Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 517.54

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. В. Григорьева

В статье рассмотрена задача об оценке линейных функционалов некоторого вида в классе $S(M)$ голоморфных однолистных в круге функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$, $|f(z)| < M$, $|z| < 1$. Найдены условия, при которых экстремальной для оценки функционала при M, близких к 1, является функция Пика $P_M \in S(M)$.

Обозначим через $S(M)$, $M > 1$, класс голоморфных и однолистных в единичном круге $D = \{z\colon |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \qquad |z| < 1, \tag{1}$$

таких, что $|f(z)| < M$.

Важную роль в классе $S(M)$ играют так называемые функции Пика $P_M(z)$, задаваемые формулой

$$P_M(z) = 2z\left[(1-z)^2 + \frac{2}{M}z + (1-z)\sqrt{(1-z)^2 + \frac{4}{M}z}\right]^{-1}, \quad |z| < 1,$$

которые отображают единичный круг D на круг $D_M = \{w\colon |w| < M\}$ с разрезом вдоль отрезка $[-M, -M(2M - 1 - \sqrt{M^2 - M})]$.

Если $M \longrightarrow \infty$, то класс $S(M)$ сводится к известному классу S, а функция Пика — к функции Кебе $K(z) = z/(1-z)^2$, которая является экстремальной во многих задачах, в частности, в задаче об оценке $|a_n|$, $f(z) \in S$, $n = 2, 3, \dots$

Работа выполнена при частичной поддержке грантом Российского фонда фундаментальных исследований, проект 98–01–00842.

В отличие от класса S, функция Пика не является экстремальной в задаче о $\max\limits_{f(z)\in S} |a_n|$ в классе $S(M)$, например, для $n=3$ и $M \in (1,e)$.

Класс $S(M)$ инвариантен относительно вращения, т. е. если $f(z) \in S(M)$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z)$ также принадлежит классу $S(M)$. Следовательно, например, оценка $|a_n|$ в классе $S(M)$ совпадает с оценкой $\operatorname{Re} a_n$. Заметим, что функционал $J(f) = \operatorname{Re} a_n$ является линейным.

В данной статье рассмотрена задача об оценке линейного функционала некоторого вида в классе $S(M)$. Точнее, найдены условия, при которых экстремальной для оценки линейного функционала в классе $S(M)$ при M, близких к 1, является функция Пика.

Линейный непрерывный функционал L в классе голоморфных в D функций $f(z)$ с разложением (1) задается в общем виде формулой

$$L(f) = \sum_{n=2}^{\infty} \overline{\lambda}_n a_n\,, \tag{2}$$

где последовательность $\lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, определяющая функционал L, обладает свойствами, обеспечивающими сходимость ряда в (2).

В данной статье ограничимся рассмотрением линейных непрерывных функционалов, определяемых конечным набором вещественных параметров $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, т. е. функционалов вида

$$L(f) = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k\,. \tag{3}$$

Положим $\lambda = (\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_n = 1$. Будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть тригонометрический многочлен*

$$Q(u) = -2\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \cos(k-1)u, \quad Q''(\pi) < 0,$$

достигает максимума на $[0, 2\pi]$ *только в точке* $u = \pi$. *Тогда существует* $M = M(\lambda) > 1$ *такое, что для всех* $M \in (1, M(\lambda)]$ *максимум* $\operatorname{Re} L(f)$ *в классе* $S(M)$ *достигается только функцией Пика* $P_M(z)$.

Для доказательства теоремы будем применять уравнение Левнера в классе $S(M)$ и результаты теории оптимального управления, развитые Д. В. Прохоровым для решения экстремальных задач комплексного анализа.

Сведения и теоремы теории Левнера и оптимального управления

Сформулируем теорему Левнера, доказательство которой можно найти, например, в [1].

Теорема A. *Пусть $w = w(z,t)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения Левнера*

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{e^{iu}+w}{e^{iu}-w}, \quad w|_{t=0} = z, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

с кусочно-непрерывной функцией $u = u(t)$.

Тогда функция

$$w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + \dots), \quad z \in D, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

является голоморфной и однолистной по $z \in D$ при каждом фиксированном $t \geq 0$. Кроме того, функции

$$f(z) = Mw(z, \log M) \in S(M) \tag{6}$$

образуют всюду плотный подкласс класса $S(M)$.

Замечание 1. В случае $u(t) = const$ функция (6) является одним из вращений функции Пика. В частности, если $u(t) \equiv \pi$, то $f(z) = P_M(z)$.

Функция $u = u(t)$ в уравнении Левнера (4) называется управлением.

Обозначим через

$$V_n^M = \{a = (a_2, \dots, a_n) :\, f(z) \in S(M)\}$$

множество значений системы коэффициентов в классе $S(M)$.

Параметрическое представление для коэффициентов, полученное из уравнения Левнера (4), позволяет применять методы классического вариационного исчисления и принцип максимума Понтрягина при решении экстремальных задач в классе $S(M)$.

Действительно, пусть $a_k(t)$ задаются уравнением (5), $a_k(t) = x_{2k-1}(t)+ix_{2k}(t)$, $k = 2,\dots,n$, и $a(t) = (x_3(t),\dots,x_{2n}(t))$. Подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты в разложении в ряд Тейлора в обеих частях в (4), получим следующую систему дифференциальных уравнений для $x_3(t),\dots,x_{2n}(t)$:

$$\frac{dx_k}{dt} = g_k(t,a,u), \quad x_k(0) = 0, \quad k = 3,\dots,2n, \tag{7}$$
$$x_{2k-1}(\log M) + ix_{2k}(\log M) = a_k, \quad k = 2,\dots,n.$$

Явные выражения для правых частей g_k в (7) приведены в [2]. В частности,

$$g_3(t,a,u) = -2e^{-t}\cos u, \quad g_4(t,a,u) = 2e^{-t}\sin u.$$

Заметим, что из явных выражений для g_k следуют важные соотношения в точке $t = 0$, а именно

$$g_{2k-1}(0,0,u) = -2\cos(k-1)u, \quad g_{2k}(0,0,u) = 2\sin(k-1)u, \quad k \geq 2. \tag{8}$$

Область значений системы коэффициентов V_n^M оказывается множеством достижимости управляемой системы (7). Иначе говоря, это область всевозможных точек $a(\log M)$, которые могут быть получены как решения системы (7) с произвольными кусочно-непрерывными управлениями $u = u(t)$. Для того, чтобы найти V_n^M, достаточно описать его границу ∂V_n^M. Каждая граничная точка $a \in \partial V_n^M$ представима как решение системы (7) с управлением $u(t)$, удовлетворяющим соответствующим необходимым условиям экстремума. В [2] было доказано, что для описания всех граничных функций $f(z) \in S(M)$, соответствующих граничным точкам множества V_n^M, следует рассмотреть функцию Гамильтона

$$H(t,a,\Psi,u) = \sum_{k=3}^{2n} g_k(t,a,u)\Psi_k, \tag{9}$$

где $\Psi = \Psi(t) = (\Psi_3(t),\dots,\Psi_{2n}(t))$ — ненулевой сопряженный вектор, удовлетворяющий сопряженной гамильтоновой системе

$$\frac{d\Psi_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad \Psi_k(0) = \xi_k, \quad k = 3,\dots,2n, \tag{10}$$

и воспользоваться необходимым условием экстремума, выраженным в форме принципа максимума.

Теорема Б [3]. *Пусть $a(t)$ является решением системы (7) с кусочно-непрерывным управлением $u^*(t)$. Если $a = a(\log M)$ — это граничная точка множества V_n^M, в которой реализуется $\max\limits_{f(z)\in S(M)} \operatorname{Re} L(f)$, где $L(f)$ задается формулой (3), то существует решение $\Psi = \Psi(t)$ системы (10) с тем же управлением $u^*(t)$ такое, что*

$$\max_{u(t)} H(t, a(t), \Psi(t), u(t)) = H(t, a(t), \Psi(t), u^*(t)) \tag{11}$$

для всех $t \in [0, \log M]$, и выполняются условия трансверсальности

$$\Psi(\log M) = \lambda. \tag{12}$$

Условие (11) называется принципом максимума Понтрягина. Очевидно, что $u^*(t)$ находится как корень уравнения

$$H_u(t, a, \Psi, u) = 0. \tag{13}$$

Обозначим $\xi = (\xi_3, \ldots, \xi_{2n})$. Функция Гамильтона при $t = 0$ примет вид

$$H(0, 0, \xi, u) = -2\sum_{k=2}^{n}(\xi_{2k-1}\cos(k-1)u - \xi_{2k}\sin(k-1)u).$$

Изменяя начальные данные ξ в (10) и решая систему (7), (10) с управлением u, удовлетворяющим принципу максимума Понтрягина, получим все граничные точки $a(\log M)$ множества V_n^M.

Поскольку сопряженная система (10) линейна по Ψ, вектор $\Psi(t)$ линейно зависит от начальных данных ξ в (10). Максимизирующее свойство управления u, удовлетворяющего принципу максимума Понтрягина, сохраняется, если Ψ умножается на положительный множитель. Поэтому начальный вектор $\Psi(0) = \xi$ можно нормировать в какой-либо удобной форме, например, положив $|\Psi_{2n-1} + i\Psi_{2n}| = 1$ при предположении, что $|\Psi_{2n-1} + i\Psi_{2n}| \neq 0$.

Приведем еще одну, полезную в дальнейшем, теорему.

Теорема В [2]. *Пусть $a(t)$ является решением системы (7) с управлением $u^*(t)$ и $a = a(\log M)$ — граничная точка множества V_n^M. Если*

$H(0,0,\xi,u)$ достигает своего максимума по u на $[0,2\pi)$ только в одной точке, в которой $H_{uu}(0,0,\xi,u)\neq 0$, то $u^*(t)$ непрерывна на $[0,\log M]$.

Здесь подразумевается, что ξ соответствует $a(t)$ как начальное данное в сопряженной системе (10) по теореме Б, т. е. $a=a(t,\xi)$, $\Psi=\Psi(t,\xi)$.

Заметим, что в условиях теоремы В $u^*(t)$ — непрерывное решение уравнения (13). Поскольку H аналитична по всем переменным, $H_{uu}\neq 0$, то непрерывный корень $u=u(t,a,\Psi)$ уравнения (13) оказывается аналитической функцией. Обозначим $u(t,\xi)=u(t,a(t,\xi),\Psi(t,\xi))$.

Обратим внимание на то, что функции $g_3,\ldots,g_{2n}$ в правой части (7) не зависят от x_{2n-1}, x_{2n}. Следовательно,

$$\frac{d\Psi_{2n-1}}{dt}=\frac{d\Psi_{2n}}{dt}=0$$

и можно принять, что $\Psi_{2n-1}+i\Psi_{2n}=const$. В частности, принимая во внимание условие трансверсальности (12), разумно положить $\Psi_{2n-1}+i\Psi_{2n}=1$.

Вспомогательные леммы

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 управление $u(t)=\pi$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина и условиям трансверсальности, если M близко к 1.*

Доказательство. Управление $u(t)=\pi$ в уравнении Левнера (4) соответствует функции P_M, имеющей вещественные коэффициенты, при всех $M>1$. Так как $x_{2k}(t)=0$, $k=2,\ldots,n$, в (7), то и $g_{2k}(t,a,\pi)=0$.

Из явных формул для правой части системы (10) следует, что в этом случае и

$$-\frac{\partial H}{\partial x_{2k}}=0,\quad k=2,\ldots,n.$$

Поэтому начальные условия $\xi_{2k}=0$, $k=2,\ldots,n$, сохраняются на всей траектории $(a(t),\Psi(t))$, а именно $\Psi_{2k}=0$, $k=2,\ldots,n$, $0\le t\le\log M$.

Если M близко к 1, то в силу ограниченности правой части в системе (10) значения $\Psi(\log M)$ близки к значениям $\Psi(0)=\xi$. Принимая во внимание, что $\Psi(\log M)=\lambda$, заключаем, что ξ_{2k-1} близки к λ_k, $k=2,\ldots,n$.

Таким образом, $H(t,a,\Psi,u)$ как функция переменного u близка к $Q(u)$. Из условий леммы следует, что $H_u(t,a,\Psi,\pi)=0$ и $H(t,a,\Psi,\pi)$ принимает максимальное значение на $[0,2\pi]$ только в точке $u=\pi$.

Для того чтобы удовлетворить условиям трансверсальности, достаточно найти решение $\Psi(t)$ задачи Коши для системы (10) с начальными данными (12) в точке $t=\log M$. Функция $a(t)$ в (10) является решением системы (7) с $u(t)=\pi$. Значение $\Psi(0)=\xi$ приведет теперь к такому выбору начальных данных в (10) для $t=0$, который обеспечивает выполнение условий трансверсальности (12). Это доказывает лемму 1. □

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ограниченность частных производных функции $u(t,\xi)$ в окрестности точки $(t,\xi)=(0,\lambda)$. Убедимся в этом поэтапно при помощи следующих лемм.

Лемма 2. *Пусть $u=u(t,\xi)$ и $H(t,a,\Psi,u)$ — функция Гамильтона. Тогда в окрестности точки $\xi=\lambda$ справедливо неравенство*

$$|H_{uu}(0,0,\xi,u(0,\xi))|>\delta>0.$$

Доказательство. Обозначим

$$r(\xi)=H_{uu}(0,0,\xi,u(0,\xi)).$$

Заметим, что $H(0,0,\lambda,u)=Q(u)$. Из принципа максимума и условия теоремы 1 следует, что $r_0=r(\lambda)<0$. Дифференцируя $r(\xi)$, получим

$$r'(\xi)=H_{uu\Psi}(0,0,\xi,u)+H_{uuu}(0,0,\xi,u)u_\xi. \tag{14}$$

С другой стороны, после дифференцирования (13) по ξ при $t=0$ получим

$$H_{u\Psi}(0,0,\xi,u)+H_{uu}(0,0,\xi,u)u_\xi=0,$$

откуда выводим формулу для u_ξ

$$u_\xi=-\frac{H_{u\Psi}(0,0,\xi,u)}{r(\xi)}. \tag{15}$$

Из формул (14), (15) следует

$$r'(\xi)=H_{uu\Psi}(0,0,\xi,u)-\frac{H_{u\Psi}(0,0,\xi,u)H_{uuu}(0,0,\xi,u)}{r(\xi)}. \tag{16}$$

Из явных формул для функции Гамильтона H видно, что

$$H_{uuu}(0,0,\xi,u), \quad H_{u\Psi}(0,0,\xi,u), \quad H_{uu\Psi}(0,0,\xi,u)$$

являются ограниченными функциями от ξ в окрестности точки λ. Следовательно, производная $r'_e(\xi)$ по произвольному направлению e, как следует из (16), удовлетворяет неравенству

$$|r'_e(\xi)| \leq \frac{A_1}{|r(\xi)|} + B_1 \tag{17}$$

с некоторыми положительными числами A_1 и B_1.

Пусть l есть минимальное число такое, что $r(\xi) = r_0/2$ для некоторого ξ, $||\xi - \lambda|| = l$. Другими словами, $|r(\xi)| \geq |r_0/2| = \delta$, если $||\xi - \lambda|| \leq l$. Этот вектор ξ определяет некоторое направление $e = \xi - \lambda$. Интегрируя дифференциальное неравенство (17) от λ до ξ в направлении e, получим

$$|r(\xi) - r(\lambda)| = \left|\frac{r_0}{2}\right| \leq \left(\frac{2A_1}{|r_0|} + B_1\right) l,$$

что дает нижнюю границу для l и заканчивает доказательство леммы 2. □

Лемма 3. *Пусть $|H_{uu}(0,0,\xi,u(0,\xi))| \geq \delta > 0$ для ξ таких, что $||\xi - \lambda|| \leq l$. Тогда существует $M > 1$ такое, что неравенство*

$$|H_{uu}(t,a(t,\xi),\Psi(t,\xi),u(t,\xi))| \geq \frac{\delta}{2}$$

выполняется для всех $t \in [0, \log M]$.

Доказательство. Обозначим

$$G(t,\xi) = H_{uu}(t,a(t,\xi),\Psi(t,\xi),u(t,\xi)).$$

Дифференцируя $G(t,\xi)$ по t, получим

$$\begin{gathered} G_t(t,\xi) = H_{uut}(t,a,\Psi,u) + H_{uua}(t,a,\Psi,u)\frac{da}{dt} + \\ + H_{uu\Psi}(t,a,\Psi,u)\frac{d\Psi}{dt} + H_{uuu}(t,a,\Psi,u)\frac{du}{dt}. \end{gathered} \tag{18}$$

С другой стороны, если продифференцируем (13) по t, то получим формулу

$$H_{ut}(t,a,\Psi,u)+H_{ua}(t,a,\Psi,u)\frac{da}{dt}+H_{u\Psi}(t,a,\Psi,u)\frac{d\Psi}{dt}+$$
$$H_{uu}(t,a,\Psi,u)\frac{du}{dt}=0,$$

из которой выведем выражение для $\frac{du}{dt}$:

$$\frac{du}{dt}=-\frac{H_{ut}(t,a,\Psi,u)+H_{ua}(t,a,\Psi,u)\frac{da}{dt}+H_{u\Psi}(t,a,\Psi,u)\frac{d\Psi}{dt}}{H_{uu}(t,a,\Psi,u)}. \tag{19}$$

Формулы (18) и (19) приводят к дифференциальному уравнению для $G(t,\xi)$

$$G_t(t,\xi)=H_{uut}(t,a,\Psi,u)+H_{uua}(t,a,\Psi,u)\frac{da}{dt}+H_{uu\Psi}(t,a,\Psi,u)\frac{d\Psi}{dt}-$$
$$-H_{uuu}(t,a,\Psi,u)\frac{H_{ut}(t,a,\Psi,u)+H_{ua}(t,a,\Psi,u)\frac{da}{dt}+H_{u\Psi}(t,a,\Psi,u)\frac{d\Psi}{dt}}{G(t,\xi)}, \tag{20}$$

где $\frac{da}{dt}$ и $\frac{d\Psi}{dt}$ даются выражениями (7) и (10). Из явных выражений для функции Гамильтона H видно, что

$$H_{uuu}(t,a,\Psi,u),\quad H_{ut}(t,a,\Psi,u), quad H_{uut}(t,a,\Psi,u),\quad H_{ua}(t,a,\Psi,u),$$
$$H_{uua}(t,a,\Psi,u),\quad H_{u\Psi}(t,a,\Psi,u),\quad H_{uu\Psi}(t,a,\Psi,u),\quad \frac{da}{dt}\quad u\frac{d\Psi}{dt}$$

ограничены по ξ в окрестности точки λ и по t в окрестности $t=0$. Поэтому из (20) следует дифференциальное неравенство

$$G_t(t,\xi)\le\frac{A_2}{|G(t,\xi)|}+B_2 \tag{21}$$

с некоторыми положительными числами A_2 и B_2.

Пусть $M>1$ есть минимальное число такое, что $G(\log M,\xi)=\delta/2$ для некоторого ξ из окрестности точки λ. Другими словами, $|G(t,\xi)|\ge\delta/2$, если $||\xi-\lambda||\le l$ и $0\le t\le\log M$. Интегрируя дифференциальное неравенство (21) от 0 до $\log M$ с фиксированным ξ, определенным выше, и принимая во внимание лемму 2, получим

$$\frac{\delta}{2} \le \left|\frac{\delta}{2} - G(0,\xi)\right| = |G(\log M,\xi) - G(0,\xi)| \le \left(\frac{2A_2}{\delta} + B_2\right)\log M,$$

что дает нижнюю оценку для M и доказывает лемму 3. □

Лемма 4. *Пусть $u = u(t,\xi)$. Тогда частные производные u_t и u_ξ ограничены для ξ из окрестности точки λ и t, близких к 0.*

Доказательство. Производная u_t вычисляется по формуле (19), где H_{ut}, H_{ua}, $H_{u\Psi}$, a_t, Ψ_t ограничены и $|H_{uu}| \ge \delta/2$. Это доказывает первую часть леммы 4.

Чтобы вычислить u_ξ, продифференцируем равенство (13) по ξ и получим

$$H_{ua}(t,a,\Psi,u)a_\xi + H_{u\xi}(t,a,\Psi,u)\Psi_\xi + H_{uu}(t,a,\Psi,u)u_\xi = 0,$$

что приводит к выражению для u_ξ:

$$u_\xi = -\frac{H_{ua}(t,a,\Psi,u)a_\xi + H_{u\Psi}(t,a,\Psi,u)\Psi_\xi}{H_{uu}(t,a,\Psi,u)}. \tag{22}$$

Производные a_ξ и Ψ_ξ вычислим следующим образом. Дифференцирование системы (7), (10) по ξ приведет к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_\xi}{dt} &= L(t,a,u,a_\xi,\Psi_\xi), \quad a_\xi(0,\xi) = 0,\\ \frac{d\Psi_\xi}{dt} &= N(t,a,\Psi,u,a_\xi,\Psi_\xi,u_\xi), \quad \Psi_\xi(0,\xi) = 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Начальные значения 0 и 1 в (23) представляют собой нулевую и единичную матрицы соответственно. Правые части L и N в (23) линейны по отношению к a_ξ, Ψ_ξ, u_ξ. Подставляя u_ξ из (22) в (23), решаем задачу Коши для полученной системы дифференциальных уравнений. Решение $(a_\xi(t,\xi), \Psi_\xi(t,\xi))$ задачи Коши ограничено по ξ из окрестности точки λ и t, близких к 0. Следовательно, производная u_ξ из (22) также ограничена, что доказывает лемму 4. □

Доказательство теоремы 1

Покажем, что существует единственная точка ξ^* из окрестности λ, для которой решение системы (7), (10) с начальным условием $\Psi(0) = \xi^*$ удовлетворяет принципу максимума (11) и условиям трансверсальности (12). Поскольку точка ξ^ρ, соответствующая P_M, также генерирует решение системы (7), (10), удовлетворяющее согласно лемме 1 необходимым условиям экстремума, то заключаем, что $\xi^* = \xi^\rho$.

Рассмотрим отображение

$$F : \xi \longrightarrow y = \Psi(\log M, \xi), \quad ||\xi - \lambda|| \le l,$$

где $\Psi(t,\xi)$— это решение (10) с $u = u(t,\xi)$ и $a(t,\xi)$— решение системы (7). Функция $y = F(\xi)$ отображает начальные данные ξ на решение задачи Коши (10). Следовательно, F является аналитической функцией и ее производная $F'(\xi)$ представляет собой якобиеву матрицу, состоящую из элементов $\Psi_{jk}(\log M, \xi)$

$$\Psi_{jk}(logM, \xi) = \frac{\partial \Psi_j(\log M, \xi)}{\partial \xi_k}, \quad j,k = 3, \dots, 2n-2, 2n.$$

Координату ξ_{2n-1} можем считать вырожденной ввиду оговоренной выше возможности нормирования вектора ξ условием $\xi_{2n-1} = 1$. Тем самым координата ξ_{2n-1} фиксирована и не меняется при отображении $y = F(\xi)$, которое можно записать теперь в виде $y = F(\xi_3, \dots, \xi_{2n-2}, \xi_{2n})$.

Пусть $A(t,\xi)$ — якобиева матрица $(2n-3) \times (2n-3)$, состоящая из элементов

$$\Psi_{jk}(t,\xi) = \frac{\partial \Psi_j(t,\xi)}{\partial \xi_k}, \quad j,k = 3, \dots, 2n-2, 2n.$$

Очевидно, что $A(0,\xi) = 1$ (единичная матрица). В силу непрерывности $\Psi_{jk}(t,\xi)$ матрица $A(\log M, \xi) = F'(\xi)$ близка к единичной при M, близких к 1. Значит, $\det A(\log M, \lambda) > 0$ при M, близких к 1. Это влечет обратимость матрицы $F'(\lambda)$ и существование обратного отображения $F^{-1}(\xi)$. Иначе говоря, отображение $y = F(\xi)$ взаимно однозначно отображает окрестность $U_\varepsilon(\lambda) = \{\xi : ||\xi - \lambda|| < \varepsilon\}$ точки λ на окрестность точки $y^0 = F(\lambda)$. Следовательно, существует единственная точка $\xi^* \in U_\varepsilon(\lambda)$, для которой выполняются принцип максимума Понтрягина (11) и условия трансверсальности (12), которые можно иначе записать в виде

$$F(\xi^*) = \lambda.$$

По лемме 1 $\xi^* = \xi_\rho$. Теорема 1 доказана. □

Résumé

We find the sufficient conditions which provide that the Pick functions deliver maximum for a linear functional in the class of holomorphic univalent functions close to the identity.

Литература

[1] Александров И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* М.: Наука, 1976.

[2] Prokhorov D. V. *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions.* Саратов: Изд-во Саратовского ГУ, 1993.

[3] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1969.

Саратовский государственный университет,
механико-математический факультет,
кафедра математического анализа,
410026, Саратов, ул. Астраханская, 83