Труды Петрозаводского государственного университета
Серия “Математика” Выпуск 7, 2000

УДК 517.5

ОБОБЩЕННЫЕ СДВИГИ БЕССЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ В МЕТРИКЕ L_2. I

С. С. Платонов

В работе рассматриваются некоторые задачи теории приближений функций на промежутке $[0,+\infty)$ в метрике L_2 с некоторым весом целыми функциями экспоненциального типа. Используемые в задачах модули непрерывности строятся при помощи операторов обобщенного сдвига Бесселя. Доказаны прямые теоремы Джексоновского типа. Введены функциональные пространства типа Никольского — Бесова и получено их описание в терминах наилучших приближений.

Введение

В классической теории приближений функций на $\mathbb{R}$ в метриках L_p или C большую роль играет оператор сдвига $f(x) \mapsto f(x+y)$ и связанная с ним техника анализа Фурье. Сдвиги образуют однопараметрическую группу изометрий банаховых пространств (БП) $L_p(\mathbb{R})$ или $C(\mathbb{R})$. Многие задачи теории приближений могут быть распространены и на абстрактную ситуацию, когда в произвольном БП имеется однопараметрическая группа или полугруппа операторов (см. [1, 2]). Другим естественным обобщением операторов сдвига на $\mathbb{R}$ являются операторы обобщенного сдвига (ООС) Дельсарта — Левитана [3]. Операторы обобщенного сдвига образуют однопараметрическое семейство, которое не является группой или полугруппой операторов

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 99-01-00782

(т. е. T^aT^b может не равняться T^{a+b}), но тем не менее многие задачи гармонического анализа можно обобщить, используя обобщенный сдвиг вместо обычного. В частности, можно обобщать различные задачи теории приближений функций. Некоторые результаты в этом направлении получены в работах [4, 5, 6, 7]. В настоящей статье рассматриваются операторы обобщенного сдвига Бесселя (определение этих операторов см. далее) и с их помощью изучаются задачи теории приближений функций на промежутке $[0,\infty)$ в метрике L_2 с некоторым весом. В частности, доказаны прямые теоремы Джексоновского типа для обобщенного модуля непрерывности k-го порядка, определены функциональные пространства типа Никольского — Бесова и получено их описание в терминах наилучших приближений. В качестве средства приближения используется некоторый класс целых функций экспоненциального типа. Основные результаты работы анонсированы в тезисах конференций [8, 9].

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{(2\alpha+1)}{t}\,\frac{d}{dt}, \qquad \alpha > -\frac{1}{2}, \tag{1.1}$$

— дифференциальный оператор Бесселя. Обозначим через $j_\alpha(\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(2\alpha+1)}{t}\,\frac{dy}{dt} + \lambda^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Отметим, что

$$j_\alpha(\lambda t) = \frac{2^\alpha\,\Gamma(\alpha+1)\,J_\alpha(\lambda t)}{(\lambda t)^\alpha},$$

где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя (см. [10, с. 412]).

Мы будем рассматривать функции на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ (все функции предполагаются комплекснозначными), но при этом удобно считать, что функции по четности продолжены на всю прямую $\mathbb{R}$. Пусть $C(\mathbb{R}_+)$ — множество всех четных непрерывных функций на

$\mathbb{R}$, $C_c(\mathbb{R}_+)$ — множество непрерывных четных функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ — множество четных k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ — множество четных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Множества $C(\mathbb{R}_+)$, $C_c(\mathbb{R}_+)$, $C^{(k)}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ являются топологическими векторными пространствами с обычными топологиями. Через $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ обозначим множество всех четных обобщенных функций, т. е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Значение функционала $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать $< f, \varphi >$.

Через $L_{2,\alpha}$ обозначим гильбертово пространство (ГП), состоящее из измеримых функций $f(t)$ на $\mathbb{R}$ (функции рассматриваются с точностью до значений на множестве меры нуль), для которых конечна норма

$$||f||_{2,\alpha} := \left(\int |f(t)|^2\, t^{2\alpha+1}\, dt\right)^{1/2}.$$

Здесь и в дальнейших формулах интегралы берутся по промежутку $[0, +\infty)$, если отсутствуют пределы интегрирования. Скалярное произведение в ГП $L_{2,\alpha}$ определяется формулой

$$(f, g) := \int \bar{f}(t)\, g(t)\, t^{2\alpha+1}\, dt, \qquad f, g \in L_{2,\alpha}.$$

Пространство $L_{2,\alpha}$ вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, если для $f \in L_{2,\alpha}$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ положить

$$< f, \varphi > := \int f(t)\, \varphi(t)\, t^{2\alpha+1}\, dt.$$

Следуя Б. М. Левитану [10], для любой функции $f(t) \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ оператор обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t) = u(t, s)$ определим как решение следующей задачи Коши:

$$\mathcal{B}_t u(t, s) = \mathcal{B}_s u(t, s); \tag{1.2}$$

$$u(t, 0) = f(t), \qquad u'_s(t, 0) = 0, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{B}_s$ и $\mathcal{B}_t$ — дифференциальные операторы Бесселя, примененные по переменным s и t соответственно. Решение задачи Коши (1.2)–(1.3) может быть написано и в явном виде

$$T^s f(t) = u(t, s) = C \int_0^\pi f(\sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos\varphi})\, (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi, \tag{1.4}$$

где
$$C = \left[\int_0^\pi (\sin\varphi)^{2\alpha}\, d\varphi\right]^{-1} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1/2)}.$$
По формуле (1.4) оператор T^s продолжается до непрерывного оператора в $L_{2,\alpha}$.

Обозначим через $\mathcal{I}_\nu$, $\nu > 0$, множество всех функций $g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $g(x)$ — целая четная функция экспоненциального типа $\le \nu$;
2) $g(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}$.

Функции из $\mathcal{I}_\nu$ будут использоваться в качестве средства приближения. Отметим (см. подробнее §3), что функции из $\mathcal{I}_\nu$ допускают также другое описание: $g(t) \in \mathcal{I}_\nu$ тогда и только тогда, когда $g(t) \in L_{2,\alpha}$ и ее преобразование Бесселя $\widehat{g}(\lambda)$ равно 0 при $\lambda > \nu$ (такие функции мы будем называть функциями с ограниченным спектром порядка ν).

При помощи ООС Бесселя для любой функции $f(t) \in L_{2,\alpha}$ определим разности с шагом $h > 0$:
$$\Delta_h^1 f(t) = \Delta_h f(t) := f(t) - T^h f(t), \quad \ldots, \quad \Delta_h^k f(t) := \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(t)).$$
Можно также написать, что
$$\Delta_h^k f(t) = (I - T^h)^k f(t),$$
где I — единичный оператор.

Для любого натурального k обобщенный модуль непрерывности порядка k в метрике $L_{2,\alpha}$ определим формулой
$$\omega_k(f,\delta)_{2,\alpha} := \sup_{0<h\le\delta} \|\Delta_h^k f\|_{2,\alpha}, \quad \delta > 0, \quad f \in L_{2,\alpha}.$$
Наилучшее приближение функции $f \in L_{2,\alpha}$ функциями из $\mathcal{I}_\nu$ определяется как
$$E_\nu(f)_{2,\alpha} = \inf_{g\in\mathcal{I}_\nu} \|f - g\|_{2,\alpha}.$$
Действие оператора $\mathcal{B}$ естественным образом расширяется на пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, если положить
$$<\mathcal{B}f, \varphi> = < f, \mathcal{B}\varphi>, \ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+).$$

В частности, т. к. $L_{2,\alpha} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, то для любой функции $f \in L_{2,\alpha}$ определены обобщенные функции $\mathcal{B}f, \mathcal{B}^2 f, \ldots$, принадлежащие $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближений.

Теорема 1.1. *Пусть функции $f, \mathcal{B}f, \ldots, \mathcal{B}^s f$ принадлежат пространству $L_{2,\alpha}$, где $\mathcal{B}$ — оператор Бесселя. Тогда*

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \leq c\,\nu^{-2s}\,\omega_k(\mathcal{B}^s f, 1/\nu)_{2,\alpha},$$

где $c = c(k, s, \alpha)$ —- некоторая постоянная.

Пусть $r > 0$ — действительное число, k и s — произвольные неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $2k > r - 2s > 0$. Через $H^r_{2,\alpha}$ обозначим множество всех функций $f \in L_{2,\alpha}$, для которых $\mathcal{B}f, \mathcal{B}^2 f, \ldots, \mathcal{B}^s f \in L_{2,\alpha}$ и для некоторого числа $A_f > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha} \leq A_f\,\delta^{r-2s}, \qquad \delta > 0. \tag{1.5}$$

Для $f \in H^r_{2,\alpha}$ определим полунорму $h^r_{2,\alpha}(f)$

$$h^r_{2,\alpha}(f) := \sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha}}{\delta^{r-2s}}. \tag{1.6}$$

Множество $H^r_{2,\alpha}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|f\|_{H^r_{2,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + h^r_{2,\alpha}(f).$$

В следующей теореме дается описание пространства $H^r_{2,\alpha}$ через наилучшие приближения функциями из $\mathcal{I}_\nu$, в частности из нее следует, что пространства $H^r_{2,\alpha}$ не зависят от чисел k и s. Через $c_1, c_2, \ldots$ будем обозначать не зависящие от f постоянные, которые могут зависеть от k, r, s, α.

Теорема 1.2. *Если $f \in H^r_{2,\alpha}$, то при $\nu \geq 1$ справедливо неравенство*

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \leq c_1 \frac{h^r_{2,\alpha}(f)}{\nu^r}. \tag{1.7}$$

Обратно, если $f \in L_{2,\alpha}$ и при $\nu \geq 1$

$$E_\nu(f)_{2,\alpha} \leq \frac{A}{\nu^r}, \tag{1.8}$$

где A — не зависящая от ν (но зависящая от f) постоянная, то $f \in H^r_{2,\alpha}$ и

$$\|f\|_{H^r_{2,\alpha}} \le c_2(\|f\|_{2,\alpha} + A). \tag{1.9}$$

Пусть $1 \le q \le \infty$, $r > 0$, k и s —- неотрицательные целые числа, такие, что $2k > r - 2s > 0$. Аналогично [11] скажем, что функция f принадлежит классу Никольского — Бесова $B^r_{2,q,\alpha}$, если $f, \mathcal{B}f, \ldots, \mathcal{B}^s f \in L_{2,\alpha}$ и конечна полунорма

$$b^r_{2,q,\alpha}(f) = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \frac{(\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha})^q}{\delta^{(r-2s)q}} \frac{d\delta}{\delta}\right)^{1/q} & \text{при } q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{\delta>0} \frac{\omega_k(\mathcal{B}^s f, \delta)_{2,\alpha}}{\delta^{r-2s}} & \text{при } q = \infty. \end{cases}$$

Класс $B^r_{2,q,\alpha}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|f\|_{B^r_{2,q,\alpha}} := \|f\|_{2,\alpha} + b^r_{2,q,\alpha}(f). \tag{1.10}$$

Отметим, что $B^r_{2,\infty,\alpha} = H^r_{2,\alpha}$.

Теорема 1.3. *Пусть $a > 1$ — произвольное число (можно, например, взять $a = 2$). Для того чтобы функция $f \in L_{2,\alpha}$ принадлежала классу $B^r_{2,q,\alpha}$ необходимо и достаточно, чтобы была конечна полунорма*

$$\tilde{b}^r_{2,q,\alpha}(f) := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^\infty a^{nrq}(E_{2^n}(f)_{2,\alpha})^q\right)^{1/q} & \textit{при } q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} a^{nr} E_{a^n}(f)_{2,\alpha} & \textit{при } q = \infty, \end{cases}$$

где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. При этом норма (1.10) в $B^r_{2,q,\alpha}$ эквивалентна норме

$$\|f\|_{2,\alpha} + \tilde{b}^r_{2,q,\alpha}(f).$$

Основным средством для доказательств этих теорем является преобразование Бесселя. В §2 приводятся необходимые сведения о преобразовании Бесселя и об обобщенных сдвигах Бесселя. В §3 изучаются различные свойства функций, которые служат средством приближения, а также получены некоторые вспомогательные оценки. В §4 доказываются прямые теоремы Джексоновского типа, а в §5 доказываются теоремы 1.2 и 1.3 и получены некоторые эквивалентные нормировки пространств $B^r_{2,q,\alpha}$.

Из-за ограничений на объем статьи в настоящем выпуске Трудов ПетрГУ публикуются только §1, §2 и часть §3. Окончание статьи будет опубликовано в следующем выпуске Трудов ПетрГУ.

§ 2. Преобразования Бесселя и обобщенные сдвиги Бесселя

Приведем необходимые для дальнейшего сведения о преобразованиях Бесселя и обобщенных сдвигах Бесселя (см. [10, 12, 13]).

Преобразованием Бесселя называется следующее интегральное преобразование

$$\widehat{f}(\lambda) = \int f(t)\, j_\alpha(\lambda t)\, t^{2\alpha+1}\, dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{2.1}$$

Обратное преобразование Бесселя задается формулой

$$f(t) = \left(2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)\right)^{-2} \int \widehat{f}(\lambda)\, j_\alpha(\lambda t)\, \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda. \tag{2.2}$$

При $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ преобразования (2.1) и (2.2) определены и являются взаимно обратными, при этом также справедливо равенство Парсеваля

$$\int |f(t)|^2\, t^{2\alpha+1}\, dt = A \int |\widehat{f}(\lambda)|^2\, \lambda^{2\alpha+1}\, d\lambda, \tag{2.3}$$

где

$$A = \left(2^\alpha\, \Gamma(\alpha+1)\right)^{-2}. \tag{2.4}$$

Отображение $f(t) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ продолжается по непрерывности до изоморфизма (т. е. непрерывного биективного отображения) гильбертова пространства $L_{2,\alpha}$ на себя. Продолженное отображение будем также обозначать $f(t) \mapsto \widehat{f}(\lambda)$ и называть преобразованием Бесселя, при этом остается справедливой формула (2.3), которую можно также записать в виде

$$||f||_{2,\alpha}^2 = A\, ||\widehat{f}||_{2,\alpha}^2. \tag{2.5}$$

Определение оператора обобщенного сдвига Бесселя $T^s f(t)$ и его явный вид приведены в §1. По формуле (1.4) оператор T^s распространяется на все четные непрерывные функции, в частности, на функции из $C_c(\mathbb{R}_+)$. Проверим, что

$$|T^s f(t)|^2 \le T^s(|f(t)|^2). \tag{2.6}$$

Для этого на отрезке $[0,\pi]$ введем меру $dm(\varphi) = C(\sin\varphi)^{2\alpha}\,d\varphi$, где C — коэффициент из формулы (1.4). Далее, используя формулу (1.4) и неравенство Коши — Буняковского, получим, что

$$|T^s f(t)|^2 = |\int_0^\pi f(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\varphi})\cdot 1\,dm(\varphi)|^2$$
$$\le \left(\int_0^\pi |f(\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos\varphi})|^2\,dm(\varphi)\right)\left(\int_0^\pi dm(\varphi)\right) = T^s(|f(t)|^2).$$

Отметим еще следующее свойство самосопряженности операторов T^s (см. [11, §7]): пусть $f(t), g(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, причем для функции $f(t)$ конечен интеграл $\int |f(t)|\,t^{2\alpha+1}\,dt$, а функция $g(t)$ ограничена, тогда

$$\int (T^s f(t))\;g(t)\,t^{2\alpha+1}\,dt = \int f(t)\;(T^s g(t))\;t^{2\alpha+1}\,dt. \tag{2.7}$$

Равенство (2.7) также справедливо, если f — произвольная функция из $C(\mathbb{R}_+)$, а $g(t) \in C_c(\mathbb{R}_+)$. Для доказательства этого достаточно построить последовательность функций $f_n(t) \in C_c(\mathbb{R}_+)$, которая сходится к $f(t)$ равномерно на любом конечном отрезке, и в равенстве

$$\int (T^s f_n(t))\;g(t)\,t^{2\alpha+1}\,dt = \int f_n(t)\;(T^s g(t))\;t^{2\alpha+1}\,dt$$

перейти к пределу при $n\to\infty$.

Заметим, что функция $u(t,s) = j_\alpha(\lambda s) j_\alpha(\lambda t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) с начальными условиями

$$u(t,0) = j_\alpha(\lambda t), \qquad u'_s(t,0) = 0.$$

Из единственности решения задачи Коши (1.2) — (1.3) тогда следует, что

$$T^s j_\alpha(\lambda t) = j_\alpha(\lambda s) j_\alpha(\lambda t). \tag{2.8}$$

Проверим, что

$$\|T^s f\|_{2,\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha} \tag{2.9}$$

при $f \in C_c(\mathbb{R}_+)$. Действительно,

$$\|T^s f\|_{2,\alpha}^2 = \int |T^s f(t)|^2\,t^{2\alpha+1}\,dt \le \int (T^s |f(t)|^2)\cdot 1\,t^{2\alpha+1}\,dt$$

$$= \int |f(t)|^2 \, (T^s 1) \, t^{2\alpha+1} \, dt = \int |f(t)|^2 \, t^{2\alpha+1} \, dt = \|f\|_{2,\alpha}^2.$$

При этом было использовано неравенство (2.6) и соотношение (2.7) в частном случае, когда $g(t) = 1$.

Из неравенства (2.9) следует, что оператор T^s продолжается по непрерывности с $C_c(\mathbb{R}_+)$ до ограниченного оператора в $L_{2,\alpha}$. Продолженный оператор будем также обозначать T^s и для него остается справедливым неравенство (2.9).

Лемма 2.1. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}$, тогда*

$$(\widehat{T^s f})(\lambda) = j_\alpha(\lambda s) \, \widehat{f}(\lambda),$$

где $f \to \widehat{f}$ — преобразование Бесселя.

Доказательство. Так как оператор T^s непрерывен в $L_{2,\alpha}$ и подмножество $C_c(\mathbb{R}_+)$ плотно в $L_{2,\alpha}$, то лемму достаточно доказать для случая, когда $f \in C_c(\mathbb{R}_+)$. Используя (2.7) и (2.8) получим, что

$$(\widehat{T^s f})(\lambda) = \int (T^s f(t)) \, j_\alpha(\lambda t) \, t^{2\alpha+1} \, dt = \int f(t) \, (T^s j_\alpha(\lambda t)) \, t^{2\alpha+1} \, dt$$
$$= j_\alpha(\lambda s) \int f(t) \, j_\alpha(\lambda t) \, t^{2\alpha+1} \, dt = j_\alpha(\lambda s) \, \widehat{f}(\lambda).$$

□

Свертка функций $\varphi(t)$ и $f(t)$ на $\mathbb{R}_+$ определяется соотношением

$$(f * \varphi)(t) := \int (T^s f(t)) \, \varphi(s) \, s^{2\alpha+1} \, ds. \tag{2.10}$$

Свертка имеет смысл, если определен интеграл в правой части (2.10), в частности, когда $\varphi, f \in C_c(\mathbb{R}_+)$, причем тогда и свертка $f * \varphi$ принадлежит $C_c(\mathbb{R}_+)$. Из того, что $T^s f(t) = T^t f(s)$, легко видеть, что свертка коммутативна, т. е. $f * \varphi = \varphi * f$.

Лемма 2.2. *При преобразовании Бесселя свертка функций $f, \varphi \in C_c(\mathbb{R}_+)$ переходит в произведение, т. е.*

$$(\widehat{f * \varphi})(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) \, \widehat{\varphi}(\lambda). \tag{2.11}$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования и используя соотношение (2.7), получим, что

$$
\begin{aligned}
(\widehat{f*\varphi})(\lambda) &= \int \left(\int (T^s f(t))\, \varphi(s)\, s^{2\alpha+1}\, ds \right) j_\alpha(\lambda t)\, t^{2\alpha+1}\, dt \\
&= \int \left(\int (T^s f(t))\, j_\alpha(\lambda t)\, t^{2\alpha+1}\, dt \right) \varphi(s)\, s^{2\alpha+1}\, ds \\
&= \int \left(\int f(t)\, (T^s j_\alpha(\lambda t))\, t^{2\alpha+1}\, dt \right) \varphi(s)\, s^{2\alpha+1}\, ds \\
&= \int \widehat{f}(\lambda)\, j_\alpha(\lambda s)\, \varphi(s)\, s^{2\alpha+1}\, ds = \widehat{f}(\lambda)\, \widehat{\varphi}(\lambda).
\end{aligned}
$$

□

§ 3. Функции с ограниченным спектром и их свойства

В качестве средства приближения мы будем использовать функции из $L_{2,\alpha}$ с ограниченным спектром. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства этих функций.

Для любых функций $f \in L_{2,\alpha}$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ определена свертка $f * \varphi$ и при этом

$$
\|f*\varphi\|_{2,\alpha} \le \|f\|_{2,\alpha} \left(\int |\varphi(s)|\, s^{2\alpha+1}\, ds \right),
$$

в частности, $f * \varphi \in L_{2,\alpha}$. Действительно, используя обобщенное неравенство Минковского и свойство (2.9), получим, что

$$
\|f*\varphi\|_{2,\alpha} \le \int \|T^s f\|_{2,\alpha} |\varphi(s)|\, s^{2\alpha+1}\, ds \le \|f\|_{2,\alpha} \int |\varphi(s)|\, s^{2\alpha+1}\, ds.
$$

Лемма 3.1. *Пусть $f \in L_{2,\alpha}$. Для того чтобы отображение $\varphi \mapsto f * \varphi$ из $C_c(\mathbb{R}_+)$ в $L_{2,\alpha}$ продолжалось до непрерывного отображения из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\widehat{f}(\lambda)$ была существенно ограничена на $\mathbb{R}_+$, т. е. $\widehat{f}(\lambda) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство. Из того, что $C_c(\mathbb{R}_+)$ плотно в $L_{2,\alpha}$, следует, что равенство (2.11) справедливо и при $f \in L_{2,\alpha}$, $\varphi \in C_c(\mathbb{R}_+)$. Из равенства Парсеваля (см. (2.3)) вытекает, что

$$||f*\varphi||_{2,\alpha}^2 = A\int |\widehat{f}(\lambda)|^2\,|\widehat{\varphi}(\lambda)|^2\,\lambda^{2\alpha+1}\,d\lambda. \tag{3.1}$$

Пусть отображение $\varphi\mapsto f*\varphi$ из $C_c(\mathbb{R}_+)$ в $L_{2,\alpha}$ продолжается до непрерывного отображения из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$, которое будем также обозначать $\varphi\mapsto f*\varphi$ ($\varphi\in L_{2,\alpha}$). Проверим, что $\widehat{f*\varphi}=\widehat{f}\,\widehat{\varphi}$ для всех $\varphi, f\in L_{2,\alpha}$.

Для любой функции $\varphi\in L_{2,\alpha}$ найдется последовательность функций $\varphi_n\in C_c(\mathbb{R}_+)$, сходящаяся к φ в пространстве $L_{2,\alpha}$. Тогда $f*\varphi_n\to f*\varphi$ в $L_{2,\alpha}$ и $\widehat{f*\varphi_n}\to\widehat{f*\varphi}$ в $L_{2,\alpha}$. Но $\widehat{f*\varphi_n}=\widehat{f}\,\widehat{\varphi}_n$ и $\widehat{\varphi}_n\to\widehat{\varphi}$ в $L_{2,\alpha}$. Переходя, если необходимо, к некоторой подпоследовательности, можно считать, что $\widehat{\varphi}_n\to\widehat{\varphi}$ почти всюду, тогда и $\widehat{f}\widehat{\varphi}_n\to\widehat{f}\widehat{\varphi}$ почти всюду, следовательно, $\widehat{f*\varphi}=\widehat{f}\widehat{\varphi}$. Поэтому оператор умножения на функцию $\widehat{f}$ должен быть непрерывным оператором в $L_{2,\alpha}$, но для этого необходимо, чтобы $f\in L_\infty(\mathbb{R}_+)$.

Обратно, если $\widehat{f}(\lambda)\in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, то из (3.1) и из равенства Парсеваля следует, что при $\varphi\in C_c(\mathbb{R})$

$$||f*\varphi||_{2,\alpha}\le||\widehat{f}||_\infty||\varphi||_{2,\alpha}, \tag{3.2}$$

где

$$||\widehat{f}||_\infty=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}_+}\mathrm{vrai}\,|\widehat{f}(\lambda)|.$$

Из (3.2) вытекает, что оператор $\varphi\mapsto f*\varphi$ продолжается до непрерывного оператора из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$. Отметим, что равенство (2.11) остается справедливым для любого $\varphi\in L_{2,\alpha}$. □

Назовем функцию $f\in L_{2,\alpha}$ функцией с ограниченным спектром порядка $\nu>0$, если $\widehat{f}(\lambda)=0$ при $\lambda>\nu$. Множество всех таких функций обозначим $\mathcal{I}_\nu$. Очевидно, что функция f принадлежит $\mathcal{I}_\nu$ тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде

$$f(x)=\int_0^\nu \varphi(t)\,j_\alpha(xt)\,t^{2\alpha+1}\,dt$$

для некоторой функции $\varphi(t)\in L_{2,\alpha}$.

Определим функцию $G_\nu \in L_{2,\alpha}$ как функцию на $\mathbb{R}_+$, преобразование Бесселя которой равно

$$\widehat{G}_\nu(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0 \le \lambda \le \nu, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda > \nu. \end{cases}$$

Введем оператор

$$P_\nu : f \mapsto G_\nu * f.$$

По лемме 2.1 P_ν будет непрерывным оператором из $L_{2,\alpha}$ в $L_{2,\alpha}$. Из (2.11) следует, что P_ν является проектором пространства $L_{2,\alpha}$ на подпространство $\mathcal{I}_\nu$. Явный вид функций из $\mathcal{I}_\nu$ дается следующей теоремой типа Пэли — Винера, доказанной Н. И. Ахиезером в [14]:

Теорема 3.1. *Функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $\mathcal{I}_\nu$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *$f(x)$ — целая четная функция экспоненциального типа $\le \nu$;*
2) *$f(x)$ принадлежит пространству $L_{2,\alpha}$, т. е. $\int |f(x)|\, x^{2\alpha+1}\, dx < \infty$.*

Из теоремы 2.1 следует, что приведенное в этом параграфе определение класса $\mathcal{I}_\nu$ эквивалентно определению, данному в §1.

Résumé

Some problems of aproximations of functions on half-interval $[0, +\infty)$ in the L_2-metric with certain weight by entire functions of exponential growth are studied. Modules of continuity which used in problems are constructed with help of generalized translations of Bessel. Direct theorems of Jacson type are proved. Nikolskii — Besov type function spaces are defined and their description are obtained in terms of the best approximations.

Литература

[1] Butzer P. L., Behrens H. *Semi-groups of operators and approximation.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.

[2] Терехин А. П. *Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение*// Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Саратовского гос. ун-та, 1975. Вып. 2. С. 3–28.

[3] Левитан Б. М. *Теория операторов обобщенного сдвига.* М.: Наука, 1973.

[4] Löfström J., Peetre J. *Approximation theorems connected with generalized translations*// Math. Ann. 1969. V. 181. P. 255–268.

[5] Butzer P. L., Stens R. L., Wehrens M. *Higher order moduli of continuity based on the Jacobi translation operator and best approximation*// C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. V. 11. No. 2. P. 83–88.

[6] Потапов М. К., Федоров В. М. *О теоремах Джексона для обобщенного модуля гладкости*// Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1985. Т. 182. С. 291–295.

[7] Потапов М. К. *О применении оператора обобщенного сдвига в теории приближений*// Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механика. 1998. № 3. С. 38–48.

[8] Платонов С. С. *О пространствах Никольского — Бесова, построенных по обобщенным сдвигам Бесселя*// Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Пробл. матем. образования: Тезисы докл. междунар. конф., посвященной 75-летию чл.-корр. РАН Л. Д. Кудрявцева. М.: Изд-во РУДН, 1998. С. 50.

[9] Платонов С. С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые задачи теории приближений*// Международная конф. ¡¡Теория приближений и гарм. анализ¿¿ Россия, Тула, 26–29 мая 1998 г. Тула, 1998. С. 210–211.

[10] Левитан Б. М. *Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье*// Успехи мат. наук. 1951. Т. 6. № 2. С. 102–143.

[11] Никольский С. М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* М.: Наука, 1977.

[12] Trimeche K. *Transmutation operators and mean-periodic functions associated with differential operators*// Mathematical Reports. 1988. V. 4. Part 1. P. 1–282.

[13] Киприянов И. А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи.* М.: Наука. Физматлит, 1997.

[14] Ахиезер Н. И. *К теории спаренных интегральных уравнений*// Ученые записки Харьковского гос. ун-та. 1957. Т. 80. С. 5–21.

[15] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 2. М.: Мир, 1978.

[16] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: Наука, 1971.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: platonov@mainpgu.karelia.ru