутостью. Отметим, что если E_k – метризуемые ЛВП, то подмножество A s-замкнуто тогда и только тогда, когда оно секвенциально замкнуто, т. е. вместе с любой сходящейся последовательностью $x_n \in A$ в A должен содержаться и ее предел.

Очевидно, что из s-сходимости последовательности следует ее сходимость, из s-ограниченности подмножества следует его ограниченность и из замкнутости подмножества следует его s-замкнутость, но существуют примеры, показывающие, что в общем случае из сходимости не следует s-сходимость, из ограниченности не следует s-ограниченность и из s-замкнутости не следует замкнутость (см. [6, 7]). Тем не менее во многих интересных случаях эти понятия совпадают. Приведем несколько известных результатов в этом направлении.

Теорема 1.1. *Пусть E_k — ЛВП и все вложения $\omega_k : E_k \mapsto E_{k+1}$ вполне непрерывны (т. е. образ некоторой окрестности нуля U из E_k предкомпактен в E_{k+1}). Тогда в пространстве $E = \liminf E_k$ последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она s-сходится; любое подмножество A ограничено тогда и только тогда, когда оно s-ограничено, и замкнуто тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто.*

Доказательство. См. [8] или [9]. □

Далее, пусть все пространства E_k являются локально выпуклыми метризуемыми пространствами. Пусть $\rho_k(x, y)$ — метрика, порождающая топологию в E_k. Как известно, метрику ρ_k всегда можно выбрать так, что она будет инвариантной и шары по этой метрике будут выпуклыми множествами. Пусть

$$B_k = \{x \in E_k : \ \rho_k(x, 0) \le 1\}$$

— единичный шар в пространстве E_k. Так как вложения $\omega_k : E_k \mapsto E_{k+1}$ непрерывные, то без ограничения общности можно считать, что $B_k \subset B_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Всюду далее $E = \liminf E_k$.

Будем говорить, что последовательность пространств E_k удовлетворяет условию (F_1), если все B_k, $k \in \mathbb{N}$, замкнуты в E, и условию (F_2), если всякая абсолютно выпуклая ограниченная и замкнутая в E_k окрестность нуля замкнута в E_{k+1}.

Теорема 1.2. *Пусть $E = \liminf E_k$, где последовательность метризуемых ЛВП E_k удовлетворяет одному из условий (F_1) или (F_2). Тогда E отделимо и всякое подмножество $A \subset E$, ограниченное в E, содержится и ограничено в некотором E_k (т. е. множество A s-ограниченное).*

Доказательство. См. [10]. Отметим только, что в [10] рассматривается только случай, когда E_k — нормированные пространства, но все рассуждения практически дословно проходят и в более общем случае, когда E_k — метризуемые ЛВП. □

Далее рассмотрим случай, когда E_k — нормированные пространства. Пусть E'_k — множество линейных непрерывных функционалов на E_k (сопряженное пространство) и $\sigma(E_k, E'_k)$ — слабая топология на E_k.

Теорема 1.3. *Пусть $E = \lim\operatorname{ind} E_k$, где E_k — рефлексивные нормированные пространства. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *E — отделимое пространство и для любого подмножества $A \subset E$ из ограниченности A следует его s-ограниченность.*
2) *Если $A \subset E$ и множества $A_k := A \cap E_k$, $k = 1, 2, \ldots$, замкнуты в топологии $\sigma(E_k, E'_k)$, то A замкнуто в E.*

Доказательство. См. [10]. □

Следствие. *1.1. Пусть $E = \lim\operatorname{ind} E_k$, E_k — рефлексивные нормированные пространства, A — выпуклое подмножество в E, тогда подмножество A замкнуто в E тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто.*

Доказательство. Действительно, если A выпукло в E, то множества $A_k = A \cap E_k$ выпуклы в E_k, а выпуклое подмножество в нормированном пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда оно слабо замкнуто. □

§ 2. Примеры функциональных пространств

В этом и в следующем параграфах будут рассмотрены некоторые примеры функциональных пространств, которые являются индуктивными пределами нормированных или счетно-нормированных пространств, и исследованы связи между понятиями сходимости, ограниченности, замкнутости и понятиями s-сходимости, s-ограниченности, s-замкнутости в этих пространствах. Эти связи представляют интерес, так как такие пространства встречаются в некоторых задачах гармонического анализа и там часто происходит некоторая путаница между структурами индуктивного предела ЛВП и счетного объединения ЛВП, но, как показывают приводимые ниже примеры, в наиболее интересных случаях несущественно, какой из этих структур мы пользуемся. Все рассматриваемые пространства состоят из $\mathbb{C}$-значных или $\mathbb{R}$-значных функций.

Пусть Ω — произвольное счетное множество. Если $x(t)$ — функция на Ω, то будем говорить, что $x(t)$ стремится к нулю на бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное подмножество $K_\varepsilon \subset \Omega$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \notin K_\varepsilon$.

Пусть $\alpha : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям: а) $\alpha(t) \geq 1$ для любого $t \in \Omega$; б) для всякого $a > 1$ множество $\{t \in \Omega : \alpha(t) \leq a\}$ конечно. Обозначим через c_k множество всех функций $x(t)$ на Ω, для которых функция $x(t)(\alpha(t))^{-k}$ стремится к нулю на бесконечности. Пространство c_k является нормированным (даже банаховым) пространством относительно нормы

$$||x||_k := \sup_{t\in\Omega} |x(t)| \, (\alpha(t))^{-k}.$$

Здесь k может быть произвольным действительным числом, но далее будем считать, что $k = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $c_k \subset c_{k+1}$ и вложения непрерывны. Пусть $c_* = \lim\operatorname{ind} c_k$.

Для любого $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, обозначим через l_k^p множество функций $x(t)$, $t \in \Omega$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{t\in\Omega} |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-kp} < \infty.$$

Множество l_k^p является банаховым пространством с нормой

$$||x||_{p,k} := \left(\sum_{t\in\Omega} |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-kp} \right)^{1/p}.$$

Очевидно, что $l_k^p \subset l_{k+1}^p$ и вложение непрерывно, так как $||x||_{p,k+1} \leq ||x||_{p,k}$. Пусть $l_*^p = \lim\operatorname{ind} l_k^p$.

Теорема 2.1. *Вложения $c_k \subset c_{k+1}$ и $l_k^p \subset l_{k+1}^p$ вполне непрерывные.*

Доказательство.

1. Рассмотрим вложение $c_k \subset c_{k+1}$. Пусть $B_k = \{s \in C_k : ||x||_k \leq 1\}$ — единичный шар в c_k. Проверим, что B_k предкомпактно в c_{k+1}. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ для B_k существует конечная ε-сеть в c_{k+1}.

Множество $\Omega_\varepsilon := \{t \in \Omega : \alpha(t) \leq 2/\varepsilon\}$ конечное по условию б) на функцию $\alpha(t)$. Пусть $\mathcal{D}_\varepsilon$ — множество всех функций $x(t)$, $t \in \Omega$, которые равны нулю вне множества Ω_ε. Тогда $\mathcal{D}_\varepsilon$ — конечномерное подпространство в c_{k+1} и множество $\mathcal{D}_\varepsilon \cap B_k$ компактно в c_{k+1}, следовательно, для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть K. Проверим, что K является ε-сетью для B_k. Если $x(t) \in B_k$ и

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t, \Omega) := \begin{cases} x(t) & \text{при } \ t \in \Omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{при } \ t \notin \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

то $\tilde{x} \in \mathcal{D}_\varepsilon \cap B_k$ и

$$\|x - \tilde{x}\|_{k+1} = \sup_{t \notin \Omega_\varepsilon} |x(t)| \, (\alpha(t))^{-k} (\alpha(t))^{-1} \leq \sup_{t \notin \Omega_\varepsilon} (\alpha(t))^{-1} < \varepsilon/2.$$

Существует $y \in K$ такой, что $\|\tilde{x} - y\|_{k+1} < \varepsilon/2$, тогда $\|x - y\|_{k+1} \leq \|x - \tilde{x}\|_{k+1} + \|\tilde{x} - y\|_{k+1} < \varepsilon$, т. е. K будет ε-сетью для B_k.

2. Покажем, что вложение $l^p_k \subset l^p_{k+1}$ вполне непрерывно. Пусть $B_{p,k}(r) = \{x \in l^p_k : \|x\|_{p,k} \leq r\}$ — шар радиуса r в пространстве l^p_k. Частный случай шара $B_{p,k}(1)$ будем также обозначать $B_{p,k}$. Достаточно доказать, что множество $B_{p,k}$ предкомпактно в l^p_{k+1}.

Пусть $\varepsilon > 0$. Докажем, что существует конечная ε-сеть для множества $B_{p,k}$ в l^p_{k+1}. Так как $\mathcal{D}_\varepsilon$ — конечномерное подпространство в l^p_{k+1}, то множество $\mathcal{D}_\varepsilon \cap B_{p,k}$ компактно в l^p_{k+1}, следовательно, для него существует конечная $\varepsilon/2$-сеть K. Проверим, что K является ε-сетью для $B_{p,k}$. Используя те же обозначения, что и выше, заметим, что $\tilde{x}(t) \in \mathcal{D}_\varepsilon \cap B_{p,k}$ и

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\|^p_{p,k+1} &= \sum_{t \notin \Omega_\varepsilon} |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-(k+1)p} = \sum_{t \notin \Omega_\varepsilon} |x(t)| \, (\alpha(t))^{-kp} (\alpha(t))^{-p} \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \sum_{t \notin \Omega_\varepsilon} |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-kp} \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p . \end{aligned}$$

Следовательно, $\|x - \tilde{x}\|_{p,k+1} \leq \varepsilon/2$. Пусть y — такой элемент из K, что $\|\tilde{x} - y\|_{p,k+1} < \varepsilon/2$, тогда $\|x - y\|_{p,k+1} < \varepsilon$, т. е. K есть ε-сеть для $B_{p,k}$. □

Из теоремы 2.1 и теоремы 1.1 сразу вытекает следующая

Теорема 2.2. *В пространствах c_* и l^p_* $(1 \leq p < \infty)$ последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она s-сходится, любое подмножество ограничено тогда и только тогда, когда оно s-ограничено, и замкнуто тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто.*

Примером использования пространств c_* и l^p_* является работа [11], где рассматривается случай $\Omega = \mathbb{Z}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha(t) = \lambda^{|t_1|+\ldots+|t_n|}$, $\lambda > 1$.

Далее, пусть Ω — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, $\alpha : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям: а) $\alpha(t) \geq 1$ для всех $t \in \Omega$; б) для любого $a > 1$ подмножество $\{t \in \Omega : \alpha(t) \leq a\}$ компактное.

Если $x(t)$ — функция на Ω, то будем говорить, что $x(t)$ стремится к нулю на бесконечности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется компактное подмножество $K_\varepsilon \subset \Omega$ такое, что $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t \notin K_\varepsilon$.

Для любого $k > 0$ обозначим через C_k множество всех непрерывных функций $x(t)$ на Ω, для которых $x(t)(\alpha(t))^{-k}$ стремится к нулю на бесконечности. C_k является банаховым пространством относительно нормы

$$||x||_k := \sup_{t\in\Omega} |x(t)| \, (\alpha(t))^{-k}.$$

Очевидно, что $C_k \subset C_r$ при $k < r$ и это вложение непрерывно, так как $||x||_r \leq ||x||_k$. В частности, непрерывны вложения $C_k \subset C_{k+1}$. Пусть $C_* = \lim\operatorname{ind} C_k$.

Обозначим через $\widetilde{C}_k$ множество всех непрерывных функций $x(t)$ на Ω, для которых функция $x(t)(\alpha(t))^{-k}$ ограничена. Относительно нормы $||x||_k$ множество $\widetilde{C}_k$ тоже является банаховым пространством. Очевидно, что $C_k \subset \widetilde{C}_k \subset C_{k+1}$, причем вложения непрерывны. Если обозначить $\widetilde{C}_* = \lim\operatorname{ind} \widetilde{C}_k$, то из непрерывности вложений $C_k \subset \widetilde{C}_k \subset \widetilde{C}_*$ и критерия непрерывности линейного оператора (см. §1) следует, что вложение $C_* \subset \widetilde{C}_*$ непрерывно. С другой стороны, из непрерывности вложений $\widetilde{C}_k \subset C_{k+1} \subset C_*$ следует, что вложение $\widetilde{C}_* \subset C_*$ непрерывно. Окончательно получаем, что $C_* = \widetilde{C}_*$ как топологические векторные пространства.

Пусть μ — произвольная регулярная борелевская мера на пространстве Ω, $1 \leq p < \infty$. Для любого $k > 0$ обозначим через L^p_k множество всех измеримых функций на Ω, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\Omega} |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-kp} \, d\mu < \infty,$$

причем функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры 0. L^p_k является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x\|_{p,k} = \left(\int -\Omega |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-pk} \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Очевидно, что $L^p_k \subset L^p_r$ при $k < r$ и вложение непрерывно, так как $\|x\|_r \le \|x\|_k$. В частности, непрерывны вложения $L^p_k \subset L^p_{k+1}$. Пусть $L^p_* = \lim \operatorname{ind} L^p_k$. Пространства c_* и l^p_* являются частными случаями пространств C_* и L^p_*, когда Ω — счетное дискретное топологическое пространство, но в общем случае вложения $C_k \subset C_{k+1}$ и $L^p_k \subset L^p_{k+1}$ могут не быть вполне непрерывными.

Теорема 2.3. *Последовательности пространств $\widetilde{C}_k$ и L^p_k удовлетворяют условиям $(F1)$ из §1, т. е. единичный шар в пространстве $\widetilde{C}_k$ или L^p_k замкнут в пространстве $\widetilde{C}_*$ или L^p_* соответственно.*

Доказательство. **1.** *Докажем, что шар $\widetilde{B}_k = \{x \in \widetilde{C}_k : \|x\|_k \le 1\}$ замкнут в пространстве $\widetilde{C}_*$.*

Для любого $a \in \Omega$ линейный функционал $\delta_a : x(t) \mapsto x(a)$ непрерывен в пространстве $\widetilde{C}_*$ (следует из критерия непрерывности линейного оператора, см. §1), следовательно, множество

$$P(a) := \{x(t) \in \widetilde{C}_* : |\delta_a(x) \le (\alpha(a))^k\}$$

замкнуто в $\widetilde{C}_*$. Заметим, что

$$\widetilde{B}_k = \bigcap_{a \in \Omega} P(a),$$

следовательно, множество $\widetilde{B}_k$ тоже замкнуто в $\widetilde{C}_*$.

2. *Докажем, что шар $B_{p,k} = B_{p,k}(1) = \{x \in L^p_k : \|x\|_{p,k} \le 1\}$ замкнут в L^p_*.*

Для любого компактного подмножества $\Lambda \subset \Omega$ определим функционал

$$\varphi_{\Lambda,k}(x) := \Big(\int_\Lambda |x(t)|^p \, (\alpha(t))^{-pk} \, d\mu\Big)^{1/p}, \quad x \in L^p_*.$$

Функционал $\varphi_{\Lambda,k}$ является полунормой на пространстве L^p_*, в частности, функционал $\varphi_{\Lambda,k}$ выпуклый. Известен критерий непрерывности выпуклого функционала (см. [1, гл. II, §5, предл. 2]): *для того чтобы* *выпуклый функционал $f : E \mapsto \mathbb{R}$ на топологическом векторном пространстве E был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы f был ограничен сверху на некоторой окрестности нуля $U \subset E$.*

Пусть $U = \{x \in L^p_* : \varphi_{\Lambda,k}(x) \le 1\}$. Проверим, что U будет окрестностью нуля в L^p_*. Для этого достаточно доказать, что $U \cap L^p_d$ является окрестностью нуля в L^p_d для любого $d \in \mathbb{N}$, а это вытекает из того, что

$$B_{p,d}(r) \subset U \cap L^p_d$$

при

$$r \le \left(\max_{t\in\Lambda}(\alpha(t))^{d-k}\right)^{-1}.$$

Так как U — окрестность нуля в L^p_* и функционал $\varphi_{\Lambda,k}$ ограничен на U, то он непрерывен, следовательно, множество

$$\varphi^{-1}_{\Lambda,k}([0,1]) = \{x \in L^p_* : \varphi_{\Lambda,k}(x) \le 1\}$$

замкнуто в L^p_*. Остается заметить, что

$$B_{p,k} = \bigcap_{\Lambda} \varphi^{-1}_{\Lambda,k}([0,1]),$$

где пересечение берется по всем компактным подмножествам $\Lambda \subset \Omega$, следовательно, шар $B_{p,k}$ замкнут в L^p_*.

Теорема 2.4. *В пространствах C_* и L^p_* $(1 \le p < \infty)$ любое подмножество ограничено тогда и только тогда, когда оно s-ограничено; любая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она s-сходится.*

Доказательство. То, что пространства $C_* = \widetilde{C}_*$ и L^p_* хаусдорфовы и в них ограниченность совпадает с s-ограниченностью, сразу вытекает из теорем 1.2 и 2.3. Проверим, что в пространствах C_* и L^p_* совпадают сходимость и s-сходимость последовательностей. Для этого достаточно показать, что из сходимости последовательности следует s-сходимость.

Пусть $x_n(t) \in C_*$ и последовательность x_n сходится в C_*. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как любая сходящаяся последовательность в топологическом векторном пространстве является ограниченным множеством, то по теореме 2.3 множество $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ будет и s-ограниченным, т. е. существует

$d \in \mathbb{N}$ такое, что все $x_n \in C_d$ и $||x_n||_d \le A$ для некоторой постоянной $A > 0$. Далее докажем, что $x_n \to 0$ по норме пространства C_{d+1}, откуда будет следовать s-сходимость последовательности x_n.

Для любого компактного подмножества $\Lambda \subset \Omega$ и любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим множество

$$U(\Lambda;\varepsilon) := \{x \in C_* : \sup_{t\in\Lambda} |x(t)| \le \varepsilon\}.$$

Проверим, что $U(\Lambda;\varepsilon)$ является окрестностью нуля в C_*. Очевидно, что $U(\Lambda;\varepsilon)$ — выпуклое множество. Достаточно проверить, что при любом k множество $U(\Lambda;\varepsilon)\cap C_k$ является окрестностью нуля в банаховом пространстве C_k. Но легко видеть, что в $U(\Lambda;\varepsilon)\cap C_k$ содержится шар $B_k(\delta) = \{x \in C_k : ||x||_k \le \delta\}$ при

$$\delta \le \left(\max_{t\in\Lambda} (\alpha(t))^k\right)^{-1}.$$

Пусть Λ — такое компактное подмножество в Ω, что $\alpha(t) > 2A/\varepsilon$ при $t \notin \Lambda$ (существование такого подмножества вытекает из свойства б) функции $\alpha(t)$). Так как $x_n \to 0$, то при $n \ge N(\varepsilon)$ $x_n \in U(\Lambda;\varepsilon/2)$. Тогда

$$\begin{aligned}||x_n||_{d+1} = \sup_{t\in\Omega} |x(t)|\,(\alpha(t))^{-d-1} &\le \sup_{t\in\Lambda} |x(t)| + \sup_{t\notin\Lambda} |x(t)|\,(\alpha(t))^{-d}(\alpha(t))^{-1} \\ &< \varepsilon/2 + A(\varepsilon/2A) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Следовательно, $x_n \to 0$ в пространстве C_{d+1}.

Пусть $x_n \in L^p_*$ и последовательность x_n сходится в L^p_*. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \to 0$. Как и в случае пространства C_*, получаем, что существуют $d \in \mathbb{N}$ и $A > 0$ такие, что $x_n \in L^p_d$ и $||x_n||_{p,d} \le A$. Пусть

$$U_{p,d}(\Lambda,\varepsilon) := \{x \in L^p_* : \left(\int_\Lambda |x(t)|^p\,(\alpha(t))^{-dp}\,d\mu\right)^{1/p} \le \varepsilon\}.$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 2.3, проверяем, что множество $U_{p,d}(\Lambda;\varepsilon)$ является окрестностью нуля в L^p_*. Пусть Λ — такое компактное подмножество в Ω, что $\alpha(t) > 2A/\varepsilon$ при $t \notin \Lambda$. При достаточно больших n $x_n \in U_{p,d}(\Lambda; \varepsilon/2)$ и, следовательно,

$$\|x_n\|_{d+1} \le \left(\int\limits_{\Lambda} |x(t)|^p (\alpha(t))^{-(d+1)p} d\mu\right)^{1/p}$$
$$+\left(\int\limits_{\Omega\setminus\Lambda} |x(t)|^p (\alpha(t))^{-dp} (\alpha(t))^{-p} d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon/2 + A(\varepsilon/2A) = \varepsilon.$$

Тогда $x_n \to 0$ в пространстве L^p_{d+1} и последовательность x_n s-сходится. $\square$

При $1 < p < \infty$ пространства L^p_k рефлексивные, поэтому в этом случае можно использовать теорему 1.3 и следствие 1.1. В результате получим следующую теорему.

Теорема 2.5. *В пространстве L^p_*, $1 < p < \infty$, выпуклое подмножество A замкнуто тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто, в частности, если A — линейное подпространство в L^p_*, то s-замкнутость A эквивалентна замкнутости.*

Для пространств C_* и L^1_* неизвестно, следует ли из s-замкнутости A замкнутость, если A — произвольное линейное подпространство (и тем более, если A — произвольное выпуклое подмножество), но удается доказать эквивалентность замкнутости и s-замкнутости для некоторых специальных множеств Ω и специальных линейных подпространств A в C_* или в L^1_*, которые представляют интерес с точки зрения гармонического анализа. Этим вопросам посвящен следующий параграф.

§ 3. Замкнутость и s-замкнутость инвариантных подпространств

Пусть Ω — хаусдорфово топологическое пространство и G — топологическая группа. *Топологическим действием* группы G на пространстве Ω называется непрерывное отображение $G \times \Omega \mapsto \Omega$ ($(g,t) \mapsto gt,\ g \in G,\ t \in \Omega$), удовлетворяющее следующим условиям: 1) $\forall g_1, g_2 \in G,\ \forall t \in \Omega\ g_1(g_2 t) = (g_1 g_2)t$; 2) $\forall t \in \Omega\ et = t$, где e — единичный элемент группы G. В этом случае также говорят, что G является *топологической группой преобразований пространства* Ω или что Ω

является *топологическим G-пространством.* Действие называется транзитивным, если для любых $t_1, t_2 \in \Omega$ существует элемент $g \in G$ такой, что $gt_1 = t_2$. Если группа G транзитивно действует на Ω, то Ω часто называют однородным пространством группы G. Если G — группа Ли и Ω — гладкое многообразие, то аналогично определяется гладкое действие группы G на Ω. Подробнее о топологических и гладких группах преобразований см. [12, 13].

Далее, пусть Ω — локально компактное хаусдорфово топологическое пространство, G — локально компактная топологическая группа, транзитивно действующая на Ω. Пусть $\alpha(t)$ — непрерывная функция на Ω, $\rho(g)$ — непрерывная функция на G, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $\alpha(t) \geq 1$, $\rho(g) \geq 1$ для любых $t \in \Omega$, $g \in G$;

б) для любого $a > 1$ подмножество $\alpha^{-1}([1, a])$ компактно в Ω;

в) $\forall t \in \Omega \; \forall g \in G, \quad \alpha(gt) \leq \rho(g)\, \alpha(t)$.

Пусть μ — регулярная G-инвариантная борелевская мера на пространстве Ω. Предположим, что функция $\alpha(t)$ дополнительно удовлетворяет условию

г) существует $d > 0$ такое, что

$$\int\limits_{\Omega} (\alpha(t))^{-d} \, d\mu < \infty.$$

Будем называть произвольное линейное пространство W, состоящее из функций на Ω, G-инвариантным пространством, если из того, что $x(t) \in W$, следует, что $x(gt) \in W$ для всех $g \in G$. Проверим, что все пространства L^p_k, $k > 0$, являются G-инвариантными. Пусть $x(t) \in L^p_k$, тогда

$$\int\limits_{\Omega} |x(gt)|^p (\alpha(t))^{-kp} d\mu = \int\limits_{\Omega} |x(t)|^p (\alpha(g^{-1}t))^{-kp} d\mu$$
$$\leq (\rho(g))^{kp} \int\limits_{\Omega} |x(t)|^p (\alpha(t))^{-kp} d\mu < \infty$$
,

при этом использована инвариантность меры μ, а также неравенство $\alpha(g^{-1}t) \geq \alpha(t)/\rho(g)$, которое следует из свойства в). Аналогично проверяется, что пространство C_k является G-инвариантным.

Теорема 3.1. *Линейное G-инвариантное подпространство $H \subset C_*$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто.*

Теорема 3.2. *Линейное G-инвариантное подпространство $H \subset L^1_*$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто.*

Следствие. *3.1. В пространствах C_* и L^p_* $(1 \le p < \infty)$ линейное G-инвариантное подпространство замкнуто тогда и только тогда, когда оно s-замкнуто.*

Прежде чем доказывать теоремы 3.1 и 3.2, получим некоторые вспомогательные результаты. Для любых топологических векторных пространств E_1 и E_2 будем писать $E_1 \hookrightarrow E_2$, если $E_1 \subset E_2$ и вложение непрерывно.

Проверим, что $C_* \hookrightarrow L^p_* \hookrightarrow L^1_*$, $p > 1$.

Пусть $x(t) \in C_k$, тогда

$$||x||_k = \sup_{t \in \Omega} |x(t)|(\alpha(t))^{-k} < \infty.$$

Из оценки

$$||x||_{p,k+d/p} = \left(\int\limits_{\Omega} |x(t)|^p (\alpha(t))^{-p(k+d/p)} d\mu\right)^{1/p} \le A_1 ||x||_k,$$

где

$$A_1 = \left(\int\limits_{\Omega} (\alpha(t))^{-d} d\mu\right)^{1/p},$$

следует, что $C_k \hookrightarrow L^p_{k+d/p}$, а из этого вытекает, что $C_* \hookrightarrow L^p_*$.

Пусть $x(t) \in L^p_k$, $p > 1$, тогда

$$||x||_{p,k} = \left(\int\limits_{\Omega} |x(t)|^p (\alpha(t))^{-pk} d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть q — сопряженный показатель к p, т. е. $1/p + 1/q = 1$. Используя неравенство Гельдера, получим, что

$$||x||_{1,k+d/q} = \int\limits_{\Omega} |x(t)|(\alpha(t))^{-k}(\alpha(t))^{-d/q} d\mu$$

$$\leq \left(\int_{\Omega} |x(t)|^p (\alpha(t))^{-kp} d\mu\right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} (\alpha(t))^{-d} d\mu\right)^{1/q} = A_2 \, \|x\|_{p,k},$$

где

$$A_2 = \left(\int_{\Omega} (\alpha(t))^{-d} d\mu\right)^{1/q}.$$

Следовательно, $L_k^p \hookrightarrow L_{k+d/q}^1$, откуда $L_*^p \hookrightarrow L_*^1$.

Операторы $T(g) : x(t) \mapsto x(g^{-1}t)$, $g \in G$, задают квазирегулярные представления группы G в банаховых пространствах (БП) C_k или L_k^p. Легко видеть, что эти представления непрерывные, так что к ним применима обычная техника теории представлений топологических групп в БП (см., например, [14]). Пусть $C_c(G)$ — множество непрерывных функций на G с компактными носителями, dg — мера Хаара на группе G. Для $\varphi(g) \in C_c(G)$ и $x(t) \in L_*^p$ (или $x(t) \in C_*$) определяется свертка

$$\varphi * x(t) := \int_{G} \varphi(g) \, x(g^{-1}t) \, dg.$$

Если $x(t) \in L_k^p$ (или $x(t) \in C_k$), то $\varphi * x \in L_k^p$ (соответственно $\varphi * x \in C_k$). Если H — замкнутое G-инвариантное линейное подпространство в L_k^p или в C_k и $x(t) \in H$, то $\varphi * x \in H$ для любой функции $\varphi \in C_c(G)$.

Для любой функции $\varphi(g) \in C_c(G)$ определим оператор $S_\varphi : x(t) \mapsto \varphi * x(t)$.

Лемма 3.1. *Оператор S_φ является непрерывным оператором из БП L_k^p в БП C_{k+1}.*

Доказательство. Легко видеть, что функция $\varphi * x(t)$ непрерывная при $\varphi \in C_c(G)$, $x \in L_k^p$. Из единственности (с точностью до множителя) инвариантной меры на пространстве Ω следует, что для некоторого числа $A > 0$

$$\int_{G} f(g^{-1}t) \, dg = A \int_{\Omega} f(t) \, d\mu$$

для любой интегрируемой функции $f(t)$ на Ω.

Пусть $x(t) \in L^p_k$, $p > 1$. Пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$|\varphi * x(t)| = \Big|\int\limits_G \varphi(g)\,(\alpha(g^{-1}t))^k x(g^{-1}t)\,(\alpha(g^{-1}t))^{-k}\,dg\Big|$$

$$\leq \left(\int\limits_G |x(g^{-1}t)|^p\,(\alpha(g^{-1}t))^{-kp}\,dg\right)^{1/p}\left(\int\limits_G |\varphi(g)|^q\,(\alpha(g^{-1}t))^{kq}\,dg\right)^{1/q}$$

$$\leq A^{1/p}\,\|x\|_{p,k}\,(\alpha(t))^k\left(\int\limits_G |\varphi(g)|^q\,(\rho(g^{-1}))^{kq}\,dg\right)^{1/q}.$$

Из этого неравенства следует, что

$$|\varphi * x(t)| \leq C\,\|x\|_{p,k}(\alpha(t))^k, \tag{3.1}$$

где C не зависит от x. Следовательно, функция $\varphi * x(t)$ принадлежит пространствам C_r при $r > k$ и непрерывно зависит от x, в частности, $S_\varphi(x) = \varphi * x \in C_{k+1}$ и оператор S_φ непрерывный.

Осталось рассмотреть случай $p = 1$. Пусть $x(t) \in L^1_k$, тогда

$$|\varphi * x(t)| \leq \int\limits_G |\varphi(g)|\,(\alpha(g^{-1}t))^k\,|x(g^{-1}t)|\,(\alpha(g^{-1}t))^{-k}\,dg$$

$$\leq (\alpha(t))^k\int\limits_G |\varphi(g)|\,(\rho(g^{-1}))^k\,|x(g^{-1}t)|\,(\alpha(g^{-1}t))^{-k}\,dg \leq C\,\|x\|_{1,k}(\alpha(t))^k,$$

где

$$C = A\max_{g\in G}|\varphi(g)|\,(\rho(g^{-1}))^k.$$

Остальные рассуждения проводятся, как для случая $p > 1$. □

Следствие. *3.2. S_φ — непрерывный оператор из L^1_k в L^p_{k+r+1}, где $r = [d/p] + 1$ ($[a]$ — целая часть числа a), а также из L^1_* в L^p_*.*

Действительно, S_φ непрерывно отображает L^1_k в C_{k+1}, а $C_{k+1} \hookrightarrow L^p_{k+d/p+1} \hookrightarrow L^p_{k+r+1}$.

Обозначим через Λ совокупность всех окрестностей единицы в группе G. Λ является направленным множеством, упорядоченным по включению. Для каждого $U \in \Lambda$ фиксируем функцию $\varphi_U(g) \in C_c(G)$, удовлетворяющую условиям: 1) $\varphi_U(g) \geq 0$; 2) носитель функции φ_U содержится в U; 3) $\varphi_U(e) > 0$, e — единичный элемент в группе G; 4) $\int_G \varphi_U(g)\,dg = 1$. Набор функций φ_U будем называть δ-образным семейством. Стандартным образом проверяется, что если $x(t) \in L^p_k$ (или $x(t) \in C_k$), то обобщенная последовательность $\varphi_U * x$ сходится к x в пространстве L^p_k (соответственно в C_k).

Доказательство теоремы 3.1.

1. Пусть H — s-замкнутое G-инвариантное подпространство в C_*. Тогда подпространства $H_k := H \cap C_k$ являются замкнутыми G-инвариантными подпространствами в банаховых пространствах C_k. Зафиксируем любое число $p > 1$. Мы знаем, что $C_k \subset L^p_{k+r}$, где $r = [d/p] + 1$. Тогда и $H_k \subset L^p_{k+r}$. Пусть $[H_k]_{k+r}$ — замыкание H_k в БП L^p_{k+r}, $W_k := [H_k]_{k+r} \cap L^p_k$.

2. *Проверим, что при всех $m > k$*

$$W_m \cap L^p_k \subset W_{k+1}. \tag{3.2}$$

Пусть $x \in W_m \cap L^p_k$, тогда $x \in L^p_k$ и $x \in [H_m]_{m+r}$, а так как L^p_{m+r} — нормированное пространство, то существует последовательность $x_n \in H_m$ такая, что $x_n \to x$ в БП L^p_{m+r}. Для любой функции $\varphi \in C_c(G)$ последовательность $\varphi * x_n$ сходится к $\varphi * x$ в C_{m+r+1} (следует из леммы 3.1). Так как $x_n \in H_m \subset H_{m+r+1}$, то $\varphi * x_n \in H_{m+r+1}$, а так как H_{m+r+1} замкнуто в C_{m+r+1}, то и $\varphi * x \in H_{m+r+1}$. Кроме того, так как $x \in L^p_k$, то $\varphi * x \in C_{k+1}$ и $\varphi * x \in L^p_k$, следовательно $\varphi * x \in H_{m+r+1} \cap C_{k+1} = H_{k+1}$ и $\varphi * x \in L^p_k \subset L^p_{k+1}$. Тогда получаем, что $\varphi * x \in H_{k+1} \cap L^p_{k+1} \subset W_{k+1}$.

Если взять в качестве φ функцию φ_U из δ-образного семейства, то $\varphi_U * x \in W_{k+1}$ и обобщенная последовательность $\varphi_U * x$ сходится к x в пространстве L^p_{k+1} (даже в L^p_k), а так как W_{k+1} замкнуто в L^p_{k+1}, то $x \in W_{k+1}$.

3. Пусть $W =: \bigcup_k W_k$. Из (3.2) следует, что

$$W \cap L^p_m = \bigcup_k (W_k \cap L^p_m) \subset W_{m+1} \cap L^p_m.$$

С другой стороны,

$$W_{m+1} \cap L^p_m \subset W \cap L^p_m,$$

следовательно, $W \cap L^p_m = W_{m+1} \cap L^p_m$. Подпространство $W_{m+1} \cap L^p_m$ замкнуто в L^p_m, поэтому подпространство W s-замкнуто в L^p_*, а отсюда по теореме 2.5 вытекает, что W замкнуто в L^p_*.

4. *Проверим, что $W_m \cap C_k = H_k$ при $m \geq k$.*

Пусть $x \in W_m \cap C_k$. Тогда $x \in [H_m]_{m+r}$, т. е. существует последовательность $x_n \in H_m$ такая, что $x_n \to x$ в L^p_{m+r}. Для любого $\varphi \in C_c(G)$ последовательность $\varphi * x_n$ сходится к $\varphi * x$ в C_{m+r+1}, а так как $x_n \in H_m \subset H_{m+r+1}$, то и $\varphi * x \in H_{m+r+1}$.

С другой стороны, так как $x \in C_k$, то $\varphi * x \in C_k$. Следовательно, $\varphi * x \in H_{m+r+1} \cap C_k = H_k$.

Возьмем в качестве φ функции φ_U из δ-образного семейства. Тогда $\varphi_U * x \in H_k$ и обобщенная последовательность $\varphi_U * x$ сходится к x в БП C_k. Так как H_k замкнуто в C_k, то и $x \in H_k$.

5. *Проверим, что $W \cap C_* = H$.*

Из пункта **4** следует, что

$$W \cap C_k = \bigcup_m (W_m \cap C_k) = H_k,$$

тогда

$$W \cap C_* = \bigcup_k (W \cap C_k) = \bigcup_k H_k = H.$$

6. Так как вложение $\theta : C_* \subset L^p_*$ непрерывно и W замкнуто в L^p_*, то подпространство $H = W \cap C_* = \theta^{-1}(W)$ замкнуто в C_*. $\square$

Доказательство теоремы 3.2.

1. Пусть V — произвольное s-замкнутое, G-инвариантное подпространство в L^1_*, $V_k := L^1_k \cap V$. Зафиксируем какое-нибудь число $p > 1$. Существует $a \in \mathbb{N}$ такое, что $L^p_k \hookrightarrow L^1_{k+a}$ (можно, например, взять $a = [d/q] + 1$). Пусть $W_k := L^p_k \cap V_{k+a}$, тогда W_k — замкнутое G-инвариантное подпространство в L^p_k. Положим $W := \bigcup_k W_k$.

2. *Проверим, что $W_m \cap L^p_k = W_k \cap L^p_k$ при $m > k$.*

Пусть $x \in W_m \cap L^p_k$. Из включений

$$W_m \cap L^p_k = V_{m+a} \cap L^p_k \subset V_{m+a} \cap L^1_{k+a} = V_{k+a}$$

следует, что $x \in V_{k+a}$, следовательно, $W_m \cap L^p_k \subset V_{k+a} \cap L^p_k = W_k$. С другой стороны, $W_k \subset W_m \cap L^p_k$ при $m > k$.

3. *Проверим, что подпространство W замкнуто в L^p_*.*

Для любого $k \in \mathbb{N}$

$$W \cap L_k^p = \bigcup_m (W_m \cap L_k^p) = W_k,$$

следовательно, подпространство W s-замкнуто в L_*^p, а из теоремы 2.5 вытекает, что W замкнуто в L_*^p.

4. *Пусть $[W]$ — замыкание подпространства W в L_*^1. Проверим, что $[W] = V$.*

Пусть $x \in [W] \cap L_k^1$, тогда существует обобщенная последовательность x_α такая, что $x_\alpha \in W$ и $x_\alpha \to x$ в L_*^1. Для любой функции $\varphi(g) \in C_c(G)$ обобщенная последовательность $\varphi * x_\alpha$ сходится к $\varphi * x$ в пространстве L_*^p (см. следствие 3.2). Так как $\varphi * x_\alpha \in W$, а W замкнуто в L_*^p, то и $\varphi * x \in W$. С другой стороны, так как $x \in L_k^1$, то $\varphi * x \in L_{k+r+1}^p$ (следствие 3.2), следовательно,

$$\varphi * x \in L_{k+r+1} \cap W = V_{k+r+1}.$$

Взяв в качестве φ функции φ_U из δ-образного семейства, получим, что $\varphi_U * x \to x$ в пространстве L_k^1 и тем более в пространстве L_{k+r+1}^1. Так как V_{k+r+1} замкнуто в L_{k+r+1}^1, то $x \in V_{k+r+1} \subset V$. Следовательно, $[W] \subset V$.

Обратно, пусть $x \in V_k$, тогда

$$\varphi * x \in V_k \cap L_{k+r+1}^p \subset V_{k+r+1+a} \cap L_{k+r+1} = W_{k+r+1} \subset W.$$

В частности, $\varphi_U * x \in W$, и так как $\varphi_U * x \to x$ в L_*^1, то $x \in [W]$, следовательно, $V \subset [W]$.

Окончательно получаем, что $[W] = V$, следовательно, V является замкнутым подпространством в L_*^1. □

Следствие. *3.3. В пространствах C_* и L_*^p ($1 \le p < \infty$) линейное G-инвариантное подпространство замкнуто тогда и только тогда, когда оно секвенциально замкнуто.*

В случае, когда Ω — гладкое многообразие, кроме пространств C_* и L_*^p, естественным образом возникают различные функциональные пространства, состоящие из дифференцируемых функций. Мы рассмотрим далее только вопросы о совпадении замкнутости и s-замкнутости для линейных G-инвариантных подпространств в некоторых таких пространствах.

Пусть G — группа Ли, Ω — гладкое многообразие, на котором группа G действует гладко и транзитивно. Как и ранее, пусть μ — G-инвариантная мера на Ω, $\alpha(t)$ и $\rho(g)$ — непрерывные функции на Ω и G соответственно, удовлетворяющие условиям а)—г). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Обычным способом любой вектор $\xi \in \mathfrak{g}$ порождает векторное поле, т. е. дифференциальный оператор первого порядка на Ω:

$$(\xi x)(t) := \frac{d}{ds} x(\exp(t\xi)t)\bigg|_{s=0},$$

где $t \in \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, $s \mapsto \exp(s\xi)$ — однопараметрическая подгруппа в группе G, соответствующая вектору ξ.

Выберем какой-нибудь базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Для любых $d \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $k > 0$ обозначим через C_k^d множество d раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на Ω таких, что

$$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r} x \in C_k$$

для любых векторов $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_r}$, $0 \le r \le d$, из базиса алгебры $\mathfrak{g}$ (векторы могут повторяться). C_k^d является банаховым пространством с нормой

$$N_{k,d}(x) := \sum \|\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r} x\|_k,$$

где суммирование происходит по всевозможным наборам $(i_1, \ldots, i_r)$ $(0 \le r \le d$, каждый индекс в наборе пробегает значения от 1 до $N)$. В частности, $C_k^0 = C_k$. Пусть

$$C_k^\infty = \bigcap_{d=1}^{\infty} C_k^d.$$

Топология в C_k^∞ порождается счетной системой норм $N_{k,d}$, $d \in \mathbb{Z}_+$, и C_k^∞ является пространством Фреше. Очевидно, что $C_k^d \hookrightarrow C_{k+1}^d$. Множество

$$C_*^d = \bigcup C_k^d, \qquad d \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\},$$

снабдим топологией индуктивного предела ЛВП C_k^d. Очевидно, что $C_*^\infty \hookrightarrow C_*^d$ для любого $d \in \mathbb{Z}_+$. Легко видеть, что каждое пространство C_k^d G-инвариантно и квазирегулярное представление $T(g)$ является непрерывным представлением группы G в ЛВП C_*^d.

Пусть $C_0^\infty(G)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций на группе G с компактным носителем.

Лемма 3.2. *Для любой функции* $\varphi \in C_0^\infty(G)$ *оператор* $S_\varphi : x \mapsto \varphi * x$ *является линейным непрерывным оператором из* L_*^p *в* C_*^∞.

Доказательство. Пусть $x(t) \in L_k^p$, $1 \le p < \infty$. В лемме 3.1 получено, что $\varphi * x \in C_{k+1}$ и $||\varphi * x||_{k+1} \le C(\varphi)\,||x||_{p,k}$. Заметим, что для любого $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\xi(\varphi * x)(t) = (L(\xi)\varphi) * x(t),$$

где

$$(L(\xi)\varphi)(g) := \left.\frac{d}{ds}\varphi(\exp(s\xi)g)\right|_{s=0}.$$

Так как $L(\xi)\varphi \in C_0^\infty(G)$, то и $\xi(\varphi * x)$ принадлежит C_{k+1} и непрерывно зависит от x. Аналогично, для любых $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \mathfrak{g}$ функция $\xi_1 \ldots \xi_d(\varphi * x)$ принадлежит пространству C_{k+1} и

$$||\xi_1 \ldots \xi_d(\varphi * x)||_{k+1} \le C(\varphi; \xi_1, \ldots, \xi_d)\,||x||_{p,k}.$$

Следовательно, $\varphi * x \in C_{k+1}^\infty$ и отображение $x \mapsto \varphi * x$ из L_k^p в C_{k+1}^∞ непрерывно, а тогда и оператор $S_\varphi : L_*^p \mapsto C_*^\infty$ непрерывен.

Следствие. *3.4. Для любых* $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $1 \le p < \infty$, $d \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ *оператор* S_φ *является линейным непрерывным оператором из ЛВП* L_*^p *в ЛВП* C_*^d.

Теорема 3.3. *Линейное* G*-инвариантное подпространство* $H \subset C_*^d$, $0 \le d < \infty$, *замкнуто тогда и только тогда, когда оно* s*-замкнуто.*

Доказательство этой теоремы проводится так же, как доказательство предложения 3.1, если только заменить функции из $C_0(G)$ на функции из $C_0^\infty(G)$ и вместо леммы 3.1 воспользоваться леммой 3.2.

Приведем некоторые примеры функциональных пространств рассмотренных выше типов, которые использовались в работах по гармоническому анализу. В каждом примере указываются множество Ω, группа G, действие группы G на Ω, функции $\alpha(t)$ и $\rho(g)$.

1. В работе [15] рассматривался случай, когда Ω совпадает с группой $SL(2,\mathbb{R})$. В этом случае $G = SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ и группа G действует на Ω левыми и правыми сдвигами, т. е.

$$(g_1, g_2)t = g_1 t g_2^{-1}, \qquad g = (g_1, g_2) \in G, \quad t \in \Omega.$$

Функции $\alpha(t)$ и $\rho(g)$ определяются формулами

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} \sum_{1\le i,j\le 2} |t_{ij}|^2\right)^{1/2}, \qquad \rho(g_1, g_2) = \alpha(g_1)\,\alpha(g_2^{-1}),$$

где

$$t = (t_{ij}) \in \Omega = SL(2,\mathbb{R}), \qquad (g_1, g_2) \in G = SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R}).$$

Аналогичные пространства для случая, когда $\Omega = SL(2,\mathbb{C})$, $G = SL(2,\mathbb{C}) \times SL(2,\mathbb{C})$, рассматривались в [16].

2. Пусть Ω — группа движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, $G = \Omega \times \Omega$, группа G действует на Ω, как в примере **1**. Пусть $a = (a_1, a_2)$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^2$, $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$, $|a| = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$. Для $g \in \Omega$ и $(g_1, g_2) \in G$ полагаем $\alpha(g) = \mathrm{e}^{|g0|}$, $\rho(g_1, g_2) = \alpha(g_1)\,\alpha(g_2^{-1})$. Функциональные пространства на таком множестве Ω рассматривались в [17].

3. $\Omega = \mathbb{R}^n$, $G = ISO(n)$ — группа изометрий пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих ориентацию. Группа G естественным образом действует на $\mathbb{R}^n$. Пусть $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $|t| = (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2}$, $o = (0, \ldots, 0)$, $g \in G$. Рассматривались два типа функций $\alpha(t)$ и $\rho(g)$:

1) $\alpha(t) = \mathrm{e}^{|t|}$, $\rho(g) = \mathrm{e}^{|go|}$ (см. [18]);

2) $\alpha(t) = 1 + |t|$, $\rho(g) = (1 + |go|)$ (см. [19]).

4. Пусть Ω — произвольное некомпактное риманово симметрическое пространство. Ω может быть реализовано как фактор-пространство G/K, где G — полупростая группа Ли с конечным центром, K — максимальная компактная подгруппа, группа G действует на $\Omega = G/K$ левыми сдвигами. Пусть $o = eK \in \Omega$ (e — единичный элемент в группе G). Для любого $a \in \Omega$ пусть $|a|$ — расстояние между точками a и o. Функции $\alpha(t)$ и $\rho(g)$ ($t \in \Omega,\ g \in G$) определяются формулами

$$\alpha(t) = \mathrm{e}^{|t|}, \qquad \rho(g) = \mathrm{e}^{|go|}.$$

Такие пространства рассматривались в [20, 21].

Résumé

In some function spaces, which are inductive limits of the normed spaces, the connections between various definitions of convergence of sequences, boundednes and closure of sets are investigated. In particular, the spaces consisting of functions on homogeneous spaces of locally compact topological groups are considered. The equivalence to a closure and sequential closure for linear G-invariant subspaces is proved.

Литература

[1] Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства.* М.: ИЛ, 1959.

[2] Робертсон А., Робертсон В. *Топологические векторные пространства.* М.: Мир, 1967.

[3] *Пространства основных и обобщенных функций*/ Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. М.: ГИФМЛ, 1958. (Обобщенные функции: В 6 вып.; Вып 2).

[4] Земанян А. Г. *Интегральные преобразования обобщенных функций.* М.: Наука, 1974.

[5] Соболев С. Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.* М.: Наука, 1989.

[6] Макаров Б. М. *О некоторых патологических свойствах индуктивных пределов B-пространств*// Успехи мат. наук. 1963. Т. 18. Вып. 3. С. 171–178.

[7] Гротендик А. *О пространствах (F) и (DF)*// Математика: Сб. переводов. 1958. Т. 2. Вып. 2. С. 81–127.

[8] Райков Д. А. *О двух классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях*// Труды семинара по функциональному анализу. Вып. 5. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1957.

[9] Себастьян-и-Силва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях*// Математика: Сб. переводов. 1957. Т. 1. Вып. 1. С. 60–77.

[10] Макаров Б. М. *Индуктивные пределы нормированных пространств*// Вестник Ленингр. ун-та. 1965. Т. 20. № 13. С. 50–58.

[11] Платонов С. С. *Спектральный синтез в некоторых функциональных пространствах на группе $\mathbb{Z}^n$*// Вопросы функционального анализа. Петрозаводск, 1992. С. 36–43.

[12] Понтрягин Л. С. *Непрерывные группы.* М.: Наука, 1973.

[13] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М.: Мир, 1964.

[14] Ленг С. $SL_2(\mathbb{R})$. М.: Мир, 1977.

[15] Рашевский П. К. *Описание инвариантных подпространств в некоторых функциональных пространствах*// Труды Моск. мат. общ. 1979. Т. 38. С. 139–185.

[16] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе* $SL(2, \mathbb{C})$// Труды семинара по вект. и тенз. анализу. 1983. Вып. 21. С. 191–258.

[17] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на группе движений евклидовой плоскости*// Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31. № 3. С. 135–146.

[18] Platonov S. S. *Invariant subspaces in cettain function spaces on Euclidean space*// Math. Scand. 1995. V. 76. P. 115–138.

[19] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в функциональных пространствах полиномиального роста на* $\mathbb{R}^n$// Труды ПетрГУ. Сер. матем. 1997. Вып. 4. С. 105–124.

[20] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах, I*// Известия АН (Сер. математическая). 1995. Т. 59. № 5. С. 127–172.

[21] Платонов С. С. *Инвариантные подпространства в некоторых функциональных пространствах на симметрических пространствах, II*// Известия АН (Сер. математическая). 1998. Т. 62. № 2. С. 131–168.

Петрозавозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33