Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 515.12

О СТЕПЕННЫХ СПЕКТРАХ И КОМПОЗИЦИЯХ ФИНИТНО СТРОГО ЭПИМОРФНЫХ ФУНКТОРОВ

А. В. Иванов

Степенным спектром $sp(F)$ ковариантного функтора F в категории $Comp$ называется множество степеней точек всевозможных пространств вида $F(X)$. Определение финитно строго эпиморфного функтора было введено в [1] в связи с исследованием вопроса о гомеоморфности пространств вида $F_n(X)$, $G_m(Y)$, где F, G — функторы, $m, n \in N$. В настоящей работе доказано (теорема 1), что для любого подмножества $K \subset N$ $(1 \in K)$ существует финитно строго эпиморфный функтор exp^K, удовлетворяющий всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, для которого $sp(exp^K) = K$. Теоремы 2 и 3 показывают, что если F — финитно строго эпиморфный функтор и $sp(F) = N$, то композиция $F \circ G$ финитно строго эпиморфна для любого функтора G, сохраняющего свойство конечности пространства, а функтор $G \circ F$ финитно строго эпиморфен для любого G, если F обладает дополнительно свойством продолжения конечных сечений.

Понятие финитно строго эпиморфного функтора в категории $Comp$ (в дальнейшем мы рассматриваем только бикомпактные пространства, все отображения непрерывны) было введено в [1] в связи с исследованием вопроса о гомеоморфности пространств вида $F_n(X), G_m(Y)$, где F и G — функторы, m, n — натуральные числа, а X, Y — пространства из класса однородных по характеру κ-метризуемых бикомпактов несчетного веса. В [1] было показано, что для финитно строго эпиморфных полунормальных функторов F и G из гомеоморфности пространств $F_n(X)$ и $G_m(Y)$, как правило, следует гомеоморфность $F_{n-1}(X)$ и $G_{m-1}(Y)$. Это утверждение позволяет свести исходную задачу о гомеоморфизме между $F_m(X)$ и $G_n(Y)$ $(m \geq n \geq 3)$ к задаче о гомеоморфности $F_{m-n+2}(X)$ и $G_2(Y)$, которая в большинстве конкретных случаев решается отрицательно. При изучении финитно строго эпиморфных функторов естественно возникает понятие степенного спектра $sp(F)$ функтора F как множества степеней точек всевозможных пространств вида $F(X)$.

В данной работе исследуются строение степенных спектров финитно строго эпиморфных функторов и поведение свойства финитно строгой эпиморфности при операции композиции функторов. Доказано (теорема 1), что для любого подмножества $K \subset N (1 \in K)$ существует финитно строго эпиморфный функтор exp^K, удовлетворяющий всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, для которого $sp(exp^K) = K$. (Для любого сохраняющего прообразы функтора F $sp(F)$ содержит все промежуточные значения.) Теорема 2 показывает, что если F — финитно строго эпиморфный функтор и $sp(F) = N$, а функтор G переводит конечные пространства в конечные, то $F \circ G$ финитно строго эпиморфен. Если F, кроме того, обладает свойством продолжения конечных сечений, то композиция $G \circ F$ финитно строго эпиморфна для любого G (теорема 3). Утверждение теорем 2 и 3 справедливо и для функтора суперрасширения λ, хотя $sp(\lambda) = N \setminus \{2\}$. В то же время существует финитно строго эпиморфный функтор бесконечной степени, квадрат которого не финитно строго эпиморфен (предложение 5). Из полученных результатов следует, что всевозможные конечные композиции рассмотренных в [1] функторов exp, λ, P, $\mathcal{N}^k (k \geq 2)$ являются финитно строго эпиморфными функторами и, следовательно, на них распространяются утверждения, доказанные в [1].

Мы будем рассматривать только ковариантные функторы, действующие в категории $Comp$. Напомним некоторые определения (см. [3]). Функтор F называется *мономорфным*, если для любого вложения $i : Y \to X$ отображение $F(i) : F(Y) \to F(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора F и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $F(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $F(i)(F(Y))$ пространства $F(X)$. Функтор F *сохраняет пересечения*, если для любого бикомпакта X и любой системы $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$F(\cap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}) = \cap\{F(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Если F — мономорфный функтор, то для любой точки $\xi \in F(X)$ определен *носитель* $supp(\xi)$ следующим образом:

$$supp(\xi) = \cap\{Y \subset X : \xi \in F(Y)\}.$$

При рассмотрении композиции функторов F и G мы будем использовать следующие обозначения носителя точки $\xi \in F(G(X))$, смысл которых ясен из контекста: $supp(\xi, F) \subset G(X)$, $supp(\xi, F \circ G) \subset X$. Если $\xi \in F(X)$ и $|supp(\xi)| = n$, то говорят, что ξ имеет степень n: $deg(\xi) = n$.

Функтор F называется *непрерывным*, если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра. Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным*, если он сохраняет точку и пустое множество. Композиция полунормальных функторов полунормальна. В дальнейшем мы будем рассматривать только полунормальные функторы, хотя некоторые из доказанных ниже утверждений справедливы и для более широкого класса.

Функтор F *сохраняет прообразы*, если для любого отображения $f : X \to Y$ и любого $A \subset Y$

$$(F(f))^{-1}F(A) = F(f^{-1}A).$$

Функтор F называется *эпиморфным*, если он сохраняет эпиморфизмы. Функтор F *сохраняет вес*, если для любого бесконечного X $w(X) = w(F(X))$. Если F — полунормальный функтор, то любой бикомпакт X естественно вкладывается в $F(X)$ и мы можем считать в этом случае, что $X = F_1(X) \subset F(X)$. Для любого натурального n $F_n(X) = \{\xi \in F(X) : deg(\xi) \leq n\}$. Подпространство $F_n(X)$ всегда замкнуто в X. Более того, соответствие $X \to F_n(X)$ однозначно определяет подфунктор F_n функтора F, который также является полунормальным (см. [4]). В последующем через n мы будем обозначать не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, \ldots, n-1\}$ (натуральные числа отождествляются с соответствующими орданалами). Следуя [4], для каждого $n \in N$ введем обозначение: $F_{nn}(X) = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ (при этом $F_0(X) = \emptyset$).

Степенным спектром F будем называть следующее множество

$$sp(F) = \{k : \; k \in N, F_{kk}(k) \neq \emptyset\}.$$

Натуральное число k принадлежит степенному спектру F тогда и только тогда, когда существует бикомпакт X и существует элемент $\xi \in F(X)$ такой, что $deg(\xi) = k$ (см. [4]). Легко видеть, что степенные спектры функторов exp, P, $\mathcal{N}^k (k \geq 2)$ равны N, а $sp(\lambda) = N \setminus \{2\}$, так как не существует максимальной сцепленной системы с носителем из двух точек[1]. Для всякого полунормального функтора F $1 \in sp(F)$, поскольку F сохраняет точку. Пример функтора континуальной экспоненты exp^c показывает, что числом 1 может исчерпываться весь степенной спектр функтора (см. [3]). Очевидно, что для всякого F и любого $n \in N$

$$sp(F_n) = \{k : \ k \in sp(F), k \leq n\}.$$

Пусть n, m — натуральные числа. Определим отображение $\varphi_{nm} : n \to m$ следующим образом: $\varphi_{nm}(i) = i$ при $i < m$, $\varphi_{nm}(i) = m - 1$ при $i \geq m$. Функтор F называется *финитно строго эпиморфным* [1], если для любых $n, m \in sp(F)$, $n > m$ выполняется включение

$$F(\varphi_{nm})(F_{nn}(n)) \supset F_{mm}(m).$$

В [1] показано, что финитно строго эпиморфными функторами являются exp, λ, P *и* $\mathcal{N}^k (k \geq 2)$.

Замечание 1. Из финитно строгой эпиморфности, вообще говоря, не следует эпиморфность F. Соответствующим контрпримером может служить функтор exp^c, который не эпиморфен, но является финитно строго эпиморфным тривиальным образом, поскольку $sp(exp^c) = \{1\}$.

Будем говорить, что степенной спектр функтора F *непрерывен*, если $sp(F)$ равен начальному отрезку натурального ряда N или $sp(F) = N$. Имеет место

Предложение 1. *Если функтор F сохраняет прообразы, то степенной спектр F непрерывен.*

Доказательство. Пусть $n \in sp(F)$ и $n > m \geq 2$. Пусть $\varphi_{nm} : n \to m$ — отображение, фигурирующее в определении финитно строгой

[1] Определение упомянутых здесь функторов экспоненты exp, вероятностных мер P, суперрасширения λ и полных k-сцепленных систем $\mathcal{N}^k$ можно найти в [2] и [3].

эпиморфности, и пусть $\xi \in F_{nn}(n)$. В [3] показано, что функтор, сохраняющий прообразы, сохраняет носители. Следовательно,

$$\varphi_{nm}(supp(\xi)) = supp(F(\varphi_{nm})(\xi)) = m$$

и, значит, $F_{mm}(m) \neq \emptyset$, т. е. $m \in sp(F)$. □

Замечание 2. Примером функтора, который имеет непрерывный степенной спектр и не сохраняет прообразы, может служить функтор $\mathcal{N}^2$.

Напомним, что полунормальный функтор F называется *нормальным*, если он сохраняет вес, эпиморфен и сохраняет прообразы (см. [3]). В силу предложения 1 степенной спектр всякого нормального функтора непрерывен.

Теорема 1. *Для любого подмножества $K \subset N$ $(1 \in K)$ существует финитно строго эпиморфный функтор F^K, удовлетворяющий всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, степенной спектр которого равен K.*

Доказательство. Пусть X — бикомпакт и $n \in N$. В пространстве $exp_n X$ рассмотрим разбиение R_n, единственным нетривиальным элементом которого является множество $exp_{n-1}X$, и фактор-пространство $exp_n X/R_n$ обозначим через $exp_n^0 X$. Заметим, что $exp_1^0 X = exp_1 X = X$. Пусть ξ_n^0 — точка $exp_n^0 X$, соответствующая множеству $exp_{n-1}X$. Для всякого $\xi \in exp_n^0 X$ определим множество $\varkappa(\xi) \subset X$ следующим образом: если $\xi \neq \xi_n^0$, то ξ — n-точечное подмножество X и мы полагаем $\varkappa(\xi) = \xi$, если же $\xi = \xi_n^0$, то, по определению, $\varkappa(\xi) = X \cup \{X\}^2$.

Рассмотрим произведение

$$Z = \prod_{n \in K} exp_n^0 X$$

и выделим в Z подпространство $F^K(X)$ следующим образом:

$$F^K(X) = \{\{\xi_n : n \in K\} : \varkappa(\xi_k) \subset \varkappa(\xi_n) \text{ при } k < n\}.$$

[2] Формальное включение в множество $\varkappa(\xi)$ элемента X необходимо здесь для того, чтобы различать $\varkappa(\xi_n^0)$ и $\varkappa(\xi)$ в случае, когда $|X| = n$ и $\xi = X$.

Покажем, что $F^K(X)$ замкнуто в Z. Пусть $z = \{\xi_n : n \in K\} \notin F^K(X)$. Тогда для некоторых $k, n \in K$, $k < n$ $н(\xi_k) \not\subset н(\xi_n)$. Возможны два варианта: 1) $|н(\xi_k)| = k$ и 2) $н(\xi_k) = X \cup \{X\}$, т. е. $\xi_k = \xi_k^0$.

1) Если $|н(\xi_k)| = k$, то $|н(\xi_n)| = n$ и $\xi_k \not\subset \xi_n$. Пусть $\xi_k = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $\xi_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Пусть $U_1, \ldots, U_k$ — попарно непересекающиеся окрестности точек $x_1, \ldots, x_k$ и $V_1, \ldots, V_n$ — аналогичные окрестности $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющие дополнительному условию: $U_i \cap V_j = \emptyset$, если $x_i \neq y_j$. Рассмотрим окрестности

$$O\xi_k = O(U_1, \ldots, U_k) \text{ и } O\xi_n = O(V_1, \ldots, V_n)$$

точек ξ_k и ξ_n в $exp_k X$ и $exp_n X$ соответственно ($O(U_1, \ldots, U_k)$ — базисное открытое множество топологии Вьеториса, см. [3]). Очевидно, что $O\xi_k \cap exp_{k-1} X = O\xi_n \cap exp_{n-1} X = \emptyset$ и для любых $\eta_k \in O\xi_k$, $\eta_n \in O\xi_n$ $н(\eta_k) \not\subset н(\eta_n)$. Следовательно, у точки z найдется окрестность в Z, которая не пересекается с $F^K(X)$.

2) Если $\xi_k = \xi_k^0$, то $н(\xi_n) = \xi_n = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Возьмем в X окрестности $V_1, \ldots, V_n$ точек $y_1, \ldots, y_n$ с непересекающимися замыканиями: $[V_i] \cap [V_j] = \emptyset$ при $i \neq j$. Пусть $O\xi_n = O(V_1, \ldots, V_n)$ — базисная окрестность ξ_n в $exp_n X$ и $exp_n^0 X$. Рассмотрим следующее открытое множество в $exp_k X$:

$$W = \bigcup_{i_1 < \ldots < i_k} O(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}).$$

Легко видеть, что если $\eta_k \in exp_k^0 X$ и существует $\eta_n \in O\xi_n$ такое, что $н(\eta_k) \subset н(\eta_n)$, то $\eta_k \in W$. Покажем, что $[W]_{exp_k X} \cap exp_{k-1} X = \emptyset$. Предположим противное. Тогда для некоторого набора $i_1, \ldots, i_k$ пересечение $[O(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k})] \cap exp_{k-1} X$ непусто. Пусть $\gamma = \{x_1, \ldots, x_l\}$ — точка из этого пересечения. Среди чисел $i_1, \ldots, i_k$ найдется i_m такое, что $\gamma \cap [V_{i_m}] = \emptyset$. Пусть U — окрестность множества γ в X, которая не пересекает V_{i_m}. Тогда $O(U)$ — окрестность γ в $exp_k X$, не пересекающая $O(V_{i_1}, \ldots, V_{i_k})$, — противоречие.

Возьмем теперь в $exp_k X$ окрестность O множества $exp_{k-1} X$, которая не пересекает W, и пусть $O\xi_k^0$ — соответствующая O окрестность точки ξ_k^0 в фактор-пространстве $exp_k^0 X$. В силу выбора W для любых $\eta_k \in O\xi_k^0$ и $\eta_n \in O\xi_n$ имеем $н(\eta_k) \not\subset н(\eta_n)$. Следовательно, у точки z есть окрестность в произведении Z (определяемая парой координатных окрестностей $O\xi_k^0$ и $O\xi_n$), которая не пересекает $F^K(X)$.

Итак, $F^K(X)$ замкнуто в Z и, следовательно, является бикомпактом.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Для всякого $n \in K$ рассмотрим отображение $exp_n f : exp_n X \to exp_n Y$. Поскольку

$$exp_n f(exp_{n-1} X) \subset exp_{n-1} Y,$$

отображение $exp_n f$ естественно порождает непрерывное отображение $exp_n^0 f : exp_n^0 X \to exp_n^0 Y$. При этом $exp_n^0(id_X) = id_{exp_n^0 X}$ и $exp_n^0(f \circ g) = exp_n^0 f \circ exp_n^0 g$, т. е. exp_n^0 — функтор в категории $Comp$. Очевидно, что exp_1^0 — тождественный функтор.

Пусть $\xi = \{\xi_n : n \in K\}$ — точка из $F^K(X)$. Положим

$$F^K(f)(\xi) = \{exp_n^0 f(\xi_n) : n \in K\}.$$

Легко проверить, что $н(exp_k^0 f(\xi_k)) \subset н(exp_n^0 f(\xi_n))$ при $k, n \in K$, $k < n$. Следовательно, $F^K(f)(\xi) \in F^K(Y)$. Итак, для всякого отображения $f : X \to Y$ определено непрерывное отображение $F^K(f) : F^K(X) \to F^K(Y)$. При этом $F^K(id_X) = id_{F^K(X)}$ и $F^K(f \circ g) = F^K f \circ F^K g$. Таким образом, построен функтор F^K в категории $Comp$. Покажем, что этот функтор является искомым.

Заметим, что функторы exp_n^0 мономорфны, непрерывны, сохраняют точку, вес и пустое множество. Отсюда сразу следует, что F^K также мономорфен, сохраняет точку и пустое множество. Функтор F^K сохраняет вес, поскольку имеет место включение

$$F^K(X) \supset X = X \times \prod_{n \in K \setminus \{1\}} \{\xi_n^0\}.$$

Проверим непрерывность F^K. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha, \beta \in A\}$ — обратный спектр, $X = \lim S$ и $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ — предельная проекция. Тогда

$$Z_X = \lim\{Z_{X_\alpha}, \prod_{n \in K} exp_n^0(\pi_\beta^\alpha) : \alpha, \beta \in A\}$$

(здесь $Z_A = \prod exp_n^0 A$) в силу непрерывности функторов exp_n^0. Имеем

$$F^K(X_\alpha) \subset Z_{X_\alpha}, \quad F^K(\pi_\beta^\alpha) = \prod_{n \in K} exp_n^0(\pi_\beta^\alpha)|_{F^K(X_\alpha)}.$$

Следовательно, предел спектра $F^K(S) = \{F^K(X_\alpha), F^K(\pi_\beta^\alpha) : \alpha, \beta \in A\}$ лежит в Z_X. Покажем, что $\lim F^K(S) = F^K(X)$. Поскольку включение $F^K(X) \subset \lim F^K(S)$ выполняется автоматически, достаточно проверить, что $\lim F^K(S) \subset F^K(X)$. Пусть $\xi = \{\xi_n : n \in K\} \in Z_X \setminus F^K(X)$. Тогда существуют $n, k \in K$, $n > k$ такие, что $\varkappa(\xi_k) \not\subset \varkappa(\xi_n)$. Значит, найдется индекс $\alpha \in A$ такой, что $\varkappa(exp^0_k(\pi_\alpha)(\xi_k)) \not\subset \varkappa(exp^0_n(\pi_\alpha)(\xi_n))$. Следовательно, $\xi \notin \lim F^K(S)$. Итак, функтор F^K непрерывен.

F^K сохраняет пересечения. Поскольку F^K непрерывен, достаточно показать, что $F^K(A \cap B) = F^K(A) \cap F^K(B)$ для любых двух замкнутых подмножеств $A, B \subset X$ (см. [3, с. 165]). Доказательство этого утверждения не представляет труда.

F^K эпиморфен. Пусть $f : X \to Y$ — эпиморфизм и $\xi = \{\xi_n : n \in K\}$ — точка из $F^K(Y)$. Для всех $n \in K$ таких, что $\xi_n \neq \xi^0_n$, множества $\varkappa(\xi_n) = \xi_n$ образуют растущую последовательность конечных подмножеств Y (ограниченную, если начиная с некоторого m, $\xi_m = \xi^0_m$, и неограниченную в противном случае). Построим в X последовательность $\{\eta_n : n \in K, \xi_n \neq \xi^0_n\}$, в которой $|\eta_n| = n$, $\eta_n \subset \eta_k$ при $n < k$ и $f(\eta_n) = \xi_n$. Дополним эту последовательность (при необходимости) координатами η^0_n при $n \in K$, $\xi_n = \xi^0_n$ и получим точку $\eta \in F^K(X)$, для которой $F^K(f)(\eta) = \xi$.

F^K финитно строго эпиморфен. Пусть $m, n \in K$, $n > m$ и $\xi = \{\xi_l : l \in K\} \in F^K_{mm}(m)$. Поскольку $|supp(\xi)| = m$, имеет место равенство $\xi_m = m$. Определим точку $\eta = \{\eta_l : l \in K\} \in F^K(n)$ следующим образом. Положим $\eta_l = \xi_l$ при $l \leq m$, $\eta_l = l$ при $m < l \leq n$ и $\eta_l = \eta^0_l$ при $l > n$. Тогда $supp(\eta) = n$ и $F^K(\varphi_{nm})(\eta) = \xi$.

Остается вычислить степенной спектр F^K. Легко проверить, что для всякой точки $\xi = \{\xi_n : n \in K\} \in F^K(X)$ имеет место равенство

$$supp(\xi) = [\cup\{\xi_n : n \in K, \xi_n \neq \xi^0_n\}].$$

Таким образом, если носитель ξ конечен, то он состоит ровно из n точек, где n — наибольшее число из K, удовлетворяющее условию $\xi_n \neq \xi^0_n$. Отсюда следует, что $sp(F^K) = K$. $\square$

Определение. *Построенный при доказательстве теоремы 1 функтор F^K обозначается в дальнейшем через exp^K.*

Переходим к изучению свойств композиции функторов.

Предложение 2. *Пусть F и G — функторы. Тогда для любого X и любого $\xi \in F(G(X))$*

$$supp(\xi, F \circ G) = [\cup\{supp(\eta, G) : \eta \in supp(\xi, F)\}]. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $supp(\xi, F) = A \subset G(X)$ и $supp(\xi, F \circ G) = B \subset X$. Тогда $G(B) \subset G(X)$ и $\xi \in F(G(B))$, следовательно, $A \subset G(B)$. Значит, для любого $\eta \in A$ $supp(\eta, G) \subset B$ — включение справа налево тем самым доказано.

Пусть D — множество, стоящее в правой части формулы (1). Для любого $\eta \in A$ $supp(\eta, G) \subset D$, следовательно, $\eta \in G(D)$. Таким образом, $A \subset G(D)$. Значит, $\xi \in F(G(D))$, откуда по определению носителя получаем $supp(\xi, F \circ G) \subset D$. □

Замечание 3. Следующий ниже пример показывает, что в правой части формулы (1) нельзя убрать замыкание. Пусть $X = [0,1]$, $F = exp$, $G = \lambda$. Пусть η_n, $n \geq 3$, — максимальная сцепленная система в X с носителем $\{0, \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\}$ и $\xi = \{\eta_n : n \geq 3\} \cup \{0\}$. Тогда $\xi \in exp(\lambda(X))$ и

$$\begin{aligned} supp(\xi, exp \circ \lambda) \neq \cup\{supp(\eta, \lambda) : \eta \in supp(\xi, exp)\} = \\ = \cup\{\{0, \tfrac{1}{n}, 1 - \tfrac{1}{n}\} : n \geq 3\}, \end{aligned}$$

так как последнее множество не является замкнутым.

Предложение 3. *Если F и G — функторы, то $sp(F \circ G) \supset sp(F) \cup sp(G)$.*

Доказательство. Пусть $n \in sp(F)$ и $\xi \in F_{nn}(n)$. Поскольку $n \subset G(n)$, имеет место включение $F(n) \subset F(G(n))$ и, следовательно, $\xi \in F(G(n))$. В силу предложения 2

$$supp(\xi, F \circ G) = [\cup\{supp(\eta, G) : \eta \in supp(\xi, F) = n\}] = n.$$

Таким образом, $sp(F) \subset sp(F \circ G)$.

Пусть теперь $n \in sp(G)$ и $\xi \in G_{nn}(n)$. Тогда $\xi \in G(n) \subset F(G(n))$ и

$$supp(\xi, F \circ G) = [\cup\{supp(\eta, G) : \eta \in supp(\xi, F) = \{\xi\}\}] = n.$$

Следовательно, $sp(G) \subset sp(F \circ G)$. □

Функтор F будем называть *финитным*, если он переводит конечные пространства в конечные.

Теорема 2. *Пусть F — финитно строго эпиморфный функтор и $sp(F) = N$. Тогда для любого финитного функтора G функтор $F \circ G$ финитно строго эпиморфен.*

Доказательство. В силу предложения 3 $sp(F \circ G) = N$. Пусть n, k — натуральные числа, $n > k$ и $\varphi_{nk} : n \to k$ — стандартное отображение. Рассмотрим точку $\xi \in F(G(k))$ с носителем, равным k. В силу предложения 2 и дискретности k имеем

$$k = supp(\xi, F \circ G) = \cup\{supp(\eta, G) : \eta \in supp(\xi, F)\}.$$

Поскольку $G(k)$ конечно, $supp(\xi, F) = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$ — конечное множество. Среди точек η_i найдется хотя бы одна, носитель которой содержит $k-1 \in k$. Пусть, для определенности, $k-1 \in supp(\eta_m, G) = p_m \subset k$. Для каждого l, $k \leq l < n$ определим отображение $g_l : p_m \to n$ по формуле $g_l(i) = i$ при $i \in p_m$, $i \neq k-1$ и $g_l(k-1) = l$. Положим $\gamma_l = G(g_l)(\eta_m) \in G(n)$. Поскольку $\varphi_{nk} \circ g_l = id_{p_m}$, для любого l $G(\varphi_{nk})(\gamma_l) = \eta_m$. Далее, рассмотрим тождественное вложение $i_k : k \to n$ и положим $\mu_j = G(i_k)(\eta_j)$, $j = 1, \ldots, m$. Как и выше, $G(\varphi_{nk})(\mu_j) = \eta_j$. Введем обозначение:

$$H = \{\mu_1, \ldots, \mu_m, \gamma_k, \ldots, \gamma_{n-1}\} \subset G(n).$$

По построению множества H отображение

$$G(\varphi_{nk})|_H : H \to supp(\xi, F)$$

гомеоморфно стандартному отображению φ_{ab} из определения финитно строгой эпиморфности (индексы этого отображения: $a = m+n-k$, $b = m$). Поэтому в силу финитно строгой эпиморфности функтора F найдется точка $\mu \in F(H) \subset F(G(n))$ с носителем $supp(\mu, F) = H$, для которой $F(G(\varphi_{nk}))(\mu) = \xi$. Имеем

$$supp(\mu, F \circ G) = \cup\{supp(\eta, G) : \eta \in H\} = n$$

(последнее равенство является непосредственным следствием построения множества H). На этом проверка финитно строгой эпиморфности $F \circ G$ завершена. □

Будем говорить, что функтор F обладает свойством продолжения конечных сечений, если для любых $n, k \in N$, $n > k$ и любого отображения $h : A \to F(n)$, заданного на конечном подмножестве $A \subset F(k)$ и удовлетворяющего условию $F(\varphi_{nk}) \circ h = id_A$, существует непрерывное продолжение $H : F(k) \to F(n)$, для которого $F(\varphi_{nk}) \circ H = id_{F(k)}$. Свойством продолжения конечных сечений обладают все финитные функторы, а также функтор вероятностных мер P, поскольку $P(\varphi_{nk})$ есть мягкое отображение $(n-1)$-симплекса $P(n)$ на $(k-1)$-симплекс $P(k)$ (см. [3]).

Теорема 3. *Пусть G — финитно строго эпиморфный функтор, обладающий свойством продолжения конечных сечений, и $sp(G) = N$. Тогда для любого функтора F композиция $F \circ G$ финитно строго эпиморфна.*

Доказательство. Как и в теореме 2, $sp(F \circ G) = N$. Возьмем $n, k \in N$, $n > k$, и пусть $\xi \in (F \circ G)_{kk}(k)$. Имеем

$$supp(\xi, F \circ G) = \cup\{supp(\eta, G) : \eta \in supp(\xi, F)\} = k.$$

Выберем из множества $supp(\xi, F) \subset G(k)$ конечный набор различных точек $\{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ так, чтобы $\cup\{supp(\eta_j, G) : j = 1, \dots, m\} = k$. Поскольку функтор G финитно строго эпиморфен и $sp(G) = N$, для каждой точки η_i существует $\mu_i \in G(n)$ такая, что $G(\varphi_{nk})(\mu_i) = \eta_i$ и $supp(\mu_i, G) = \varphi_{nk}^{-1}(supp(\eta_i, G))$. Так как G обладает свойством продолжения конечных сечений, для отображения $h : \{\eta_1, \dots, \eta_m\} \to G(n)$, задаваемого формулой $h(\eta_i) = \mu_i$, существует непрерывное продолжение $H : G(k) \to G(n)$, удовлетворяющее условию $G(\varphi_{nk}) \circ H = id_{G(k)}$. Положим $\mu = F(H)(\xi)$. Очевидно, что $F(G(\varphi_{nk}))(\mu) = \xi$. Поскольку H — вложение, $supp(\mu, F) = H(supp(\xi, F))$. Таким образом, $\mu_1, \dots, \mu_m \in supp(\mu, F)$. Следовательно,

$$supp(\mu, F \circ G) = \cup\{supp(\eta, G) : \eta \in supp(\mu, F)\} \supset$$
$$\supset \cup\{supp(\mu_i, G) : i = 1, \dots, m\} = n. \ \square$$

В формулировках теорем 2 и 3 требуется, чтобы спектр финитно строго эпиморфного функтора был равен N. Как мы сейчас покажем, это требование существенно.

Предложение 4. *Квадрат финитно строго эпиморфного функтора exp_2 не является финитно строго эпиморфным функтором.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{42} : 4 \to 2$ — стандартное отображение (отметим, что $2, 4 \in sp(exp_2 \circ exp_2)$) и пусть $\xi = \{\{0\}, \{1\}\} \in exp_2(exp_2(2))$. Очевидно, что $supp(\xi, exp_2 \circ exp_2) = 2$. Пусть $\eta \in exp_2(exp_2(4))$ и $exp_2(exp_2(\varphi_{42}))(\eta) = \xi$. Тогда $\eta = \{\{0\}, A\}$, где $A \in exp_2(4)$ и $\varphi_{42}(A) = \{1\}$. Следовательно, $supp(\eta, exp_2 \circ exp_2) \neq 4$. $\square$

Замечание 4. Аналогично можно доказать, что композиция $exp_n \circ exp_n$ не финитно строго эпиморфна для любого $n \geq 2$.

Следующее предложение показывает, что существует финитно строго эпиморфный функтор бесконечной степени, квадрат которого не финитно строго эпиморфен.

Предложение 5. *Функтор $exp^K \circ exp^K$ не финитно строго эпиморфен при $K = \{1, 2\} \cup \{n : n > 16\}$.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что $sp(exp^K \circ exp^K) \ni 4$. Рассмотрим в $exp^K(4)$ две точки $\eta^i = \{\eta^i_n : n \in K\}, i = 1, 2$, где $\eta^1_1 = \{0\}$, $\eta^1_2 = \{0, 1\}$, $\eta^2_1 = \{2\}$, $\eta^2_2 = \{2, 3\}$ и $\eta^i_n = \xi^0_n$ [3] при $n > 16$. Положим далее $\xi = \{\xi_n : n \in K\}$, $\xi_1 = \{\eta^1\}$, $\xi_2 = \{\eta^1, \eta^2\}$, $\xi_n = \xi^0_n$. Тогда $\xi \in exp^K(exp^K(4))$ и $supp(\xi, exp^K \circ exp^K) = 4$.

Рассмотрим теперь отображение $\varphi_{42} : 4 \to 2$. Построенная выше точка η^1 содержится также и в $exp^K(2)$. Положим $\gamma = \{\gamma_n : n \in K\}$, где $\gamma_1 = \{\eta_1\}$, $\gamma_n = \xi^0_n$ при $n \in K$, $n > 1$. Ясно, что $\gamma \in exp^K(exp^K(2))$, $supp(\gamma, exp^K \circ exp^K) = 2$ и $|supp(\gamma, exp^K)| = 1$. Пространство $exp^K(4)$ содержит 16 точек, а именно 4 точки с носителем мощности 1 и 12 точек с носителем мощности 2 (типа построенных выше η_1, η_2). Следовательно, для любого $\mu \in exp^K(exp^K(4))$ носитель μ в $exp^K(4)$ содержит не более двух точек. Если $supp(\mu, exp^K \circ exp^K) = 4$, то $supp(\mu, exp^K) = \{\alpha^1, \alpha^2\}$ (и, значит, μ имеет вид $\{\mu_n : n \in K\}$, где $\mu_1 = \{\alpha^1\}$, $\mu_2 = \{\alpha^1, \alpha^2\}$, $\mu_n = \xi^0_n$ при $n > 2$) и каждая точка α^i имеет двухточечный носитель в пространстве 4, причем $supp(\alpha^1) \cup supp(\alpha^2) = 4$. При этом неизбежно носитель одной из точек α^i (пусть, для определенности, — α^1) отображается при φ_{42} в точку $1 \in 2$, а на носителе второй точки α^2 отображение φ_{42} взаимно однозначно. Следовательно, точки $\beta^i = exp^K(\varphi_{42})(\alpha^i)$, $i = 1, 2$, различны, поскольку $|supp(\beta^1)| = 1$. Имеем

$$\gamma' = exp^K(exp^K(\varphi_{42}))(\mu) = \{exp^0_n(exp^K(\varphi_{42}))(\mu_n) : n \in K\},$$

где $exp^0_1(exp^K(\varphi_{42}))(\{\alpha^1\}) = \{\beta^1\}$, $exp^0_2(exp^K(\varphi_{42}))(\{\alpha^1, \alpha^2\}) = \{\beta^1, \beta^2\}$. Следовательно, $supp(\gamma', exp^K) = \{\beta^1, \beta^2\}$ и, значит, $\gamma' \neq \gamma$. Итак, показано, что для любого $\mu \in (exp^K \circ exp^K)_{44}(4)$

$$(exp^K \circ exp^K)(\varphi_{42})(\mu) \neq \gamma,$$

— функтор $exp^K \circ exp^K$ не является финитно строго эпиморфным. □

[3] Через ξ^0_n здесь, как и выше, обозначается единственная нетривиальная точка фактор-пространства $exp_n Y/R_n$ для любого Y.

Предложение 6. *Для любого F функтор $F \circ \lambda$ финитно строго эпиморфен. Если F — финитный функтор, то $\lambda \circ F$ также финитно строго эпиморфен.*

Доказательство. $F \circ \lambda$. Пусть $n, k \in sp(F \circ \lambda)$, $n > k$ и пусть $\xi \in (F \circ \lambda)_{kk}(k)$. Имеем

$$supp(\xi, F \circ \lambda) = \cup\{supp(\eta, \lambda) : \eta \in supp(\xi, F)\} = k.$$

Для каждой точки $\eta \in supp(\xi, F) \subset \lambda(k)$ определим $h(\eta) \in \lambda(n)$ следующим образом. Если $supp(\eta) \not\ni k-1$, то в $\lambda(n)$ имеется единственная точка γ, для которой $\lambda(\varphi_{nk})(\gamma) = \eta$, и мы полагаем $h(\eta) = \gamma$. Если же $supp(\eta) \ni k-1$, то возможны два варианта: 1) $supp(\eta) \neq \{k-1\}$, 2) $supp(\eta) = \{k-1\}$. В первом случае $supp(\eta)$ содержит, по крайней мере, три точки. В силу финитно строгой эпиморфности λ в $\lambda(n)$ найдется точка γ с носителем $supp(\gamma) = (\varphi_{nk})^{-1}(supp(\eta))$, для которой $\lambda(\varphi_{nk})(\gamma) = \eta$. Тогда положим $h(\eta) = \gamma$. Если же $supp(\eta) = \{k-1\}$, то в качестве $h(\eta)$ возьмем единственную максимальную сцепленную систему в $\lambda(n)$, содержащую все множества вида $\{0, m\}$, $k-1 \leq m < n$, и множество $\{k-1, \ldots, n-1\}$.

Итак, на $supp(\xi, F)$ определено отображение $h : supp(\xi, F) \to \lambda(n)$, удовлетворяющее условию $\lambda(\varphi_{nk}) \circ h = id_{supp(\xi,F)}$. Из построения следует, что

$$\cup\{supp(h(\eta)) : \eta \in supp(\xi, F)\} = n.$$

Пусть $H : \lambda(k) \to \lambda(n)$ — какое-нибудь продолжение h, для которого выполняется равенство $\lambda(\varphi_{nk}) \circ H = id_{\lambda(k)}$. Пусть $\mu = F(H)(\xi)$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 3, получаем, что $F(\lambda(\varphi_{nk}))(\mu) = \xi$ и $supp(\mu, F \circ \lambda) = n$.

$\lambda \circ F$. Пусть $n, k \in sp(\lambda \circ F)$, $n > k$ и $\xi \in (\lambda \circ F)_{kk}(k)$. Тогда

$$k = supp(\xi, \lambda \circ F) = \cup\{supp(\eta, F) : \eta \in supp(\xi, \lambda)\}.$$

Пусть $supp(\xi, \lambda) = \{\eta_1, \ldots, \eta_m\}$. Если $m \geq 3$, то мы можем построить точку $\mu \in (\lambda \circ F)(n)$ с носителем $supp(\mu, \lambda \circ F) = n$, для которой $(\lambda \circ F)(\varphi_{nk})(\mu) = \xi$. Для этого достаточно дословно повторить соответствующую часть доказательства теоремы 2, имея в виду то, что λ финитно строго эпиморфен и $m \in sp(\lambda)$ при $m \geq 3$. Аналогичные построения осуществимы и в случае $m = 1$, $n - k \geq 2$. Остается рассмотреть один случай: $m = 1$, $n = k + 1$. Определим вложения $g_i : k \to n$, $i = 1, 2$, по формулам: $g_1(k-1) = k-1$, $g_2(k-1) =$

k, $g_i(j) = j$ при $j < k-1$ $(i = 1, 2)$. Положим $\gamma_i = F(g_i)(\eta_1) \in F(n)$. Ясно, что $\gamma_1 \neq \gamma_2$ (так как $supp(\gamma_1) \neq supp(\gamma_2)$) и $F(\varphi_{nk})(\gamma_i) = \eta_1$, $i = 1, 2$. Покажем, что множество $F(n)$ не исчерпывается точками γ_1, γ_2. Поскольку $n \subset F(n)$, необходимо рассмотреть лишь случай $n = 2$. При этом $k = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$. Если $F(2) = \{0, 1\}$, то в $\lambda(F(2))$ нет элементов с двухточечным носителем и, следовательно, $2 \notin sp(\lambda \circ F)$ — противоречие.

Итак, в $F(n)$ найдется точка γ_3, отличная от γ_1 и γ_2. Рассмотрим в $F(n)$ максимальную сцепленную систему μ с носителем $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Имеем: $\mu \in (\lambda \circ F)(n)$, $supp(\mu, \lambda \circ F) = n$ и $(\lambda \circ F)(\varphi_{nk})(\mu) = \xi$. Строгая эпиморфность $\lambda \circ F$ полностью доказана. □

Из теоремы 3 и предложения 6 непосредственно вытекает

Следствие. *Любая конечная композиция функторов* exp, λ, P, $\mathcal{N}^k (k \geq 2)$ *является финитно строго эпиморфным функтором.*

Résumé

The degree spectrum $sp(F)$ of functor F is a set of degrees of points in spaces of the form $F(X)$. We prove that for any subset $K \subset N$ there is strictly epimorphic functor F satisfying certain normality conditions with $sp(F) = K$. We also prove that for strictly epimorphic functor F the composition $F \circ G$ is strictly epimorphic if $sp(F) = N$ and G preserve finite spaces. The composition $G \circ F$ is also strictly epimorphic for any G if F has extension property for finite sections.

Литература

[1] Иванов А. В. *О функторах конечной степени и к-метризуемых бикомпактах*// http://www.topology.karelia.ru

[2] Иванов А. В. *О пространстве полных сцепленных систем*// Сибирский матем. журнал. 1986. Т. 27. № 6. С. 95–110.

[3] Федорчук В. В., Филиппов В. В. *Общая топология. Основные конструкции.* М.: Изд-во МГУ, 1988.

[4] Fedorchuk V., Todorčević S. *Cellularity of covariant functors*// Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125–150.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33