Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 517.54

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ БЛОХА

В. В. Старков

В этой работе доказано, что интегральные средние

$$I_p(r,f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta,\ p \geq \frac{1}{2},\ r \in [0,1),$$

производных функций Блоха f в единичном круге могут расти при $r \to 1^-$ не медленнее, чем $c_k(1-r)^{1/2-p}(-\log(1-r))^k$, $c_k = const$, причем k здесь — любое натуральное число.

Если функция $\varphi(z)$ аналитична в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$, то *ее интегральным средним p-го порядка* $(p > 0)$ на окружности радиусом $r \in (0,1)$ называется число

$$I_p(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

Огромное количество работ посвящено исследованию этих интегральных средних в разных классах аналитических функций, в частности, во многих задачах важным является вопрос об асимптотическом поведении интегральных средних при $r \to 1-0$.

Например, в классе S однолистных и регулярных в Δ функций $g(z) = z + \ldots$ известна неулучшаемая оценка [1]:

$$I_p(r,g') = O(\frac{1}{(1-r)^{3p-1}}) \quad \text{при} \quad p \geq 2/5.$$

Эта работа является переводом с английского языка статьи, ранее опубликованной в журнале Ann. UMCS. Sec. A. 1999. V. 53. P. 217–237.

Поскольку произвольные функции класса S удовлетворяют точному неравенству $|g'(z)| \le (1+|z|)(1-|z|)^{-3}$, $z \in \Delta$, то в рассматриваемом случае можно говорить о падении на 1 порядка роста интегральных средних по сравнению с порядком роста производных класса S.

Говорят, что аналитическая в Δ функция f принадлежит *классу Блоха* $\mathcal{B}$, если она имеет конечную норму Блоха

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup_{z\in\Delta}[(1-|z|^2)|f'(z)|];$$

из этого определения функций Блоха вытекают точные оценки

$$|f'(z)| = O\left(\frac{1}{1-|z|}\right), \quad |f(z)| = O\left(\log\frac{1}{1-|z|}\right), \quad z \in \Delta.$$

Для самих функций Блоха тоже наблюдается падение порядка роста в результате интегрирования по окружности, поскольку (см. [2, 3]) для $f \in \mathcal{B}$ и $p > 0$ $I_p(r,f) = O\left(\left(\log\frac{1}{1-|z|}\right)^{p/2}\right)$, $r \to 1$. Однако для производных функций Блоха подобное свойство уже не имеет места. Из [4, теорема 4], в частности, следует,что существует функция $f \in \mathcal{B}$, для которой

$$I_p(r,f') \ge c^p(1-r)^{-p}, \quad 0 \le r < 1, \quad p > 0;$$

здесь $c = c(f)$ — положительная постоянная.

Обозначим $\mathcal{B}'$ подкласс класса $\mathcal{B}$, состоящий из локально однолистных функций. К необходимости исследования $I_p(r,f')$, $f \in \mathcal{B}'$, приводят некоторые задачи комплексного анализа (например, задача о стремлении к 0 тейлоровских коэффициентов функций из $\mathcal{B}'$ [5]).

В этой статье для любого $k = 0,1,2,\ldots$ и любого $p \ge 1/2$ строятся примеры функций $F_k \in \mathcal{B}'$, для которых

$$I_p(r,F_k') \ge \frac{c(k,p)}{(1-r)^{p-1/2}}\log^k\frac{1}{1-r}, \quad 1 > r \ge \rho_k(p) > 0,$$

где $c(k,p)$ — положительные числа, не зависящие от r. Это построение опирается на 2 леммы.

Для $M > 0$ обозначим $\mathcal{B}_M = \{f \in \mathcal{B} : \|f(z) - f(0)\|_{\mathcal{B}} \le M\}$.

Лемма 1. *Если $f \in \mathcal{B}_M$, $\omega(z)$ — аналитическая в Δ функция, $|\omega(z)| < 1$ для $z \in \Delta$, то функция $F = f \circ \omega \in \mathcal{B}_M$.*

Доказательство. По лемме Шварца (см. [6, с. 319–320]) для $z \in \Delta$ $|\omega'(z)| \le \dfrac{1-|\omega(z)|^2}{1-|z|^2}$. Поэтому

$$|F'(z)|(1-|z|^2) \le |f'(\omega(z))|(1-|\omega(z)|^2),$$

т. е. $\|F(z)-F(0)\|_{\mathcal{B}} \le \|f(z)-f(0)\|_{\mathcal{B}}$ и $F \in \mathcal{B}_M$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma(\theta) = r(\theta)e^{i\theta} : \theta \in [-\pi,\pi]\}$ — замкнутая кусочно гладкая кривая из Δ, симметричная относительно вещественной оси, причем $r(\theta) > 0$ и монотонно меняется на $[0,\pi]$ от r_0 до $r^0 > r_0$. Если f регулярна в Δ и $|f(z)|(1-|z|^2) \le 1$ в Δ, то при $\lambda > 1$*

$$\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz| \ge \\ \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_{|z|=r_0} |f(z)|^\lambda |dz| - \frac{16}{\lambda-1}((1-r^0)^{1-\lambda} - (1-r_0)^{1-\lambda})\right]. \tag{1}$$

При $\lambda = 1$

$$\int_\gamma |f(z)||dz| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{|z|=r_0} |f(z)||dz| - 4\sqrt{2}r_0 \log\frac{1-r_0}{1-r^0}.$$

Если $f(z) \ne 0$ в Δ, то при $\lambda \in (0,1)$

$$\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{|z|=r_0} |f(z)|^\lambda |dz| - \\ -\frac{4\sqrt{2}(1+\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}[(1-r_0)^{1-\lambda} - (1-r^0)^{1-\lambda}) - (1-\lambda)(r^0 - r_0)]. \tag{1'}$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $r(\theta)$ возрастает на $[0,\pi]$. Иначе можно перейти к рассмотрению интеграла $\displaystyle\int_{-\gamma} |f(-z)|^\lambda |dz|$, где кривая $-\gamma$ имеет параметризацию $-\gamma(\theta)$. Рассмотрим разбиение отрезка $[-\pi,\pi]$ на $2n$ равных отрезков: $0 < \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = \pi$, $0 = \theta_0 > \theta_{-1} > \ldots > \theta_{-n} = -\pi$. Обозначим $r_j = r(\theta_j)$, $j = -n,\ldots,n$; r_j возрастает с ростом $|j|$. Рассмотрим замкнутую кусочно гладкую кривую $\gamma^{(n)}$, образованную дугами окружностей

$$\{z = r_j e^{i\theta} : \theta \in [\theta_{j-1},\theta_j]\}, \quad j = -n+1, -n+2, \ldots, n,$$

и отрезками радиусов

$$\{z = re^{i\theta_{j-1}} : r \in [r_{j-1}, r_j]\}, \quad j = -n+1, -n+2, \ldots, n.$$

Обозначим $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $\Delta r_j = |r_j - r_{j-1}|$, $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $j = -n+1$, $-n+2, \ldots, n$,

$$\gamma_j = \{z \in \gamma : z = r(\theta)e^{i\theta},\ \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j]\},$$
$$\gamma_j^{(n)} = \{re^{i\theta} \in \gamma^{(n)} : \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j]\}.$$

Теми же символами $\gamma, \gamma^{(n)}, \gamma_j, \gamma_j^{(n)}$ будем обозначать соответствующие длины кривых. Из равномерной непрерывности $|f(z)|^\lambda$ в круге $K = \{z : |z| \le r^0\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что для любых $z', z'' \in K$, $|z' - z''| < \eta$ выполнено неравенство

$$||f(z')|^\lambda - |f(z'')|^\lambda| < \varepsilon. \tag{2}$$

Поскольку $\sqrt{2}|d\gamma(\theta)| \ge |dr(\theta)| + r(\theta)d\theta$ при $\theta \in [-\pi, \pi]$, то для любого фиксированного $\delta > 0$ и достаточно больших n

$$(\delta + \sqrt{2})\gamma_j \ge \Delta r_j + r_j\Delta\theta_j = \gamma_j^{(n)}, \quad j = -n+1, \ldots, n. \tag{3}$$

При достаточно большом n диаметры кривых γ_j и $\gamma_j^{(n)}$ станут меньше η. Отсюда, учитывая формулы (2) и (3), получим:

$$\begin{gathered}
(\delta + \sqrt{2})\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz| - \int_{\gamma^{(n)}} |f(z)|^\lambda |dz| = \\
= \sum_{j=1-n}^{n} \left[(\delta + \sqrt{2})\int_{\gamma_j} |f(z)|^\lambda |dz| - \int_{\gamma_j^{(n)}} |f(z)|^\lambda |dz|\right] = \\
= \sum_{j=1-n}^{n} [(\delta + \sqrt{2})\int\limits_{\gamma_j} (|f(z)|^\lambda - |f(z_j)|^\lambda)|dz| - \int\limits_{\gamma_j^{(n)}} (|f(z)|^\lambda - |f(z_j)|^\lambda)|dz| + \\
+ (\delta + \sqrt{2})|f(z_j)|^\lambda \gamma_j - |f(z_j)|^\lambda \gamma_j^{(n)}] \ge -\varepsilon[(\sqrt{2} + \delta)\gamma + \gamma^{(n)}].
\end{gathered}$$

При этом можно ε взять таким, чтобы последнее выражение было больше, чем $-\delta(\sqrt{2} - 1)\displaystyle\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz|$. Следовательно,

$$\sqrt{2}(\delta + 1)\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz| \ge \int_{\gamma^{(n)}} |f(z)|^\lambda |dz|. \tag{4}$$

Для параметра $t \in [0,1]$ рассмотрим семейство кривых $\gamma(n,t) = \{tz : z \in \gamma^{(n)}\}$; $\gamma(n,1) = \gamma^{(n)}$, $\gamma(n,0) = 0$.

$$\int_{\gamma(n,t)} |f(z)|^{\lambda}|dz| =$$
$$= t\sum_{j=1-n}^{n}\left(\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}|f(tr_je^{i\theta})|^{\lambda}r_jd\theta + \frac{1}{t}\int_{tr_{j-1}}^{tr_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda}|dr|\right) \geq$$
$$\geq tr_0\sum_{j=1-n}^{n}\left(\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}|f(tr_je^{i\theta})|^{\lambda}r_jd\theta + \frac{1}{tr_0}\int_{tr_{j-1}}^{tr_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda}|dr|\right) =$$
$$= tr_0 \times \sum_{j=1-n}^{n}\left(\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}|f(tr_je^{i\theta})|^{\lambda}d\theta - \right.$$
$$\left. - \int_0^t\frac{\lambda}{\tau}\left[\int_{\tau r_{j-1}}^{\tau r_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda-1}\frac{\partial|f|}{\partial\theta}(re^{i\theta_{j-1}})\frac{|dr|}{r}\right]d\tau\right) +$$
$$+ tr_0\sum_{j=1-n}^{n}\int_0^t\frac{\lambda}{\tau}\left[\int_{\tau r_{j-1}}^{\tau r_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda-1}\frac{\partial|f|}{\partial\theta}(re^{i\theta_{j-1}})\frac{|dr|}{r}\right]d\tau +$$
$$+ \sum_{j=1-n}^{n}\int_{tr_{j-1}}^{tr_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda}|dr|. \tag{5}$$

Первую из последних 3 сумм обозначим $I(t)$. Слагаемые 2-й и 3-й сумм при $t = 1$ обозначим B_j и A_j соответственно. При этом

$$I(t) = \int_0^t\frac{\lambda}{\tau}\sum_{J=1-n}^{n}\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}|f(\tau r_je^{i\theta})|^{\lambda-1}\frac{\partial|f|}{\partial r}(\tau r_je^{i\theta})\tau r_jd\theta - \right.$$
$$\left. - \int_{\tau r_{j-1}}^{\tau r_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda-1}\frac{\partial|f|}{\partial\theta}(re^{i\theta_{j-1}})\frac{|dr|}{r}\right]d\tau. \tag{6}$$

Утверждение леммы очевидно, если $f \equiv 0$; далее будем считать, что это не так. Тогда функция $f(z)$ может иметь лишь конечное множество нулей в круге K. И можно считать, что при фиксированном n существует конечное множество кривых $\gamma(n,t)$, на которых могут лежать эти нули (в противном случае вместо $f(z)$ рассмотрим $f(ze^{i\gamma})$ при малых $\gamma \in \mathbb{R}$). Далее рассматриваем те значения $t \in [0,1]$, для которых кривые $\gamma(n,t)$ свободны от нулей функции $f(z)$.

Для $z = re^{i\theta} \in \gamma(n,t)$ обозначим $\Phi(z) = \arg f(z)$. По условию Коши—Римана

$$r\frac{\partial|f|}{\partial r} = |f|\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \qquad r|f|\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -\frac{\partial|f|}{\partial\theta}.$$

Поэтому из (6) получаем:

$$I'(t) = \frac{\lambda}{t}\sum_{J=1-n}^{n}\left[\int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j}|f(tr_je^{i\theta})|^\lambda d\Phi(tr_je^{i\theta}) + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau r_{j-1}}^{\tau r_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^\lambda d\Phi(re^{i\theta_{j-1}})\right] = \frac{\lambda}{t}\int_a^b|f(\gamma(\xi))|^\lambda d\Phi(\gamma(\xi)),$$

где $\gamma(\xi)$ — использованная нами кусочно гладкая параметризация кривой $\gamma(n,t)$, задающая на $\gamma(n,t)$ положительное направление обхода; параметр ξ меняется на некотором отрезке $[a,b]$. Обозначим

$$L = L(\xi) = x(\xi) + iy(\xi) = |f(\gamma(\xi))|^{\lambda/2}e^{i\Phi(\gamma(\xi))},$$

тогда

$$x(\xi)dy(\xi) - y(\xi)dx(\xi) = |f(\gamma(\xi))|^\lambda d\Phi(\gamma(\xi)),$$

и по формуле Грина

$$I'(t) = \frac{\lambda}{t}\int_L xdy - ydx = \frac{2\lambda}{t}S(n,t),$$

где $S(n,t)$ — площадь поверхности (вообще говоря, не однолистной), на которую функция

$$\begin{cases} |f(z)|^{\lambda/2}e^{i\Phi(z)} \quad \text{при} \quad f(z)\neq 0, \\ 0 \quad \text{при} \quad f(z) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

отображает компакт с границей $\gamma(n,t)$.

Обозначим

$$r_0t\mathcal{I}(t) = r_0t\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_0te^{i\theta})|^\lambda d\theta = \int_{|z|=r_0t}|f(z)|^\lambda|dz|.$$

Аналогично предыдущему

$$\mathrm{I}'(t) = \lambda\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_0te^{i\theta})|^{\lambda-1}\frac{\partial|f|}{\partial r}(r_0te^{i\theta})r_0d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{t}\int_{-\pi}^{\pi}|f(r_0te^{i\theta})|^{\lambda}d\Phi(r_0te^{i\theta}) = \frac{2\lambda}{t}S(r_0t),$$

где $S(r_0t)$ — площадь поверхности, на которую функция (7) отображает круг $\{z : |z| \le r_0t\}$. Поэтому неравенство $I'(t) \ge \mathcal{I}'(t)$ справедливо для всех $t \in [0,1]$, исключая, может быть, конечное множество значений t. Отсюда и из непрерывности $I(t)$ и $\mathcal{I}(t)$ в $[0,1]$ получаем:

$$I(1) - I(0) \ge \mathcal{I}(1) - \mathcal{I}(0).$$

Но $\mathcal{I}(0) = I(0) = 2\pi|f(0)|^{\lambda}$, т. к. при достаточно малых r величина

$$|f(re^{i\theta})|^{\lambda}\left|\frac{\partial\Phi}{\partial r}(re^{i\theta})\right| \le C = const;$$

поэтому из условий Коши—Римана

$$\left|\int_0^t \frac{1}{\tau}\int_{\tau r_{j-1}}^{\tau r_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda-1}\frac{\partial|f|}{\partial\theta}(re^{i\theta_{j-1}})\frac{dr}{r}d\tau\right| =$$
$$= \left|\int_0^t \frac{1}{\tau}\int_{\tau r_{j-1}}^{\tau r_j}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda}\frac{\partial\Phi}{\partial r}(re^{i\theta_{j-1}})drd\tau\right| \le C\int_0^t (r_j - r_{j-1})d\tau.$$

Последний интеграл стремится к 0 при $t \to 0$. Следовательно, $I(1) \ge \mathcal{I}(1)$. Тогда

$$\int_{\gamma^{(n)}}|f(z)|^{\lambda}|dz| \ge r_0I(1) + \sum_{j=1-n}^{n}(A_j + B_j) \ge r_0\mathcal{I}(1) + \sum_{j=1-n}^{n}B_j =$$
$$= \int_{|z|=r_0}|f(z)|^{\lambda}|dz| + \sum_{j=1-n}^{n}B_j. \tag{8}$$

Заметим, что

$$\left|\frac{\partial|f|}{\partial\theta}\right| = \left|\frac{\partial e^{\mathrm{Re}\ \log f}}{\partial\theta}\right| \le |zf'(z)| \le \frac{4|z|}{(1-|z|^2)^2}$$

(см. [7]). Поэтому для получения оценки $|B_j|$ достаточно оценить

$$B = r_0\int_0^1 \frac{\lambda}{\tau}\int_{\tau\rho_1}^{\tau\rho_2}|f(re^{i\theta_{j-1}})|^{\lambda-1}|f'(re^{i\theta_{j-1}})|drd\tau, \quad 0 < \rho_1 < \rho_2 < 1.$$

Из условия леммы 2 следует, что

$$B \le r_0 \int_0^1 \frac{\lambda}{\tau} \int_{\tau\rho_1}^{\tau\rho_2} \frac{4}{(1-r)^{\lambda+1}} dr d\tau =$$
$$= 4r_0 \int_0^1 \frac{1}{t} \left[\frac{1}{(1-t\rho_2)^\lambda} - \frac{1}{(1-t\rho_1)^\lambda} \right] dt.$$

Обозначим $\varphi(t)$ подинтегральную функцию и разложим ее в ряд по степеням t.

$$\varphi(t) = \lambda(\rho_2 - \rho_1) + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}(\rho_2^2 - \rho_1^2)t + \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}{3!}(\rho_2^3 - \rho_1^3)t^2 + \ldots$$

Радиус сходимости ряда больше 1, поэтому

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \lambda(\rho_2 - \rho_1) + \ldots + \frac{\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)}{k!} \frac{\rho_2^k - \rho_1^k}{k} + \ldots$$

Но

$$\frac{\rho_2^k - \rho_1^k}{k} = \frac{\rho_2^k - \rho_1^k}{k+1} \frac{k+1}{k} \le \frac{2}{k+1} \frac{\rho_2^{k+1} - \rho_1^{k+1}}{\rho_2}.$$

Следовательно, если $\lambda > 1$, то

$$\int_0^1 \varphi(t)dt \le \frac{2}{\rho_2(\lambda-1)} \left[\frac{(\lambda-1)\lambda}{2!}(\rho_2^2 - \rho_1^2) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{(\lambda-1)\lambda\ldots(\lambda+k-1)}{(k+1)!}(\rho_2^{k+1} - \rho_1^{k+1}) + \ldots \right] = \frac{2}{\rho_2(\lambda-1)} \times$$
$$\times \left[((1-\rho_2)^{1-\lambda} - 1 - (\lambda-1)\rho_2) - ((1-\rho_1)^{1-\lambda} - 1 - (\lambda-1)\rho_1) \right] \le$$
$$\le \frac{2}{\rho_2(\lambda-1)}((1-\rho_2)^{1-\lambda} - (1-\rho_1)^{1-\lambda}),$$

т. е.

$$|B| \le 4r_0 \int_0^1 \varphi(t)dt \le \frac{8r_0}{\rho_2(\lambda-1)}((1-\rho_2)^{1-\lambda} - (1-\rho_1)^{1-\lambda}).$$

Поэтому

$$\left| \sum_{j=1-n}^{n} B_j \right| \le \sum_{j=1-n}^{n} |B_j| \le \frac{16}{\lambda-1} \sum_{j=1}^{n} ((1-r_j)^{1-\lambda} - (1-r_{j-1})^{1-\lambda}) =$$

$$= \frac{16}{\lambda - 1}((1 - r^0)^{1-\lambda} - (1 - r_0)^{1-\lambda}),$$

и из (8) имеем:

$$\int_{\gamma^{(n)}} |f(z)|^\lambda |dz| \geq \int_{|z|=r_0} |f(z)|^\lambda |dz| - \frac{16}{\lambda - 1}((1 - r^0)^{1-\lambda} - (1 - r_0)^{1-\lambda}).$$

Тогда из (4) получаем, что

$$\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}(\delta + 1)}[\int_{|z|=r_0} |f(z)|^\lambda |dz| - \frac{16}{\lambda - 1}((1 - r^0)^{1-\lambda} - (1 - r_0)^{1-\lambda})].$$

В силу произвольности положительного δ отсюда получаем утверждение леммы при $\lambda > 1$.

Если $\lambda = 1$, то

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = \log \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_2}, \quad B \leq 4r_0 \log \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_2}.$$

Поэтому $\left| \sum_{j=1-n}^{n} B_j \right| \leq 8r_0 \log \frac{1 - r_0}{1 - r^0}$ и

$$\int_\gamma |f(z)||dz| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{|z|=r_0} |f(z)||dz| - 4\sqrt{2} r_0 \log \frac{1 - r_0}{1 - r^0}.$$

Пусть теперь $\lambda \in (0, 1)$ и $f(z) \neq 0$ в Δ. Тогда функция $f_\lambda(z) = f^\lambda(z)$ аналитична в Δ, $|f_\lambda(z)|(1 - |z|^2)^\lambda \leq 1$. А для таких функций K. J. Wirts [7] доказал, что $|f'_\lambda(z)|(1 - |z|^2)^{\lambda+1} \leq 2(\lambda + 1)$. Поэтому

$$B = r_0 \int_0^1 \frac{1}{\tau} \int_{\tau\rho_1}^{\tau\rho_2} |f'_\lambda(re^{i\theta_{j-1}}| dr d\tau \leq 2r_0(\lambda + 1) \times$$

$$\times \int_0^1 \frac{1}{\tau} \int_{\tau\rho_1}^{\tau\rho_2} \frac{dr d\tau}{(1 - r)^{\lambda+1}} = \frac{2r_0(\lambda + 1)}{\lambda} \int_0^1 \frac{1}{t}[(1 - t\rho_2)^{-\lambda} - (1 - t\rho_1)^{-\lambda}] dt.$$

В качестве оценки последнего интеграла, как и в случае $\lambda > 0$, получим величину

$$\frac{2}{\rho_2(1 - \lambda)}((1 - \rho_1)^{1-\lambda} - (1 - \rho_2)^{1-\lambda} + (1 - \lambda)(\rho_1 - \rho_2)),$$

т. е.

$$B \leq \frac{4r_0(1+\lambda)}{\rho_2\lambda(1-\lambda)}((1-\rho_1)^{1-\lambda} - (1-\rho_2)^{1-\lambda} + (1-\lambda)(\rho_1-\rho_2)).$$

Поэтому

$$\left|\sum_{j=1-n}^{n} B_j\right| \leq \frac{8(1+\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}((1-r_0)^{1-\lambda} - (1-r^0)^{1-\lambda} - (1-\lambda)(r^0-r_0)).$$

Тогда из (4) и (8) получаем, что

$$\int_\gamma |f(z)|^\lambda |dz| \geq \frac{1}{\sqrt{2}(\delta+1)}\left[\int_{|z|=r_0} |f(z)|^\lambda |dz| - \frac{8(1+\lambda)}{\lambda(1-\lambda)}((1-r_0)^{1-\lambda} - \right.$$
$$\left. -(1-r^0)^{1-\lambda} - (1-\lambda)(r^0-r_0))\right].$$

Отсюда, в силу произвольности $\delta > 0$, получаем утверждение леммы при $\lambda \in (0,1)$. Лемма 2 доказана. □

Замечание. Лемма 2 остается справедливой и в случае монотонности $r(\theta)$ в $[\theta_0, \theta^0]$ и в $[\theta^0, \theta_0 + 2\pi]$. Она очевидным образом обобщается и на случай k-кусочной монотонности непрерывной функции $r(\theta)$; при этом в случае $\lambda > 1$ коэффициент $16/(\lambda-1)$ из леммы 2 нужно заменить на $8k/(\lambda-1)$, аналогично и для $\lambda \in (0,1]$.

Обозначим $f(z) = \log(1-z) \in \mathcal{B}_2$, $\omega(z) = \exp\left(-\pi\frac{1+z}{1-z}\right)$. Так как $|\omega| < 1$ в Δ, то можно определить аналитические в Δ функции

$$F_0 = f \circ \omega,\ F_k = F_{k-1} \circ \omega, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Определенные формулой (9) функции $F_k \in \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}'$. Для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ и любого $p > 1/2$*

$$I_p(r, F_k') \geq \frac{c(k,p)}{(1-r^2)^{p-1/2}} \log^k \frac{1}{1-r^2} \quad \text{при} \quad 1 > r \geq \rho_k(p) > 0;$$

при $p > 1$

$$c(k,p) = \frac{c(0,p)}{k!(2^{(k+3)/2}\sqrt{\pi}10^p)^k}, \quad c(0,p) = \frac{ce^{-\pi p}}{2\pi 10^{p-1}}\left(\frac{2}{5}\right)^{p-1/2},$$

$$0 < c = c(p) = \inf_{r\in[0,1)} [(1-r)^{1-p} \int_0^{2\pi} |1 - re^{it}|^{-p} dt], \quad \rho_0(p) = 1/\sqrt{2}.$$

При $p \in (1/2, 1]$

$$c(k,p) = \frac{c(0,p)}{(10\sqrt{\pi})^k k!}, c(0,p) = \frac{c(p)e^{-\pi}}{3(2\pi)^{2-p}(2p-1)},$$
$$c(p) = \inf_{r\in[0,1)} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-re^{it}|^p} > 0.$$

При $p = 1/2$ *имеем:* $I_{1/2}(r, F'_k) \geq \dfrac{c(0,1/2)}{(10\sqrt{\pi})^k (k+1)!} \log^{k+1} \dfrac{1}{1-r^2}$, $c(0,1/2)$ *определяется той же формулой, что и при* $p \in (1/2, 1]$.

Доказательство. Из определения функций F_k следует, что все они из $\mathcal{B}'$. Из леммы 1 вытекает, что $F_k \in \mathcal{B}_2$ для любого k, так как $\log(1-z) \in \mathcal{B}_2$.

Для натуральных N положим $r_N = \dfrac{N}{\sqrt{N^2+1}}$. и $\delta_N = \arccos r_N$. Тогда

$$\mathrm{Re}\, \frac{1 + r_N e^{i\delta_N}}{1 - r_N e^{i\delta_N}} = \frac{1 - r_N^2}{1 - 2r_N \cos\delta_N + r_N^2} = 1,$$
$$\mathrm{Im}\, \frac{1 + r_N e^{i\delta_N}}{1 - r_N e^{i\delta_N}} = \frac{2r_N \sin\delta_N}{1 - 2r_N \cos\delta_N + r_N^2} = \frac{2r_N\sqrt{1-r_N^2}}{1-r_N^2} = 2N.$$

Для целого $m \in [0, N]$ обозначим через $\delta_m \in [0, \pi]$ решение уравнения

$$\mathrm{Im}\, \frac{1 + r_N e^{i\delta_m}}{1 - r_N e^{i\delta_m}} = \frac{2r_N \sin\delta_m}{1 - 2r_N \cos\delta_m + r_N^2} = 2m.$$

Оно приводится к квадратному уравнению относительно $\gamma = \cos\delta_m$:

$$\gamma^2(4r_N^2 m^2 + r_N^2) - 4m^2 r_N (1 + r_N^2)\gamma + m^2(1 + r_N^2)^2 - r_N^2 = 0.$$

Из этого уравнения получаем:

$$\gamma = \cos\delta_m = \frac{2m^2}{1+4m^2} \frac{1+2N^2}{N\sqrt{1+N^2}} - \frac{1}{1+4m^2}\sqrt{1 - \frac{m^2}{N^2(N^2+1)}}.$$

Введем еще одно обозначение

$$x_m = \operatorname{Re}\frac{1+r_Ne^{i\delta_m}}{1-r_Ne^{i\delta_m}} = \frac{1-r_N^2}{1-2r_N\cos\delta_m + r_N^2} =$$
$$= \frac{4m^2+1}{2N^2+1+\sqrt{(2N^2+1)^2-4m^2-1}}.$$

1) Сначала рассмотрим случай $p>1$. Доказательство проводим методом математической индукции по $k=0,1,2,\ldots$

а) $k=0$. В принятых обозначениях

$$I_p(r_N,F_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_0'(r_Ne^{it})|^p dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|F_0'(r_Ne^{it})|^p dt \geq$$
$$\geq \frac{1}{\pi}\sum_{m=N}^{1}\int_{\delta_m}^{\delta_{m-1}}|f'[\omega(r_Ne^{it})]|^p|\omega(r_ne^{it})|^p\left|\frac{2\pi}{(1-r_Ne^{it})^2}\right|^p dt.$$

Заметим, что при $t\in[\delta_m,\delta_{m-1}]$ $|1-r_Ne^{it}|\leq|1-r_Ne^{i\delta_{m-1}}|$ и на этом отрезке $R(t)=|\omega(r_Ne^{it})|\geq R_m=e^{-\pi x_m}$, кроме того,

$$|1-\omega(r_Ne^{it})| = |1-R(t)e^{i\theta(t)}| \leq |1-R_me^{i\theta(t)}| + (R(t)-R_m)$$
$$\leq |1-R_me^{i\theta}| + (1-R_m) \leq 2|1-R_me^{i\theta}|.$$

Отрезок $[\delta_m,\delta_{m-1}]\ni t$ отображается посредством $\omega(r_Ne^{it})$ в один виток спирали $\omega=R(t)e^{i\theta(t)}=\rho(\theta)e^{i\theta}$, $\theta\in[-2\pi m,-2\pi(m-1)]$, при этом $\rho(\theta)$ возрастает от R_m до R_{m-1}. Элемент длины этой спирали $|d\omega|=|d(\rho(\theta)e^{i\theta})|$ не менее элемента длины $|d(R_me^{i\theta})|$ окружности $\{|\omega|=R_m\}$. Учитывая все вышесказанное, получим, что

$$r_NI_p(r_N,F_0) \geq \frac{1}{\pi}\sum_{m=N}^{1}\frac{(2\pi)^{p-1}R_m^{p-1}}{|1-r_Ne^{i\delta_{m-1}}|^{2(p-1)}2^p}\int_{|\omega|=R_m}\frac{|d\omega|}{|1-\omega|^p}.$$

Поскольку при $p>1$ (см., например, [8, с. 157])

$$u(r) = (1-r)^{p-1}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-re^{it}|^p}\xrightarrow[r\to1]{}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right),$$

то $u(r)>0$ и непрерывна на $[0,1]$ $\left(u(1)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right)$.

Поэтому $u(r) \geq c > 0$ при $r \in [0,1]$. Следовательно,

$$r_N I_p(r_N, F_0) \geq \frac{c\pi^{p-2}}{2} \sum_{m=N}^{1} \frac{R_m^p}{|1 - r_N e^{i\delta_{m-1}}|^{2(p-1)}(1-R_m)^{p-1}}.$$

Для всех целых $m \in [0, N]$

$$\frac{x_{m-1}}{x_m} = \frac{4(m-1)^2+1}{4m^2+1} \frac{2N^2+1+\sqrt{(2N^2+1)^2-(4m^2+1)}}{2N^2+1+\sqrt{(2N^2+1)^2-4(m-1)^2-1}} =$$

$$= \left(1 - \frac{8m-4}{4m^2+1}\right) \frac{1+\sqrt{1-\dfrac{4m^2+1}{(2N^2+1)^2}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{4(m-1)^2+1}{(2N^2+1)^2}}} \geq \left(1 - \frac{8m-4}{4m^2+1}\right)\frac{1}{2} > \frac{1}{10}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|1 - r_N e^{i\delta_{m-1}}|^2} = \frac{x_{m-1}}{1-r_N^2} \geq \frac{x_m}{1-r_N^2}\frac{1}{10} \tag{10}$$

и

$$r_N I_p(r_N, F_0) \geq \frac{c\pi^{p-2}}{2 10^{p-1}} \frac{1}{(1-r_N^2)^{p-1}} \sum_{m=1}^{N} \frac{R_m^p x_m^{p-1}}{(1-R_m)^{p-1}}.$$

Поскольку $x_m \in [0,1]$, то $R_m \geq e^{-\pi}$, $1 - e^{-\pi x_m} \leq \pi x_m$. Следовательно,

$$r_N I_p(r_N, F_0) \geq \frac{c\pi^{p-2}e^{-\pi p}}{2 10^{p-1}\pi^{p-1}} \frac{N}{(1-r_N^2)^{p-1}} = \frac{ce^{-\pi p}}{2\pi 10^{p-1}} \frac{r_N}{(1-r_N^2)^{p-1/2}}.$$

Из возрастания по $r \in [0,1)$ интегральных средних $I_p(r,\varphi)$ для любой аналитической в Δ функции φ (см., например, [9, теорема 3.1]) следует, что $I_p(r, F_0) \geq I_p(r_N, F_0)$ для $r \in [r_N, r_{N+1}]$. Поэтому для $r \in [r_N, r_{N+1}]$

$$\begin{aligned} I_p(r, F_0) &\geq \frac{ce^{-\pi p}}{2\pi 10^{p-1}} \frac{1}{(1-r^2)^{p-1/2}} \left(\frac{1-r_{N+1}^2}{1-r_N^2}\right)^{p-1/2} \geq \\ &\geq \frac{ce^{-\pi p}}{2\pi 10^{p-1}} \left(\frac{2}{5}\right)^{p-1/2} \frac{1}{(1-r^2)^{p-1/2}} \end{aligned} \tag{11}$$

при $N \geq 1$. Из произвольности натурального N вытекает справедливость неравенства (11) для $r \in [1/\sqrt{2}, 1)$.

b) Пусть утверждение теоремы доказано для некоторого целого $k \geq 0$, т. е.

$$I_p(r, F'_k) \geq \frac{c_k}{(1-r^2)^{p-1/2}} \log^k \frac{1}{1-r^2} \quad \text{при} \quad 1 > r \geq \rho_k \in (0,1). \qquad (12)$$

Докажем справедливость этого утверждения теоремы для $k+1$.

При $m = 1, \ldots, N$ обозначим $L_m =$

$$= \{\omega(r_N e^{it}) : t \in [\delta_m, \delta_{m-1}]\}, \quad L_{-m} = \{\omega(r_N e^{it}) : t \in [-\delta_m, -\delta_{m-1}]\},$$

L_m — спиралеобразная кривая, делающая один полный оборот вокруг точки $z = 0$, при $t \in [\delta_m, \delta_{m-1}]$ величина $|\omega(r_N e^{it})|$ строго возрастает по t; L_{-m} симметрична кривой L_m относительно вещественной оси. Поэтому при каждом $m = 1, \ldots, N$ можно представить $L_m \cup L_{-m}$ в виде объединения двух простых кусочно гладких замкнутых кривых $\Gamma_m \cup \Gamma'_m$, Γ_m составлена из верхней части кривой L_m и нижней части L_{-m}, а $\Gamma'_m = L_m \cup L_{-m} \setminus \Gamma_m$. Обе кривые Γ_m и Γ'_m удовлетворяют условиям леммы 2 с $r_0 \geq R_m$ и $r^0 \leq R_{m-1}$. Отсюда с учетом (10) и (1) получаем:

$$r_N I_p(r_N, F'_{k+1}) \geq \frac{r_N}{2\pi} \sum_{m=N}^{1-N} \int_{\delta_m}^{\delta_{m-1}} |F'_{k+1}(r_N e^{it})|^p dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=N}^{1-N} \int_{\delta_m}^{\delta_{m-1}} |F'_k[\omega(r_N e^{it})]|^p |\omega'(r_N e^{it})|^{p-1} |d\omega(r_N e^{it})| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{N} \frac{(2\pi R_m)^{p-1}}{|1 - r_N e^{i\delta_{m-1}}|^{2(p-1)}} \int_{L_m \cup L_{-m}} |F'_k(\omega)|^p |d\omega| \geq$$

$$\geq \frac{(2\pi)^{p-2}}{10^{p-1}(1-r_N^2)^{p-1}} \sum_{m=1}^{N} (x_m R_m)^{p-1} \int_{\Gamma_m \cup \Gamma'_m} |F'_k(\omega)|^p |d\omega| \geq$$

$$\geq \frac{(2\pi)^{p-2}\sqrt{2}}{10^{p-1}(1-r_N^2)^{p-1}} \sum_{m=1}^{N} (x_m R_m)^{p-1} [2\pi R_m I_p(R_m, F'_k) -$$

$$- \frac{2^{p+4}}{p-1} ((1-R_{m-1})^{1-p} - (1-R_m)^{1-p})],$$

так как по лемме 1 функции $F_k \in \mathcal{B}_\in$, т. е. $|F'_k(z)|(1-|z|^2) \leq 2$ при $z \in \Delta$.

Поскольку $\dfrac{x_{m-1}}{x_m} > \dfrac{1}{10}$ при целых $m \in [0, N]$, то

$$x_m < 10x_{m-1} \Longrightarrow \pi(x_m - x_{m-1}) < 9\pi x_{m-1} < 9(e^{\pi x_{m-1}} - 1) \Longrightarrow$$

$$R_{m-1}\pi(x_m - x_{m-1}) < 9(1 - R_{m-1}) \Longleftrightarrow \frac{1 - R_{m-1}(1 - \pi(x_m - x_{m-1}))}{1 - R_{m-1}} <$$

$$< 10 \quad \Longrightarrow \frac{1 - R_{m-1}e^{-\pi(x_m - x_{m-1})}}{1 - R_m - 1} < 10 \Longleftrightarrow \frac{1 - R_m}{1 - R_{m-1}} < 10.$$

Поэтому (см. (12)) при $R_m \in (\rho_k, 1)$

$$2\pi R_m I_p(R_m, F_k') - \frac{2^{p+4}}{p-1}((1 - R_{m-1})^{1-p} - (1 - R_m)^{1-p}) >$$

$$> \frac{2\pi c_k R_m}{(1 - R_m^2)^{p-1/2}} \log^k \frac{1}{1 - R_m^2} - \frac{2^{p+4}}{p-1}((1 - R_{m-1})^{1-p} - (1 - R_m)^{1-p}) =$$

$$= (1 - R_m^2)^{1-p}\left[\frac{2\pi c_k R_m}{\sqrt{1 - R_m^2}} \log^k \frac{1}{1 - R_m^2} - \frac{2^{p+4}}{p-1}\left(\left(\frac{1 - R_m}{1 - R_{m-1}}\right)^{p-1} - 1\right)\right] >$$

$$> (1 - R_m^2)^{1-p}\left[\frac{2\pi c_k R_m}{\sqrt{1 - R_m^2}} \log^k \frac{1}{1 - R_m^2} - \frac{2^{p+4}}{p-1} 10^{p-1}\right] >$$

$$> \frac{\pi c_k R_m \log^k \dfrac{1}{1 - R_m^2}}{(1 - R_m^2)^{p-1/2}}, \tag{13}$$

если R_m достаточно близко к 1, т. е. $R_m > 1 - \varepsilon_k \geq \rho_k,\ \varepsilon_k \in (0, 1)$.

$$R_m > 1 - \varepsilon_k \iff x_m < \frac{1}{\pi} \log \frac{1}{1 - \varepsilon_k} = 2\eta_k^2 \ (0 < \eta_k < 1) \iff$$

$$\iff \frac{4m^2 + 1}{2N^2 + 1 + \sqrt{(2N^2 + 1)^2 - 4m^2 - 1}} \leq 2\eta_k^2 \iff$$

$$\iff 4m^2 + 1 \leq (2N^2 + 1)4\eta_k^2 - 4\eta_k^4,$$

последнее же неравенство выполнено при $m \leq N\eta_k$, если $N > 1/(2\eta_k)$. Далее будем считать N достаточно большим ($N \geq 2/\eta_k^2$), тогда для $1 \leq m \leq N\eta_k$ выполнено неравенство (13). Поэтому при $N \geq 2/\eta_k^2$

$$r_N I_p(r_N, F_{k+1}') \geq \frac{\pi^{p-1} c_k}{\sqrt{2}5^{p-1}(1 - r_N^2)^{p-1}} \sum_{m=1}^{N\eta_k} \frac{x_m^{p-1} R_m^p}{(1 - R_m^2)^{p-1/2}} \log^k \frac{1}{1 - R_m^2}.$$

Как отмечено выше, $1 - R_m^2 \le 2\pi x_m$ для всех m, кроме того, $R_m > 1 - \varepsilon_k$ при $m \in [1, N\eta_k]$, следовательно,

$$r_N I_p(r_N, F'_{k+1}) \ge \frac{c_k(1-\varepsilon_k)^p}{2\sqrt{\pi}10^{p-1}(1-r_N^2)^{p-1}} \sum_{m=1}^{N\eta_k} \frac{1}{\sqrt{x_m}} \log^k \frac{1}{2\pi x_m}.$$

Поскольку x_m растут с ростом m, то слагаемые последней суммы убывают по m (можно считать η_k достаточно малым числом, тогда $4\pi x_m < 1$). Поэтому

$$r_N I_p(r_N, F'_{k+1}) \ge \frac{c_k(1-\varepsilon_k)^p}{2\sqrt{\pi}10^{p-1}(1-r_N^2)^{p-1}} \int_1^{N\eta_k} \frac{1}{\sqrt{x_m}} \log^k \frac{1}{2\pi x_m} dm.$$

В этом интеграле сделаем замену переменной

$$x_m = \frac{(2N^2+1)u}{1+\sqrt{1-u}}, \quad u = \frac{4m^2+1}{(2N^2+1)^2}, \tag{14}$$
$$u \in \left[\frac{5}{(2N^2+1)^2}, \frac{4(N\eta_k)^2+1}{(2N^2+1)^2}\right] = [A, B],$$

тогда $2m = \sqrt{(2N^2+1)^2u - 1} \le (2N^2+1)\sqrt{u}$ и $dm = \frac{(2N^2+1)^2}{8m} du \ge$ $\ge \frac{2N^2+1}{4\sqrt{u}} du$. Следовательно,

$$\int_1^{N\eta_k} \frac{1}{\sqrt{x_m}} \log^k \frac{1}{2\pi x_m} dm \ge$$
$$\ge \int_A^B \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-u}}}{\sqrt{(2N^2+1)u}} \frac{2N^2+1}{4\sqrt{u}} \log^k \frac{1+\sqrt{1-u}}{2\pi(2N^2+1)u} du \ge$$
$$\ge \frac{\sqrt{2N^2+1}}{4} \int_A^B \log^k \frac{1}{2\pi(2N^2+1)u} \frac{du}{u} =$$
$$= \frac{\sqrt{2N^2+1}}{4(k+1)} \log^{k+1} \frac{1}{2\pi(2N^2+1)u} \Bigg|_{u=B}^{u=A} =$$
$$= \frac{\sqrt{2N^2+1}}{4(k+1)} \left[\log^{k+1} \frac{2N^2+1}{10\pi} - \log^{k+1} \frac{2N^2+1}{2\pi(4N^2\eta_k^2+1)}\right] \ge$$
$$\ge \frac{\sqrt{2N^2+1}}{4(k+1)} \log^{k+1} \frac{4N^2\eta_k^2+1}{5},$$

так как при $a > b > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство $a^k - b^k \geq (a-b)^k$. А поскольку N взято достаточно большим ($N\eta_k^2 \geq 2$), то

$$\int_1^{N\eta_k} \frac{1}{\sqrt{x_m}} \log^k \frac{1}{2\pi x_m} dm \geq \frac{\sqrt{N^2+1}}{4(k+1)} \log^{k+1} \sqrt{N^2+1} = \\ = \frac{\log^{k+1} \dfrac{1}{1-r_N^2}}{4(k+1)2^{k+1}\sqrt{1-r_N^2}}.$$

Таким образом, для достаточно больших номеров N

$$r_N I_p(r_N, F'_{k+1}) \geq \frac{c_k(1-\varepsilon_k)^p}{8\sqrt{\pi}10^{p-1}(k+1)2^{k+1}} \frac{1}{(1-r_N^2)^{p-1/2}} \log^{k+1} \frac{1}{1-r_N^2}.$$

Если теперь $r \in [r_N, r_{N+1}]$, $N\eta_k^2 \geq 2$, то

$$r I_p(r, F'_{k+1}) \geq r_N I_p(r_N, F'_{k+1}) \geq \\ \geq \frac{c_k(1-\varepsilon_k)^p c'}{8\sqrt{\pi}10^{p-1}(k+1)2^{k+1}} \frac{\log^{k+1} \dfrac{1}{1-r^2}}{(1-r^2)^{p-1/2}}, \tag{15}$$

где

$$c' = c'(\eta_k) = \min_{N \geq 2/\eta_k^2} \left(\frac{1-r_{N+1}^2}{1-r_N^2}\right)^{p-1/2} \left(\frac{\log(1-r_N^2)}{\log(1-r_{N+1}^2)}\right)^{k+1} \underset{\eta_k \to 0}{\longrightarrow} 1.$$

В приведенных рассуждениях ε_k и η_k можно взять сколь угодно близкими к 0, поэтому можно считать, что $c'(\eta_k)(1-\varepsilon_k)^p > 8/10$. Тогда

$$I_p(r, F'_{k+1}) \geq \frac{c_k}{2\sqrt{\pi}10^p(k+1)2^{k+1}} \frac{1}{(1-r^2)^{p-1/2}} \log^{k+1} \frac{1}{1-r^2}$$

при r, достаточно близких к 1, т. е. при $r \geq \rho_{k+1} \geq 1/2$.

Это завершает доказательство теоремы в случае $p > 1$.

2) Пусть $1/2 \leq p < 1$. Далее будем использовать обозначения пункта 1). Доказательство снова проводим индукцией по $k = 0, 1, \ldots$ При $N \geq 1$

$$I_p(r_N, F'_0) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N} \int_{\delta_m}^{\delta_{m-1}} |F'_0(r_N e^{it})|^p dt.$$

При $t \in [\delta_m, \delta_{m-1}]$ справедливы неравенства $|\omega(r_N e^{it})| \le R_{m-1}$, $|1-r_N e^{it}|^{-2} \le |1-r_N e^{i\delta_m}|^{-2} = \dfrac{x_m}{1-r_N^2}$. Поэтому аналогично случаю $p>1$ получим

$$r_N I_p(r_N, F_0') \ge \frac{(1-r_N^2)^{1-p}}{2\pi^{2-p}} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{(x_m R_{m-1})^{1-p}} \int_{|\omega|=R_m} \frac{|d\omega|}{|1-\omega|^p}.$$

При $0 \le p \le 1$

$$u(r) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|1-re^{it}|^p} \ge \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{dt}{|1-re^{it}|^p} > \frac{\pi}{(1+r)^P} \underset{r\to 1}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2^p}.$$

Поэтому $c = c(p) = \inf\limits_{r\in[0,1)} u(r) > 0$. Следовательно,

$$r_N I_p(r_N, F_0') \ge \frac{ce^{-\pi}}{2\pi^{2-p}}(1-r_N^2)^{1-p} \sum_{m=1}^{N} x_m^{p-1} \ge$$
$$\ge \frac{ce^{-\pi}}{2\pi^{2-p}}(1-r_N^2)^{1-p} \int_1^N \frac{dm}{x_m^{1-p}}.$$

После замены переменной (14) в этом интеграле $u \in [A,B] =$ $= \left[\dfrac{5}{(2N^2+1)^2}, \dfrac{4N^2+1}{(2N^2+1)^2}\right]$ получим при $1/2 < p \le 1:$

$$\int_1^N \frac{dm}{x_m^{1-p}} \ge \frac{(2N^2+1)^p}{4} \int_A^B u^{p-3/2} du \ge \frac{(2N^2+1)^P}{2(2p-1)} B^{p-1/2} =$$
$$= \frac{(2N^2+1)^p}{2(2p-1)} \frac{2^{p-1/2}+o(1)}{(2N^2+1)^{p-1/2}} = \frac{\sqrt{2N^2+1}(1+o(1))}{2^{3/2-p}(2p-1)} =$$
$$= \frac{1+o(1)}{2^{1-p}(2p-1)}(1-r_N^2)^{-1/2},$$

здесь $o(1) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Если же $p = 1/2$, то при достаточно больших N

$$\int_1^N \frac{dm}{x_m^{1/2}} \ge \frac{\sqrt{2N^2+1}}{4} \log \frac{4N^2+1}{5} > \frac{\sqrt{N^2+1}}{2\sqrt{2}} \log \sqrt{N^2+1} =$$
$$= \frac{\log \dfrac{1}{1-r_N^2}}{2\sqrt{2}(1-r_N^2)^{1/2}}.$$

Следовательно, при достаточно больших $N > N_0$

$$r_N I_p(r_N, F_0') \geq \frac{ce^{-\pi}}{2(2\pi)^{2-p}(2p-1)} \frac{1}{(1-r_N^2)^{p-1/2}}, \qquad 1 \geq p > 1/2,$$

$$r_N I_p(r_N, F_0') \geq \frac{ce^{-\pi}}{2(2\pi)^{3/2}} \log \frac{1}{1-r_N^2}, \qquad p = 1/2.$$

Если теперь N достаточно велико и $r \in [r_N, r_{N+1}]$, то подобно (15) будем иметь при $p \in (1/2, 1]$:

$$I_p(r, F_0') \geq I_P(r_N, F_0') \geq \frac{ce^{-\pi}}{3(2\pi)^{2-p}(2p-1)} \frac{1}{(1-r^2)^{p-1/2}}; \tag{16}$$

$$I_{1/2}(r, F_0') \geq \frac{ce^{-\pi}}{3(2\pi)^{3/2}} \log \frac{1}{1-r^2}. \tag{17}$$

Следовательно, (16) и (17) выполнены для $1 > r > \rho_0(p)$.

Предположим, что для некоторого целого $k \geq 0$ справедливо утверждение теоремы, т. е. выполняются неравенства

$$I_p(r, F_k') \geq \frac{c_k(\rho)}{(1-r^2)^{p-1/2}} \left(\log \frac{1}{1-r^2}\right)^k, \qquad 1 \geq p > \frac{1}{2}, \tag{18}$$

$$I_{1/2}(r, F_k') \geq c_k(1/2) \left(\log \frac{1}{1-r^2}\right)^{k+1} \tag{19}$$

при $1 > r > \rho_k(p)$. Докажем справедливость утверждения теоремы для номера $k+1$. Как и выше,

$$I_p(r_N, F_{k+1}') \geq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=N}^{1-N} \int_{\delta_m}^{\delta_{m-1}} |F_k'[\omega(r_n e^{it})]|^p \frac{|d\omega(r_N e^{it})|}{|\omega'(r_N e^{it})|^{1-p}} \geq$$

$$\geq \frac{(1-r_N^2)^{1-p}}{(2\pi)^{2-p}} \sum_{k=1}^{N} (R_{m-1} x_m)^{p-1} \int_{\Gamma_m \cup \Gamma_m'} |F_k'(\omega)|^p |d\omega|.$$

Поскольку $F_k \in \mathcal{B}'$, то к интегралам по Γ_m и Γ_m' применима лемма 2; использование (1') при $r_0 \geq R_m,\ r^0 \leq R_{m-1}$ приводит при $1/2 \leq p < 1$ к неравенству

$$r_N I_p(r_N, F_{k+1}') \geq \frac{(1-r_N^2)^{1-p}}{(2\pi)^{2-p}} \sqrt{2} \sum_{m=1}^{N} (R_{m-1} x_m)^{p-1} \times$$

$$\times\left[\int_{|\omega|=R_m}|F_k'(\omega)|^p|d\omega|-\frac{8(1+p)}{p(1-p)}((1-R_m)^{1-p}-(1-R_{m-1})^{1-p})\right],$$

а при $p=1$ — к неравенству

$$r_NI_1(r_N,F_{k+1}')\geq\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{m=1}^{N}\left[\int_{|\omega|=R_m}|F_k'(\omega)||d\omega|-8R_m\log\frac{1-R_m}{1-R_{m-1}}\right].$$

Из (18) и (19) следует, что при $1/2<p<1$

$$\frac{1}{2}\int_{|\omega|=R_m}|F_k'(\omega)|^p|d\omega|-\frac{8(1+p)}{p(1-p)}\geq 0,$$
$$\frac{1}{2}\int_{|\omega|=R_m}|F_k'(\omega)||d\omega|--8\log 10\geq 0,$$

если $R_m>\rho_k(p)$ и R_m достаточно близки к 1, т. е. $R_m>1-\varepsilon_k$, $\varepsilon_k=$ $=\varepsilon_k(p)\in(0,1)$. Как и раньше (см. пункт 1)), это означает, что $1\leq$ $m\leq N\eta_k$, $\eta_k=\eta_k(p)\in(0,1)$; считаем N достаточно большим ($N\eta_k^2\geq$ ≥ 2). Выше показано, что $\dfrac{1-R_m}{1-R_{m-1}}<10$ при $m\in[0,N]$. Следовательно, для $N\geq 2/\eta_k^2$ и $m\in[1,N\eta_k]$ выполняется неравенство

$$r_N\geq\frac{(1-r_N^2)^{1-p}}{(2\pi)^{2-p}}\sqrt{2}\sum_{m=1}^{N\eta_k}(R_{m-1}x_m)^{p-1}\pi I_p(R_m,F_k'). \tag{20}$$

При $1/2<p\leq 1$ отсюда и из неравенства $1-R_m^2\leq 2\pi x_m$ получаем:

$$r_NI_p(r_N,F_{k+1}')\geq\frac{c_k(p)(1-r_N^2)^{1-p}}{(2\pi)^{1-p}\sqrt{2}}\sum_{m=1}^{N\eta_k}\frac{(R_{m-1}x_m)^{p-1}}{(1-R_m^2)^{p-1/2}}\left(\log\frac{1}{1-R_m^2}\right)^k\geq$$
$$\geq\frac{c_k(p)(1-r_N^2)^{1-p}}{(2\pi)^{1-p}\sqrt{2}(2\pi)^{p-1/2}}\sum_{m=1}^{N\eta_k}\frac{x_m^{p-1}}{x_m^{p-1/2}}\left(\log\frac{1}{2\pi x_m}\right)^k\geq$$
$$\geq\frac{c_k(p)(1-r_N^2)^{1-p}}{2\sqrt{\pi}}\sum_{m=1}^{N\eta_k}\frac{1}{\sqrt{x}_m}\left(\log\frac{1}{2\pi x_m}\right)^k. \tag{21}$$

Последняя сумма в (21) того же знака, что и сумма в пункте 1, b); поэтому при $N\geq 2/\eta_k^2$

$$r_NI_p(r_N,F_{k+1}')\geq\frac{c_k(p)}{8\sqrt{\pi}(k+1)(1-r_N^2)^{p-1/2}}\log^{k+1}\frac{1}{1-r_N^2}.$$

Если теперь $r \in [r_N, r_{N+1}]$, $N\eta_k^2 \geq 2$, то, как и прежде (см. (15)), получим:

$$I_p(r, F'_{k+1}) \geq \frac{c_k(p)}{10\sqrt{\pi}(k+1)(1-r^2)^{p-1/2}} \log^{k+1}\frac{1}{1-r^2}, \tag{22}$$

если N достаточно велико. Это означает, что (22) выполнено при r, достаточно близких к 1, т. е. $0 < \rho_{k+1}(p) < r < 1$. Тем самым доказано утверждение теоремы в случае $1/2 < p \leq 1$.

При $p = 1/2$ из (20) получаем:

$$r_N I_{1/2}(r_N, F'_{k+1}) \geq \frac{c_k(1/2)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{1-r_N^2}\sum_{m=1}^{N\eta_k}\frac{1}{\sqrt{x_m R_{m-1}}}\log^{k+1}\frac{1}{1-R_m^2} \geq$$
$$\geq \frac{c_k(1/2)}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{1-r_N^2}\sum_{m=1}^{N\eta_k}\frac{1}{\sqrt{x_m}}\log^{k+1}\frac{1}{2\pi x_m}.$$

Опять получили сумму того же вида, что и в (21). Поэтому при $N \geq 2/\eta_k^2$

$$r_N I_{1/2}(r_N, F'_{k+1}) \geq \frac{c_k(1/2)}{8\sqrt{\pi}(k+2)}\log^{k+2}\frac{1}{1-r_N^2}.$$

Отсюда, как и раньше, следует справедливость неравенства

$$I_{1/2}(r, F'_{k+1}) \geq \frac{c_k(1/2)}{10\sqrt{\pi}(k+2)}\log^{k+2}\frac{1}{1-r^2}$$

при r, достаточно близких к 1. Это доказывает теорему в случае $p = 1/2$. Теорема доказана. □

Идея построения функций F_k восходит к работе [10]. В нашей статье изучаются линейно-инвариантные семейства $\mathcal{U}_\alpha$ локально однолистных функций $h(z) = z + \ldots$ порядка α (см. [11]). Для $h \in \mathcal{U}_\alpha$ доказано ([11]) точное неравенство: $|h'(z)| \leq \dfrac{(1+|z|)^{\alpha-1}}{(1-|z|)^{\alpha+1}}$, $z \in \Delta$. Поэтому

$$h \in \mathcal{U}_\alpha \quad \Longrightarrow \quad h' = (f')^{\alpha+1}, \quad f \in \mathcal{B},' \tag{23}$$

и для функций $f \in \mathcal{B}'$, определенных посредством (23), $I_{\alpha+1}(r, f') = I_1(r, h')$. Для $h \in \mathcal{U}_\alpha$ в [12, с. 182, задача 5] имеется оценка:

$I_1(r,h') \le c(1-r)^{-1/2-\sqrt{\alpha^2-3/4}-\varepsilon}$, $c = const$, $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое. Поскольку $\alpha + 1/2 > \sqrt{\alpha^2 - 3/4} + 1/2 = \alpha + 1/2 + O(1/\alpha), \quad \alpha \to \infty$, то здесь в результате интегрирования $|f'|^{\alpha+1}$ происходит падение порядка роста $I_{\alpha+1}(r, f')$ по сравнению с ростом

$$\max_{h \in \mathcal{U}_\alpha, |z|=r} |h'(z)| = \max_{f,|z|=r} |f'(z)|^{\alpha+1}$$

больше, чем на 1/2. Естественно, возникает
ЗАДАЧА. Существуют ли функции $f \in \mathcal{B}'$, для которых $I_p(r, f')$ имеет больший порядок роста, чем указанный в теореме? Для $p > 0$ определить

$$\inf\{\beta > 0 : I_p(r, f') = O((1-r)^{-\beta}) \quad \forall f \in \mathcal{B}'\} = \beta(p).$$

В заключение я благодарю профессора M. Anderson'а и профессора D. Girela за обсуждение результатов статьи и за информацию о некоторых работах в этом направлении.

Résumé

In this paper we give examples of locally univalent Bloch functions $f_k, (k = 0, 1, 2, \ldots)$, such that for $p \ge 1/2$ the integral means

$$I_p(r, f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta, , \ r \in [0, 1),$$

behave like $(1-r)^{1/2-p}(-\log(1-r))^k$ for $r \to 1^-$.

Литература

[1] Feng J., MacGregor T. H. *Estimates of integral means of the derivatives of univalent functions* // J. Analysis Math. 1976. V. 20. P. 203–231.

[2] Clunie J. G., MacGregor T. H. *Radial growth of the derivative of uniwalent functions* // Comment Math. Helv. 1984. V. 59. P. 362–375.

[3] Makarov N. G. *On the distortion of boundary sets under conformal mappings* // Proc. London Math. Soc. 1985. V. 81. № 3. P. 369–384.

[4] Girela D. *On Bloch functions and gap series* // Publications Matemàtiques. 1991. V. 35. P. 403–427.

[5] Pommerenke Ch. *On Bloch functions* // J. London Math. Soc. 1970. V. 2. No 2. P. 241–267.

[6] Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1966.

[7] Wirts K. J. *Über holomorphe Funktionen, die einer Wachstumsbeschränkung unterliegen* // Archiv der Mathematik. 1978. V. 30. No 6. P. 606–612.

[8] Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P. *Formulas and theorems for the special functions of mathematical phisics.* 3rd edn. Berlin: Springer, 1966.

[9] Хейман В. К. *Многолистные функции.* М.: ИЛ, 1960.

[10] Starkov V. V. *Directions of intensive growth of locally univalent functions* // Complex Anal. and Appl.'87. 1989. P. 517–522.

[11] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen. I*// Math. Ann. 1964. Hf. 155. P.108–154.

[12] Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps.* Berlin; Heidelberg: Springer—Verlag, 1992.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: starkov@mainpgu.karelia.ru