Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 517

Ю. В. Крашенинникова

КОНСТРУКТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССОВ С. Л. СОБОЛЕВА НА ДИЗЪЮНКТНЫХ ОТРЕЗКАХ

В работе дана конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева на языке взвешенных полиномиальных приближений на конечном множестве дизъюнктных отрезков.

Введение

Важное конструктивное описание классов С. Л. Соболева на единичном отрезке на языке взвешенных полиномиальных приближений было предложено Е. М. Дынькиным [1]: функция f на $[-1,1]$ входит в класс $W_p^l[-1,1]$, $1<p<\infty$, $l=2,3,\ldots$, тогда и только тогда, когда для некоторой последовательности $\{P_{2^n}\}$ алгебраических многочленов степени не выше 2^n, $n=0,1,\ldots$,

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|f(x)-P_{2^n}(x)|^2\left(2^{-n}\sqrt{1-x^2}+4^{-n}\right)^{-2l}\right)^{p/2}dx<\infty.$$

Описание классов функций, определенных на дизъюнктных отрезках, до сих пор отсутствовало.

В настоящей работе дается конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева W_2^l, $l=2,3,\ldots$, на конечном множестве дизъюнктных отрезков. В дальнейшем $E=\bigcup\limits_{k=1}^{m}s_k$ — объединение конечного числа попарно не пересекающихся отрезков $s_k=[a_k,b_k]$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Далее, пусть $G(z)$ — функция Грина области $\mathbb{C} \setminus E$ с полюсом в бесконечности;

$$\mathcal{L}_h = \{z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad C(z) = \ln(1+h)\}, \quad h > 0,$$

— линии уровня множества E;

$$\rho_h(z) = \mathrm{dist}(z, \mathcal{L}_h), \qquad z \in E. \tag{1}$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(z) \in L^2(E)$. Функция $f(z)$ принадлежит классу $W_2^l(E)$, $l = 2, 3, \ldots$, тогда и только тогда, когда существует последовательность многочленов $\{P_{2^n}\}$ такая, что $\deg P_{2^n} \le 2^n + ml$, $n = 0, 1, \ldots$, и*

$$\int_E \sum_{n=0}^{\infty} \left|f(z) - P_{2^n}(z)\right|^2 \rho_{2^{-n}}(z)^{-2l} |dz| < \infty. \tag{2}$$

В данной статье конструктивные свойства классов С. Л. Соболева изучаются с помощью псевдоаналитического продолжения [1]. Псевдоаналитическим продолжением функции f, первоначально заданной на некотором множества K, называется такое непрерывное продолжение до функции F с компактным носителем на плоскости, что ее комплексная производная

$$\bar{\partial} F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right), \quad z = x + iy,$$

быстро убывает при приближении к ∂K. Скорость такого убывания однозначно характеризует гладкость исходной функции f.

В [1] предложены три различные конструкции псевдоаналитического продолжения, в частности, продолжение по симметрии, используя которое мы продолжаем $f \in W_2^l(E)$ до некоторой функции F из класса $W_2^1(\mathbb{C})$. Полученное в п. 3 в [1] описание класса $W_2^l(E)$ с помощью псевдоаналитического продолжения позволяет доказать необходимость условия (2). Достаточность этого условия следует сразу из результата Е. М. Дынькина [1].

§ 1. Предварительные сведения

Предметом дальнейшего изложения являются функции одной переменной из классов $W_2^l(E)$, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_k$, $l = 2, 3, \ldots$ Класс $W_2^l(E)$ [2, глава 3] состоит из функций f, имеющих на s_k непрерывные производные до порядка $(l-1)$ включительно, и таких, что $f^{(l-1)}$ абсолютно непрерывна на s_k и $f^{(l)} \in L^2(s_k)$, $k = 1, \ldots, m$.

Пусть K — ограниченный континуум с односвязным дополнением и кусочно-липшицевой границей.

Сектор Лузина [3, глава 7] $S_\mu(K; z)$, $z \in \partial K$, $\mu > 0$, определим как

$$S_\mu(K; z) = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus K, |\zeta - z| \le (1+\mu) d(\zeta, K)\}, \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{3}$$

где $d(\zeta, K)$ — расстояние от точки ζ до континуума K.

Для сокращения записи мы пользуемся известными понятиями слабой эквивалентности $a \asymp b$ и слабого неравенства $a \preceq b$ [4, главы 2 и 3].

Через c_i обозначаем положительные постоянные, зависящие от свойств классов W_2^l, $l = 2, 3, \ldots$, и геометрических характеристик рассматриваемых множеств.

§ 2. Специальное семейство континуумов

Достроим множество E до кусочно-гладкого континуума

$$M = M(E; z_1, \ldots, z_m) = E \cup \left\{ \bigcup_{k=1}^{m} (t_k \cup \tau_k) \right\},$$

где t_k, $k = 1, \ldots, m$, — попарно не пересекающиеся отрезки, удовлетворяющие при всех k условиям: отрезки t_k и s_k ортогональны; $t_k \cap s_k = z_k \in s_k'$, где

$$s_k' = \left[\frac{1}{4}(3a_k + b_k), \frac{1}{4}(a_k + 3b_k) \right]; \tag{4}$$

$t_i \cap s_j = \emptyset$ при $i \ne j$; отрезки t_k продолжаются гладкими дугами τ_k, лежащими вне множества E и сходящимися в некоторой точке O под углами $\dfrac{2\pi}{m}$; τ_k, $k = 1, \ldots, m$, попарно не имеют общих точек кроме точки O.

Пусть $\Phi(z)\colon \mathbb{C}\setminus M \to \mathbb{C}\setminus \bar{D}$, $\Phi(\infty)=\infty$, $\Phi'(\infty)>0$, — конформное отображение внешности континуума M на внешность единичного круга D. Линии уровня M — это кривые

$$L_h = \{z\colon z\in\mathbb{C}\setminus M, |\Phi(z)| = 1+h\}, \quad h>0.$$

Пусть

$$\rho_h(M;z) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_h(z_z,\dots,z_m,z) = \operatorname{dist}(z,L_h), \quad z\in M. \tag{5}$$

Известно [4, глава 9], что для множества $\mathfrak{M}$ с кусочно-гладкой границей и ненулевыми внешними углами справедливо соотношение

$$\rho_h(M;z) \asymp h\left[|z-\zeta_j|^{1/\alpha_j}+h\right]^{\alpha_j-1}, \quad z\in\partial\mathfrak{M}, \tag{6}$$

где ζ_j — ближайшая к z угловая точка $\mathfrak{M}$, $\alpha_j\pi\neq 0$ — величина внешнего к $\mathfrak{M}$ угла в точке ζ_j.

Из соотношения (6) для $z\in s_k$ имеем

$$\rho_h(M;z)\asymp \frac{h}{|z-z_k|+\sqrt{h}}, \tag{7}$$

если z_k — ближайшая к z угловая точка на s_k;

$$\rho_h(M;z)\asymp h\left[|z-b_k|^{1/2}+h\right], \tag{8}$$

если b_k — ближайшая к z угловая точка на s_k.

Полностью аналогичное соотношение справедливо в том случае, когда a_k — ближайшая к z из точек a_k, b_k и z_k.

Далее нам потребуется следующее свойство расстояний $\rho_h(z)$ (см. (1)) до линий уровня $\mathcal{L}_h$:

$$\rho_h(z)\asymp h\left(h+\sqrt{|z-a_k|\,|z-b_k|}\right), \quad z\in s_k=[a_k,b_k], \quad 0<h\le 1. \tag{9}$$

Используя соотношения (7)–(9) и учитывая, что $z_k\in s_k'$ (см. (4)), можно показать, что для любой точки $z\in s_k$ расстояния $\rho_h(z)$ и $\rho_h(M;z)$ связаны неравенством

$$\rho_h(M;z)\le c_1\frac{\rho_h(z)}{|z-z_k|}. \tag{10}$$

§ 3. Псевдоаналитическое продолжение функций из классов $W_2^l(E)$

Построим псевдоаналитическое продолжение $F(z)$ функции $f(z) \in W_2^l(E)$ на $\mathbb{C}$. С этой целью для каждого k рассмотрим замкнутые прямоугольники $\prod_{k,1}$ и $\prod_{k,2}$, противоположные стороны которых параллельны отрезку s_k и такие, что $s_k \subset \prod_{k,1} \subset \prod_{k,2}$, концы отрезка t_k лежат вне $\prod_{k,2}$, $\tau_k \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} \prod_{i,2}\right) = \emptyset$ при $k = 1, \dots, m$; $\prod_{i,2} \cap \prod_{j,2} = \emptyset$, $t_i \cap \prod_{j,2} = \emptyset$ при $i \neq j$.

Пусть k фиксировано. Продолжим $f(z)$ на прямоугольник $\prod_{k,1}$. Отправляясь от отрезков s_k и t_k, построим семейство вспомогательных областей $D_k^+ = D_k^+(z_k)$ следующим образом: выберем на отрезке t_k точки $\alpha_k, \beta_k \notin \prod_{k,2}$, $\alpha_k \neq \beta_k$, $|\alpha_k - z_k| = |\beta_k - z_k|$, и соединим их гладкой дугой γ_k^+, симметричной относительно прямой, содержащей отрезок s_k и лежащей вне прямоугольника $\prod_{k,2}$ слева от отрезка t_k. Пусть D_k^+ — область, ограниченная отрезками $[z_k, b_k]$, $[\alpha_k, \beta_k]$ и дугой γ_k^+. Кроме областей $D_k^+(z_k)$ рассмотрим семейство $D_{k,\varepsilon}^+ = D_{k,\varepsilon}^+(z_k)$, $\varepsilon < 1$. $D_{k,\varepsilon}^+$ получается из D_k^+ присоединением к ней области, ограниченной двумя симметричными относительно отрезка z_k и ортогональными отрезку t_k дугами окружностей, начинающимися в точке b_k и составляющими в этой точке угол $\pi\varepsilon$, и отрезком $[\alpha_{k,\varepsilon}, \beta_{k,\varepsilon}]$, где $\alpha_{k,\varepsilon}$ и $\beta_{k,\varepsilon}$ — точки пересечения указанных дуг окружностей с t_k.

Пусть $\varphi_{k,\varepsilon} : \mathbb{C} \setminus \bar{D}_{k,\varepsilon}^+ \to \mathbb{C} \setminus \bar{D}_k^+$ — конформное отображение внешности континуума $\bar{D}_{k,\varepsilon}^+$ на внешность континуума $\bar{D}_k^+$, нормированное условиями

$$\varphi_{k,\varepsilon}(b_k) = b_k, \quad \varphi_{k,\varepsilon}(\alpha_{k,\varepsilon}) = \varphi_{k,\varepsilon}(\beta_{k,\varepsilon}) = z_k,$$

и пусть $\psi_{k,\varepsilon}$ — отображение, обратное к $\varphi_{k,\varepsilon}$. Функция $z = \varphi_{k,\varepsilon}(\omega)$ аналитична на $\partial D_{k,\varepsilon}^+$ всюду, кроме точки b_k, и вблизи b_k обладает следующими свойствами:

$$|\varphi_{k,\varepsilon}(\omega) - b_k| \asymp |\omega - b_k|^{\frac{2}{(2-\varepsilon)}}, \tag{11}$$

$$|\varphi_{k,\varepsilon}(\omega)| \asymp |\omega - b_k|^{\frac{\varepsilon}{(2-\varepsilon)}}, \tag{12}$$

$$|\varphi_{k,\varepsilon}^{(\nu)}(\omega)| \leq c_\nu |\omega - b_k|^{\frac{2}{(2-\varepsilon)} - \nu}, \quad \nu = 2, 3, \dots \tag{13}$$

Продолжим функцию $f(z) \in W_2^l(s_k)$, $l = 2, 3, \ldots$, на всю границу области D_k^+, полагая при $z \in \gamma_k^+ \cup [\alpha_k, \beta_k]$

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{l-1} f^{(\nu)}(z_k) \frac{(z - z_k)^\nu}{\nu!}.$$

Ясно, что $f \in W_2^l(\partial D_k^+)$. Пусть $f = f_0 + T$, где T — многочлен степени не выше $(l-1)$ и $f_0(b_k) = f_0'(b_k) = \ldots = f_0^{(l-1)}(b_k) = 0$. Определим функцию g на $\partial D_{k,\varepsilon}^+$ равенством

$$g(\omega) = \varphi_{k,\varepsilon}'(\omega)^{1/2-l} f_0[\varphi_{k,\varepsilon}(\omega)], \quad \omega \in \partial D_{k,\varepsilon}^+.$$

Используя соотношения (11)–(13) и включение $f^{(l)} \in L^2(\partial D_k^+)$, можно показать, что g имеет на $\partial D_{k,\varepsilon}^+$ $(l-1)$ непрерывных производных, $g^{(l-1)}$ абсолютно непрерывна и $g^{(l)} \in L^2(\partial D_{k,\varepsilon}^+)$. Тогда существует разложение $g = g_+ + g_-$, $g_+ \in E_2^l(D_{k,\varepsilon}^+)$ и $g_- \in E_2^l(\mathbb{C} \setminus \bar{D}_{k,\varepsilon}^+)$, где $E_p^l(\mathcal{H})$, $1 < p < \infty$, $l > 0$ целое, — множество всех аналитических в липшицевой области $\mathcal{H}$ функций f, $f \in E^p(\mathcal{H})$, у которых $f^{(l)} \in E^p(\mathcal{H})$ [5].

Используя результаты, полученные Е. М. Дынькиным в [1], можно построить псевдоаналитическое продолжение $\mathbf{g}_+$ функции $g_+ \in E_2^l(D_{k,\varepsilon}^+)$ в область $\mathbb{C} \setminus \bar{D}_{k,\varepsilon}^+$ такое, что $\mathbf{g}_+ \in W_2^1(\mathbb{C} \setminus \bar{D}_{k,\varepsilon}^+)$ и удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered}\int\limits_{\partial D_{k,\varepsilon}^+} |\varphi_{k,\varepsilon}'(\omega)|\,|d\omega| \times \\ \times \left(\iint\limits_{S(\bar{D}_{k,\varepsilon}^+;\omega)} |\varphi_{k,\varepsilon}'(w)^{-1/2} d(w, \partial D_{k,\varepsilon}^+)^{-l} \bar{\partial}\mathbf{g}_+(w)|^2 du dv \right) < c_2,\end{gathered} \tag{14}$$

$w = u + iv$.

Здесь $S(\bar{D}_{k,\varepsilon}^+; \omega)$ — сектор Лузина для континуума $\bar{D}_{k,\varepsilon}^+$ (см. (3)).

Ясно, что функция $g_0 = \mathbf{g}_+ + g_-$ принадлежит классу $W_2^1(\mathbb{C} \setminus \bar{D}_{k,\varepsilon}^+)$, ее граничные значения на $\partial D_{k,\varepsilon}^+$ совпадают с g, и поскольку $\bar{\partial} g_- = 0$, то $\bar{\partial} g_0 = \bar{\partial}\mathbf{g}_+$.

Определим теперь функцию f_k^+ в $\mathbb{C}\setminus\bar{D}_k^+$ формулой

$$f_k^+(z)=\psi'_{k,\varepsilon}(z)^{1/2-l}g_0[\psi_{k,\varepsilon}(z)]+T(z).$$

Легко видеть, что $f_k^+(z)=f(z)$ на ∂D_k^+ и имеет место оценка

$$|\bar\partial f_k^+(x)|\le c_3|\psi'_{k,\varepsilon}(z)|^{1/2-l+1}|\bar\partial\mathbf{g}_+[\psi_{k,\varepsilon}(z)]|.$$

Отсюда и из неравенства (14) с помощью замены переменной $\omega=\psi_{k,\varepsilon}(z)$ получаем, что $f_k^+(z)\in W_2^1(\mathbb{C}\setminus\bar{D}_k^+)$ и

$$\int\limits_{\partial D_k^+}|dz|\left(\iint\limits_{S(\bar{D}_k^+;z)}|\bar\partial f_k^+(\zeta)d(\zeta,\partial D_k^+)^{-l}|^2d\xi d\eta\right)<c_4, \tag{15}$$

где $S(\bar{D}_k^+;z)$ — сектор Лузина для континуума $\bar{D}_k^+$.

Строя дугу γ_k^-, соединяющую точки α_k и β_k, симметричную относительно прямой, содержащей отрезок s_k, и лежащую вне $\prod_{k,2}$ справа от отрезка t_k, рассмотрим семейство областей $D_k^-=D_k^-(z_k)$, где D_k^- ограничена отрезками $[\alpha_k,\beta_k]$, $[a_k,z_k]$ и дугой γ_k^-. Как и выше, можно показать, что функция $f\in W_2^l(\partial D_k^-)$ допускает продолжение f_k^- в область $\mathbb{C}\setminus\bar{D}_k^-$, $f_k^-\in W_2^1(\mathbb{C}\setminus\bar{D}_k^-)$ и

$$\int\limits_{\partial D_k^-}|dz|\left(\iint\limits_{S(\bar{D}_k^-;z)}|\bar\partial f_k^-(\zeta)d(\zeta,\partial D_k^-)^{-l}|^2d\xi d\eta\right)<c_5, \tag{16}$$

где $S(\bar{D}_k^-;z)$ — сектор Лузина для континуума $\bar{D}_k^-$.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}&\textstyle\prod_{k,i}^+=\prod_{k,i}\cap\{D_k^-\cup[\alpha_k,\beta_k]\},\\ &\textstyle\prod_{k,i}^-=\prod_{k,i}\cap\{D_k^+\cup[\alpha_k,\beta_k]\},\quad i=1,2,\end{aligned}$$

и пусть

$$F_k(z)=\begin{cases}f_k^+(z), & z\in\prod_{k,1}^+,\\ f_k^-(z), & z\in\prod_{k,1}^-.\end{cases}$$

С помощью несложных вспомогательных построений продолжим функцию $F_k(z)$ на прямоугольник $\prod_{k,2}$ так, что $F_k(z)\equiv 0$ при $z\in$

$\partial\prod_{k,2}$, $F_k(z)\in W_2^1(\prod_{k,2})$ и

$$\int\limits_{s_k\cup[\alpha_k,\beta_k]}|dz|\left(\iint\limits_{S(M;z)\cap\prod_{k,2}}|\bar\partial F_k(\zeta)d(\zeta,M)^{-l}|^2d\xi d\eta\right)\le$$

$$\le c_6\left[\int\limits_{s_k\cup[\alpha_k,\beta_k]}|dz|\left(\iint\limits_{S(M;z)\cap\prod^+_{k,2}}|\bar\partial f_k^+(\zeta)d(\zeta,M)^{-l}|^2d\xi d\eta\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{s_k\cup[\alpha_k,\beta_k]}|dz|\left(\iint\limits_{S(M;z)\cap\prod^-_{k,2}}|\bar\partial f_k^-(\zeta)d(\zeta,M)^{-l}|^2d\xi d\eta\right)+1\right],\qquad(17)$$

где $S(M;z)$ — сектор Лузина для континуума M.

Теперь в качестве псевдоаналитического продолжения функции $f\in W_2^l(E)$ возьмем функцию $F(z)=F_k(z)$ при $z\in\prod_{k,2}$, $k=1,\dots,m$, и равную нулю во всех остальных точках комплексной плоскости.

Учитывая свойство сектора Лузина $|\zeta-z|\asymp d(\zeta,M)$ при $\zeta\in S(M;z)$, вид континуумов M, $\bar D_k^+$, $\bar D_k^-$, $k=1,..,m$, из соотношений (15)–(17) и включения $F\in W_2^1(\mathbb{C})$ можно получить следующую характеристику классов $W_2^l(E)$ с помощью псевдоаналитического продолжения.

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)\in W_2^l(E)$, $l=2,3,\dots$ Тогда $f(z)$ допускает псевдоаналитическое продолжение $F(z)$, такое, что*

$$\int\limits_M|dz|\left(\iint\limits_{S(M;z)}|\bar\partial F(\zeta)d(\zeta,M)^{-l}|^2d\xi d\eta\right)<c_7.\qquad(18)$$

§ 4. Конструктивная характеристика классов $W_2^l(E)$

Проведем доказательство теоремы, сформулированной во введении, в сокращенном виде.

Доказательство. В силу соотношения (9) включение $f\in W_2^l(E)$ при выполнении условия (2) следует непосредственно из теоремы 9 в [1] (см. Введение).

Докажем теперь необходимость условия (2). Пусть $f \in W_2^l(E)$, $l = 2, 3, \ldots$ Тогда по лемме функция f допускает псевдоаналитическое продолжение F, удовлетворяющее неравенству (18). Используя (18) и рассуждая как и при доказательстве теоремы 9 в [1], можно показать, что существует последовательность многочленов

$$P_{2^n}(f;M;z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}\setminus M} \bar{\partial}F(\zeta)K_{2^n}(\zeta,z)d\xi d\eta, \tag{19}$$

$\deg P_{2^n} \le 2^n$, $n = 0, 1, \ldots$, такая, что

$$\int\limits_E \sum_{n=0}^{\infty} |f(z) - P_{2^n}(f;M;z)|^2 \rho_{2^{-n}}(M;z)^{-2l}|dz| < c_8, \tag{20}$$

где $K_{2^n}(\zeta, z)$, $z \in M$, — многочленное ядро от z степени не выше 2^n, построенное, отправляясь от континуума M [4, глава 9], и $\rho_{2^{-n}}(M;z)$ определено в (5). $\square$

Для завершения доказательства теоремы существенна независимость всех фигурирующих в работе постоянных c_j от выбора точек $z_1, \ldots, z_m$. Покажем, например, что все c_j могут быть выбраны независимыми от конкретного континуума из семейства M. Пусть $c_j(z_1, \ldots, z_m)$ — некоторая постоянная, формально зависящая от $z_1, \ldots, z_m$, и пусть $(z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$ — фиксированная точка множества $s_1' \times \ldots \times s_m'$. Для любой последовательности точек $(z_1^{(\nu)}, \ldots, z_m^{(\nu)})$, $z_i^{(\nu)} \in s_i'$, такой, что $z_1^{(\nu)} \to z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(\nu)} \to z_m^{(0)}$, в силу построения семейства континуумов M, области $\mathbb{C}\setminus M(E, z_1^{(\nu)}, \ldots, z_m^{(\nu)})$ сходятся к области $\mathbb{C}\setminus M(E, z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$ как к ядру относительно точки ∞ [6, глава 2]. Тогда по теореме о сходимости для однолистного отображения последовательности областей [6, глава 5], в силу существования постоянной $c_j(z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$, получаем, что $c_j(z_1^{(\nu)}, \ldots, z_m^{(\nu)})$ ограничена сверху (или, соответственно, отделена от нуля, если c_j выступает в оценке снизу) в некоторой окрестности U_0 точки $(z_1^{(0)}, \ldots, z_m^{(0)})$. Выбирая из покрытия компакта $s_1' \times \ldots \times s_m'$ открытыми множествами U_0 конечное подпокрытие, приходим к наличию постоянной c_j^*, большей любого $c_j(z_1, \ldots, z_m)$ (или, соответственно, положительной и меньшей любой $c_j(z_1, \ldots, z_m)$) при произвольном выборе z_i, $1 \le i \le m$.

Приведенное выше рассуждение применимо и в том случае, когда постоянная $c_j(z_k)$ формально зависит от выбора континуумов $\bar{D}_k^+$, $\bar{D}_k^-$.

Пусть далее $\varphi_k(z_k)$ — многочлен степени l, определенный на отрезке s'_k, $k = 1, \ldots, m$, условиями

$$\begin{cases} \int\limits_{s'_k} z_k^i \varphi_k(z_k)|dz_k| = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1, \\ \int\limits_{s'_k} z_k^l \varphi_k(z_k)|dz_k| = 1, \end{cases}$$

и $\pi(z, z_1, \ldots, z_m) = \prod\limits_{k=1}^{m} (z - z_k)^l$. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{s'_1} \ldots \int\limits_{s'_m} (-1)^{ml} \pi(z, z_1, \ldots, z_m) \prod_{k=1}^{m} \varphi_k(z_k)|dz_1| \ldots |dz_m| = 1$$

и, следовательно,

$$f(z) = \int\limits_{s'_1} \ldots \int\limits_{s'_m} (-1)^{ml} \pi(z, z_1, \ldots, z_m) \prod_{k=1}^{m} \varphi_k(z_k) f(z)|dz_1| \ldots |dz_m|. \tag{21}$$

Теперь в качестве приближающего полинома возьмем

$$P_{2^n}(z) = P_{2^n}(f; E; z) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{s'_1} \ldots \int\limits_{s'_m} (-1)^{ml} \pi(z, z_1, \ldots, z_m) \prod_{k=1}^{m} \varphi_k(z_k) P_{2^n}(f; M; z)|dz_1| \ldots |dz_m|, \tag{22}$$

где вспомогательный полином $P_{2^n}(f; M; z)$ определен в (19). Ясно, что $\deg P_{2^n}(f; E; z) \leq 2^n + ml$.

В силу равенства (21) и определения (22) при $z \in s_k$ имеем

$$|f(z) - P_{2^n}(f; E; z)| \leq$$

$$\leq \int\limits_{s'_1} \ldots \int\limits_{s'_m} \prod_{k=1}^{m} |z - z_k|^l |\varphi_k(z_k)| |f(z) - P_{2^n}(f; M; z)| \, |dz_1| \ldots |dz_m| \preceq$$

$$\preceq \int\limits_{s'_1} \dots \int\limits_{s'_m} |f(z) - P_{2^n}(f;M;z)|\, |z-z_k|^l |dz_1| \dots |dz_m|. \tag{23}$$

Далее, учитывая, что все постоянные c_j не зависят от точек $z_1, \dots, z_m$, из соотношений (10) и (23) с помощью неравенства Гельдера при $z \in s_k$ получаем

$$\left(|f(z) - P_{2^n}(f;E;z)|\rho_{2^{-n}}(z)^{-l}\right)^2 \preceq$$

$$\preceq \left(\int\limits_{s'_1} \dots \int\limits_{s'_m} |f(z) - P_{2^n}(f;M;z)|\, |z-z_k|^l \rho_{2^{-n}}(z)^{-l} |dz_1| \dots |dz_m|\right)^2 \preceq$$

$$\preceq \left(\int\limits_{s'_1} \dots \int\limits_{s'_m} |f(z) - P_{2^n}(f;M;z)| \rho_{2^{-n}}(M;z)^{-l} |dz_1| \dots |dz_m|\right)^2 \preceq$$

$$\preceq \int\limits_{s'_1} \dots \int\limits_{s'_m} |f(z) - P_{2^n}(f;M;z)|^2 \rho_{2^{-n}}(M;z)^{-2l} |dz_1| \dots |dz_m|.$$

Неравенство (20) вместе с последним соотношением завершает доказательство (2) и, следовательно, всей теоремы.

Résumé

The constructive characte of the functional Sobolev class W_2^l, $l = 2, 3, \dots$, on a set of a finite number of disjoiont segments is given in terms of weighed polynomial approximation.

Список литературы

[1] Дынькин Е. М. *Конструктивная характеристика классов С. Л. Соболева и О. В. Бесова*// Зап. научн. семинаров ПОМИ. 1986. Т. 155. С. 41–76.

[2] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* 2-е изд. М.: Наука, 1996.

[3] Стейн Е. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир, 1973.

[4] Дзядык В. К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М.: Наука, 1977.

[5] Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

[6] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* 2-е изд. М.: Наука, 1966.

Российский гос. пед. университет,
кафедра математического анализа,
191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48