Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 7, 2000

УДК 519.6, 539.2

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

И. А. Чернов

Рассматривается модель переноса газа в твердом теле при исследовании газопроницаемости методом термодесорбционной спектрометрии. Модель учитывает не только диффузионные, но и физико-химические процессы на поверхности, что приводит к краевой задаче с динамическими граничными условиями. Доказаны существование и единственность классического решения.

Краевая задача переноса газа

Исследования переноса водорода в твердом теле занимают особое место в теоретической и математической физике [1, 3], прежде всего в связи с задачами энергетики. Разработка адекватных математических моделей представляет значительный интерес. Существует ряд экспериментальных методов оценивания параметров водородопроницаемости. В их числе — метод термодесорбционной спектрометрии (ТДС). Для определенности автор ориентировался на возможности экспериментальной установки [2].

В вакуумную камеру с лентой из исследуемого материала (обычно металла) подается водород. Лента нагревается электрическим током с целью увеличения скоростей адсорбционно-десорбционных процессов и диффузии. После установления стационарной концентрации она быстро охлаждается (отключается ток). При этом резко падают скорости указанных процессов и значительное количество водорода остается в ленте. В режиме вакуумирования камеры лента через

Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания при Санкт-Петербургском государственном университете.

определенный промежуток времени снова нагревается. Закон нагрева может варьироваться. С помощью масс-спектрометра измеряется десорбционный поток газа с поверхности.

Рассматриваемая математическая модель переноса учитывает лимитирующую роль не только диффузионных, но и адсорбционно-десорбционных процессов [1]. Теоремы существования и единственности обобщенного решения краевой задачи с динамическими граничными условиями содержатся в [4]. В настоящей работе доказывается существование и единственность классического решения без учета обратимого захвата диффузанта ловушками (различными неоднородностями структуры металла).

Пусть $c(t,x)$ — концентрация атомарного водорода в мембране из исследуемого металла на глубине $x \in (0,\ell)$ в момент времени $t > 0$. С учетом поверхностных процессов примем следующую модель [1]:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= D(T)\,\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad t>0,\ x\in(0,\ell),\\
\frac{dq}{dt} &= -b(T)q^2(t) + D(T)\frac{\partial c}{\partial x}\bigg|_{x=0},\\
c(t,0) &= c(t,\ell) = g(T)q(t), \quad t>0,\\
c(0,x) &= C_0 = \mathrm{const}, \quad q(0) = C_0/g(T(0)),\\
T &= T(t) = \alpha t + T_0, \quad T_0 = T(0).
\end{aligned}
$$

Коэффициенты модели $D(T), g(T), b(T)$ зависят от температуры по закону Аррениуса:

$$
D = D_0\exp(-E_D/RT),\ b = b_0\exp(-E_b/RT),\ g = g_0\exp(-E_g/RT).
$$

В дальнейшем всюду будем считать $D(T)$ зависимостью от температуры, а $D(t)$ — зависимостью от времени с учетом $T = T(t)$. Аналогичное соглашение примем и для параметров b, g.

Через $q(t)$ обозначена поверхностная концентрация атомов газа. Функция $c(t,0)$ имеет смысл объемной концентрации водорода в подповерхностном слое, g — коэффициент пропорциональности между поверхностной и объемной концентрациями при $x = 0$. Плотность десорбционного потока водорода с поверхности в объем вакуумной камеры связана с поверхностной концентрацией соотношением $J(t) =$

$b(t)q^2(t)$, где b — коэффициент десорбции. Второе соотношение имеет следующий физический смысл: скорость изменения поверхностной концентрации определяется разностью диффузионного (приносящего газ на поверхность) и десорбционного (удаляющего его) потоков.

По постановке эксперимента $c(0,x) = C_0 = \mathrm{const}$, нагрев считаем линейным. Метод ТДС симметричен: все процессы симметричны относительно середины мембраны. Поверхностная концентрация $q(t)$ на обеих сторонах одинакова в любой момент времени. Для объемной концентрации $c(t,x) = c(t,\ell - x)$. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением поверхности, соответствующей $x = 0$. Для удобства дальнейших исследований модифицируем модель. Удобно ввести замену времени $\tau = \int_0^t D(\xi)d\xi$. Новое время τ, чтобы не усложнять выкладки, переобозначим снова на t. Исключая переменную q, рассматриваем задачу

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ x \in (0,\ell), \tag{1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t,0) = -\frac{b}{Dg}c^2(t,0) + \frac{\dot g}{g}c(t,0) + g\frac{\partial c}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \tag{2}$$

$$c(t,\ell - x) = c(t,x) \quad \forall t \ge 0,\ x \in [0,\ell], \tag{3}$$

$$c(0,x) \equiv C_0. \tag{4}$$

Отметим, что из (3) следует симметрия диффузионного потока:

$$D\frac{\partial c}{\partial x}(t,x) = -D\frac{\partial c}{\partial x}(t,\ell - x), \quad t \ge 0,\ x \in [0,\ell]. \tag{5}$$

По постановке задачи коэффициенты как функции времени являются гладкими, положительными, монотонными, отделенными от нуля и ограниченными на положительной полупрямой. Указанные свойства обусловлены их физическим смыслом.

Рассмотрим полосу $P = \{(t,x) : t > 0,\ x \in (0,\ell)\}$, через $\overline{P}$ обозначим ее замыкание. Обозначим, следуя [5], через $C^{1,2}[\overline{P}]$ пространство функций на $\overline{P}$, у которых существуют в P и продолжимы по непрерывности на $\overline{P}$ непрерывные частные производные $\partial^{\alpha+\beta}/\partial x^\alpha \partial t^\beta$, α, β — неотрицательные целые числа, $\alpha + 2\beta \le 2$.

Определение 1. *Классическим решением краевой задачи (1)–(4) будем называть функцию $c(t,x) \in C^{1,2}[\overline{P}]$, удовлетворяющую при $x \in$*

$(0,\ell)$, $t > 0$ *уравнению диффузии (1), при* $x = 0$ *— уравнению (2), при* $t = 0$ *— условию (4) и обладающую свойством симметрии (3).*

Переход к интегро-дифференциальному уравнению

Обозначим $c(t,0) = A(t)$, и пусть классическое решение существует. Рассмотрим функцию $c^0(t,x) = c(t,x) - A(t)$. Тогда $c^0(t,0) = c^0(t,\ell) = 0$, $c^0_x(t,0) = -c^0_x(t,\ell)$. Поэтому функция $c^0(t,x)$, второй аргумент которой пробегает $[0,\ell]$, нечетно продолжима по второму аргументу на отрезок $[-\ell,\ell]$, причем непрерывно дифференцируемым образом (дифференцирование на концах — одностороннее). Известно, что такая функция разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,\ell]$. Коэффициенты ряда зависят от t.

Указанные соображения дают основание искать решение в виде

$$c(t,x) = A(t) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(\pi n x/\ell), \quad t \geq 0,\ x \in [0,\ell]. \tag{6}$$

A — функциональный параметр, который будет определен далее. Из начального условия имеем $A(0) = c(0,0) = c(0,x) = C_0$.

Проведем пока формальные выкладки. Подстановка $c(t,x)$ в уравнение диффузии (1) дает

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\dot{T}_n + \frac{\pi^2}{\ell^2}n^2 T_n)\sin(\pi n x/\ell) = -\dot{A}(t). \tag{7}$$

Отметим, что скалярные произведения $< 1, \sin(\pi n x/\ell) >_{L_2[0,\ell]}$ равны $2\ell/(\pi n)$ при n нечетных и нулю при четных. Домножая (7) скалярно в L_2 на $\sin(\pi n x/\ell)$, получаем систему дифференциальных уравнений для функций $T(t)$:

$$\dot{T}_n + \frac{\pi^2}{\ell^2}n^2 T_n \quad = \quad -\frac{4\dot{A}}{\pi n},\ n = 2k-1, \tag{8}$$

$$\dot{T}_n + \frac{\pi^2}{\ell^2}n^2 T_n \quad = \quad 0,\ n = 2k, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{9}$$

Для получения начальных условий подставим $t = 0$ в ряд (6). Так как $c(0,x) = A(0) = C_0$, то $T_n(0) = 0$.

Из приведенных рассуждений следует, что уравнения (9) имеют нулевое решение и ряд (4) суммируется только по нечетным индексам. В дальнейшем будем использовать символ $\sum'$ как знак суммы по нечетным натуральным n. Для уравнений (8) с учетом начальных условий имеем:

$$T_n(t) = -\frac{4}{\pi n}\exp\left(-\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2 t\right)\int_0^t \dot{A}(\tau)\exp\left(\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2\tau\right)d\tau. \qquad (10)$$

Подставим решение $c(t,x)$ в виде формального ряда (6) в граничное условие (2). После почленного дифференцирования по x и подстановки $x=0$ в третьем слагаемом справа в (2) получим ряд из функций, зависящих от времени. Итак:

$$\dot{A} = -\frac{b}{Dg}A^2 + \frac{\dot{g}}{g}A - \frac{4g}{\ell}\sum{}'\int_0^t \dot{A}(\tau)e^{(\pi n/\ell)^2(\tau-t)}d\tau, \qquad (11)$$
$$A(0) = C_0, \quad \sum{}' = \sum_{n=1,3,5\ldots}.$$

Определение 2. *Решением уравнения (11) на отрезке $I=[0,t^+]$ будем называть функцию $A(t)\in C^1[I]$, удовлетворяющую уравнению на I и начальным данным. При этом предполагается сходимость ряда справа $\forall t\in I$. Производные на границе — односторонние.*

Дальнейшая схема доказательства существования и единственности классического решения (1)–(4) состоит в следующем. Докажем существование и единственность решения уравнения (11). Оно однозначно определяет коэффициенты ряда (6) и, следовательно, формально построенное решение задачи. Решение уравнения (11) имеет также смысл значения решения краевой задачи на границе: $A(t)=c(t,0)=c(t,\ell)$. Таким образом, оно определяет некоторую краевую задачу 1-го рода для одномерного уравнения диффузии, эквивалентную исходной (формальные решения в виде рядов у них совпадают). Задачи 1-го рода хорошо изучены. В частности, известно [5], что классическое решение такой задачи существует, единственно, представляется сходящимся рядом, сумма которого принадлежит пространству $C^{1,2}$. Следовательно, сумма ряда (6) — это классическое решение поставленной краевой задачи. Осталось показать существование и единственность решения уравнения (11).

Утверждение 1. *Если A — решение на I, то ряд*

$$\sum{}' \int_0^t \dot{A}(\tau) \exp\left(-\frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 (t-\tau)\right) d\tau$$

из (11) абсолютно и равномерно сходится на I.

Действительно, так как, по определению, функция $\dot{A}$ непрерывна на I, то она ограничена: $|\dot{A}| \leq B$ $\forall t \in I$. Поэтому справедливы оценки:

$$\left| \int_0^t \dot{A}(\tau) e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 (t-\tau)} d\tau \right| \leq \int_0^t |\dot{A}(\tau)| e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 (t-\tau)} d\tau \leq \frac{B\ell^2}{\pi^2 n^2}.$$

Следовательно, указанный функциональный ряд мажорируется сходящимся числовым. Сумму ряда можно оценить по модулю величиной $B\ell^2/6$.

Следствие. *Ряд Фурье (6) с подстановкой (10) сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0, \ell]$ $\forall t \in I$.*

Действительно, рассмотрим ряды

$$\sum{}' \int_0^t \dot{A}(\tau) e^{-(\pi^2/\ell^2) n^2 (t-\tau)} d\tau, \; \sum{}' \frac{1}{n} \int_0^t \dot{A}(\tau) e^{-(\pi^2/\ell^2) n^2 (t-\tau)} d\tau.$$

По признаку сравнения из сходимости первого следует сходимость второго, который с точностью до множителя совпадает с рядом с членами T_n, мажорирующим (6).

Построение решения

Для построения решения воспользуемся методом последовательных приближений. Зададим начальную функцию $\dot{A}_0(t) = 0$, $t \geq 0$, и определим рекуррентную последовательность

$$A_k = C_0 + \int_0^t \dot{A}_k d\tau, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

$$\dot{A}_{k+1} = -\frac{b}{Dg} A_k^2 + \frac{\dot{g}}{g} A_k - \frac{4g}{\ell} \sum{}' \int_0^t \dot{A}_k(\tau) e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 (t-\tau)} d\tau. \tag{13}$$

В силу указанных при постановке задачи свойств коэффициентов конечны и не равны нулю величины $\alpha_1 = \sup_{t \geq 0} b/(Dg)$, $\alpha_2 = \sup_{t \geq 0} \dot{g}/g$ и $g_0 = \sup_{t \geq 0} g(t)$. Отметим, что все $\dot{A}_k$ непрерывны при $t \geq 0$ (по индукции). Непрерывные функции на отрезке ограничены, поэтому все члены последовательности ограничены. Последовательность можно переписать в операторной форме:

$$Z_{k+1}(\cdot) = F(Z_k(\cdot)),\ Z(t) = \dot{A}(t),\ t \geq 0.$$

В дальнейшем нам понадобится функция

$$\Psi(t) = \sum{}' \frac{1}{n^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 t\right)\right).$$

Ее свойства: положительность, непрерывность, монотонность и ограниченность при $t > 0$. Докажем непрерывность в нуле. Ясно, что $\Psi(0) = 0$. Следовательно, нужно доказать, что $\lim\limits_{t \to +0} \Psi(t) = 0$. Обозначим общий член ряда в определении функции через $f(n,t)$, тогда $\Psi(t) = \sum{}' f(n,t)$. Далее, в пределах доказательства, n может быть как натуральным, так и вещественным — отличие по контексту. Функция $f(n,t)$ убывает с ростом n $\forall t \geq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -2n^{-3} \left(1 - e^{-\ldots tn^2} - e^{-\ldots tn^2} \frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 t\right) =$$
$$= -2n^{-3} e^{-\ldots tn^2} \left[e^{+\ldots tn^2} - \left(1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} n^2 t\right)\right].$$

Выражение во внутренней скобке есть разложение по Тейлору экспоненты $\exp\left(+\ldots tn^2\right)$ до первого порядка. Поскольку показатель у этой экспоненты неотрицательный, то все остальные члены разложения неотрицательны и выражение в квадратных скобках неотрицательно. Множитель же перед ней меньше нуля. Таким образом, производная отрицательна и функция $f(n,t)$ убывает с ростом $n \in R$ $\forall t \geq 0$. Пусть $[x]$ означает целую часть x. Заметим, что

$$\Psi(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n,t) = \int\limits_{n=1}^{\infty} f([n+1],t) dn + f(1,t) \leq f(1,t) + \int\limits_{n=1}^{\infty} f(n,t) dn.$$

Поскольку $f(1,t) = 1 - \exp\left(-\pi^2 t/\ell^2\right) \to 0$ при $t \to 0$, то осталось исследовать интеграл. Проинтегрируем по частям:

$$\int_{n=1}^{\infty} f(n,t)dn = \int_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}tn^2}\right)dn =$$
$$= -\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}t}\right) + 2\frac{\pi^2}{\ell^2}t\int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}tn^2}dn.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $t \to 0$. Рассмотрим второе:

$$\frac{2\pi^2}{\ell^2}t\int_1^{\infty} e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}tn^2}dn = \frac{2\pi}{\ell}\sqrt{t}\int_{\frac{\pi}{\ell}\sqrt{t}}^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{2\pi}{\ell}\sqrt{t}\times$$
$$\times\left(\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy - \int_0^{\frac{\pi}{\ell}\sqrt{t}} e^{-y^2}dy\right) = \frac{2\pi}{\ell}\sqrt{t}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{\ell}\sqrt{t}} e^{-y^2}dy\right).$$

При $t \to 0$ оно стремится к нулю. Итак, мы показали, что

$$0 \le \Psi(t) \le f(1,t) + \int_{n=1}^{\infty} f(n,t)dn \to 0, t \to 0,$$

что и доказывает непрерывность Ψ в нуле.

Далее покажем существование таких величин a, h, B, что если $0 \le t \le a$, то $|A_k| \le h$, $|\dot{A}_k| \le B$ $\forall k \ge 0$ (равномерная ограниченность на достаточно малом отрезке времени).

Утверждение 2. *Существует такое a, что при $0 \le t \le a$ для всех $k \ge 0$ выполнены оценки $|A_k| \le C_0 + Ba = h$, $|\dot{A}_k| \le B$, причем*

$$B \ge 3(\alpha_1 C_0^2 + \alpha_2 C_0). \tag{14}$$

Доказательство. Если выполнено $|\dot{A}_k| \le B$, то $|A_k| \le C_0 + Ba$ получается сразу. Воспользуемся методом индукции. База индукции — выполнение оценок $|A_0| \le C_0 + Ba$, $|\dot{A}_0| \le B$: $A_0 \equiv C_0$, $\dot{A}_0 \equiv 0$. Пусть для номера k оценки выполнены. По определению $\dot{A}_{k+1}$ получим:

$$\left|\dot{A}_{k+1}\right| \le \left|-\frac{b}{Dg}A_k^2 + \frac{\dot{g}}{g}A_k\right| + \left|\frac{4g}{\ell}\sum{}'\int_0^t \dot{A}_k(\tau)e^{\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2(\tau-t)}d\tau\right| \le$$
$$\le \left|\frac{b}{Dg}A_k^2\right| + \left|\frac{\dot{g}}{g}A_k\right| + \frac{4g}{\ell}\sum{}'\int_0^t |\dot{A}_k(\tau)|e^{\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2(\tau-t)}d\tau \le$$
$$\le \alpha_1 A_k^2 + \alpha_2|A_k| + \frac{4g_0}{\ell}\sum{}'\int_0^t |\dot{A}_k(\tau)|e^{\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2(\tau-t)}d\tau.$$

Применим индукционную оценку для $|A_k|$ и заметим, что

$$\sum{}' \int_0^t \exp(-(\pi^2/\ell^2)n^2(t-\tau))d\tau = \frac{\ell^2}{\pi^2}\Psi(t):$$

$$\begin{aligned}\left|\dot{A}_{k+1}\right| &\leq \alpha_1(A_0+Ba)^2+\alpha_2A_0+\alpha_2Ba+\frac{4g_0\ell}{\pi^2}B\Psi(a)= \\ &= B\left[\frac{\alpha_1A_0^2+\alpha_2A_0}{B}+2\alpha_1A_0a+\alpha_1Ba^2+\alpha_2a+\frac{4g_0\ell}{\pi^2}\Psi(a)\right].\end{aligned}$$

Для доказательства осталось показать, что выражение в квадратных скобках не превосходит 1. Этого можно добиться выбором a и B. Применим несколько искусственный, но простейший прием, наложив на a и B следующие ограничения:

$$2\alpha_1A_0a+\alpha_1Ba^2+\alpha_2a \leq 1/3, \tag{15}$$

$$\left(\alpha_1A_0^2+\alpha_2A_0\right)/B \leq 1/3, \tag{16}$$

$$4\ell g_0\Psi(a) \leq \pi^2/3. \tag{17}$$

Ограничение (16) приводит к требованию (14). Условие (17) приводит к $a\leq a^\Psi(\pi^2/(12\ell g_0))$, где $a^\Psi(z)=\sup(x\geq 0:\ \Psi(x)\leq z)$. Заметим, что это условие определяется только свойствами функции Ψ, а также параметром ℓ, от которого Ψ зависит.

Рассмотрим условие (15). Достаточно выполнения следующих оценок:

$$\alpha_2a\leq 1/9,\ 2\alpha_1A_0a\leq 1/9,\ \alpha_1Ba^2\leq 1/9.$$

Из всех условий получается ограничение на a:

$$a\leq\min\left(\frac{1}{9\alpha_2},\frac{1}{18\alpha_1A_0},\frac{1}{3\sqrt{\alpha_1B}},a^\Psi\left(\frac{\pi^2}{12\ell g_0}\right)\right). \tag{18}$$

Условий (14) и (18) достаточно для истинности утверждения 2. Переформулируем его в операторной форме.

Утверждение $2'$. *Пусть $\Phi_B=\{\varphi\in C[0,a]:||\varphi||_C\leq B\}$, причем для B и a выполняются ограничения (14) и (18) соответственно. Тогда $F(\Phi_B)\subset\Phi_B$.*

Вернемся к анализу сходимости последовательности $\dot{A}_k$. Зафиксируем постоянные a и B согласно ограничениям (14) и (18) и докажем по индукции, что $\left|\dot{A}_k - \dot{A}_{k-1}\right| \le BL^{k-1}$ и $|A_k - A_{k-1}| \le a^* BL^{k-1}$ $\forall k \in N$ (при $0 \le t \le a^* \le a$). Здесь L — некоторая константа. База индукции имеется: $|\dot{A}_1 - \dot{A}_0| = |\dot{A}_1| \le \alpha_1 A_0^2 + \alpha_2 A_0 + 0 \le B$.

Проведем оценки на $[0, a^*]$:

$$\begin{aligned}
\left|\dot{A}_{k+1} - \dot{A}_k\right| \le \alpha_1 (A_k + A_{k-1})|A_k - A_{k-1}| + \alpha_2 |A_k - A_{k-1}| \quad & + \\
+\frac{4g_0}{\ell} \sum{}' \int_0^t |\dot{A}_k - \dot{A}_{k-1}| e^{(\pi^2/\ell^2) n^2 (\tau - t)} d\tau \quad & \le \\
\le BL^{k-1} \left(a^*(2\alpha_1 h + \alpha_2) + \frac{4g_0}{\ell} \sum{}' \int_0^{a^*} e^{\frac{\pi^2}{/\ell^2} n^2 (\tau - a^*)} d\tau \right) \quad & = \\
= BL^{k-1} \left(2\alpha_1 h a^* + \alpha_2 a^* + \frac{4 g_0 \ell}{\pi^2} \Psi(a^*) \right) \quad & = \quad BL^k.
\end{aligned}$$

По условию (18) $L = 2\alpha_1 h a^* + \alpha_2 a^* + 4g\ell\pi^{-2}\Psi(a^*) \le 2\alpha_1 h a^* + 1/9 + 1/3$, причем L должно быть меньше 1. Следовательно,

$$2\alpha_1 h a^* + 4/9 = 2a^* \alpha_1 h + 4/9 < 1 \Rightarrow a^* < \frac{5}{18\alpha_1 h}.$$

Константа $h = C_0 + Ba$ зависит от фиксированных выше величин a, B. Все условия будут выполнены, если

$$a^* \le \min\left(\frac{1}{9\alpha_2}, \frac{1}{18\alpha_1 h}, \frac{1}{3\sqrt{\alpha_1 B}}, a^{\Psi}\left(\frac{\pi^2}{12\ell g_0} \right) \right). \tag{19}$$

Применим полученную оценку (с учетом $\dot{A}_0 = 0$):

$$|\dot{A}_k| = \left| \dot{A}_0 + \sum_{n=1}^{k} (\dot{A}_n - \dot{A}_{n-1}) \right| \le \sum_{n=1}^{k} |\dot{A}_n - \dot{A}_{n-1}| \le \sum_{n=1}^{k} BL^{n-1}.$$

Поэтому последовательность $\dot{A}_k$ мажорируется сходящимся рядом и поэтому абсолютно и равномерно сходится. Совершенно аналогично получается абсолютная и равномерная сходимость последовательности A_k $\forall k \ge 0$:

$$|A_k| = \left| A_0 + \sum_{n=1}^{k} (A_n - A_{n-1}) \right| \le A_0 + a^* \sum_{n=1}^{k} BL^{n-1}.$$

Поскольку члены последовательностей ограничены в совокупности ($|\dot{A}_k| \le B$, $|A_k| \le C_0 + Ba$), то и пределы также ограничены этими же величинами. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если a^* достаточно мало (условие (19)), то решение уравнения (11) на отрезке $I = [0, a^*]$ с начальными данными $A(0) = C_0$ в смысле определения 2 существует, причем выполнены оценки $|\dot{A}| \le B$, $|A| \le C_0 + Ba$.*

Единственность решения

Перейдем к доказательству единственности по принципу сжатых отображений. Напомним сделанные выше обозначения:

$$
\begin{aligned}
F(z(\cdot)) &= -\frac{b}{Dg}A^2 + \frac{\dot{g}}{g}A - \frac{4g}{\ell}\sum{}' \int_0^t z(\tau)e^{-\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2(t-\tau)}d\tau, \\
A &= C_0 + \int_0^t z d\tau, \\
F(\Phi_B) &\subset \Phi_B, \quad \Phi_B = \{\varphi \in C[0,a^*] : \|\varphi\|_{C[0,a^*]} \le B\}.
\end{aligned}
$$

Для B и a^* выполняются условия (14) и (19).

Выше на отрезке $I = [0, a^*]$, который далее считаем фиксированным, построено решение уравнения (11), которое является неподвижной точкой F. Обозначим его z_1. Пусть на некотором отрезке $I' = [0, a]$, $a \le a^*$ существует еще одно решение z_2, и пусть

$$M = \max(\|z_1\|_{C[I]}, \|z_2\|_{C[I']}).$$

Условие (14) будет заведомо выполнено, если $B = \max(M, 3(\alpha_1 M^2 + \alpha_2 M))$, и тогда $F(\Phi_B) \subset \Phi_B$. Найдем условия сжатости. Далее рассматриваем все функции на отрезке $J = [0, \delta]$, $\delta \le a$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
\|A_1 - A_2\|_{C[J]} &= \max_J |A_1 - A_2| = \max_J \left| \int_0^t (z' - z'')d\tau \right| \le \\
\le \max_J \int_0^t |z' - z''| d\tau &\le \max_J t \max_{[0,t]} |z' - z''| = \delta \|z' - z''\|_{C[J]}.
\end{aligned}
$$

Тогда, по определению (все нормы — в C[J]),

$$\|F(z') - F(z'')\| \le \alpha_1 \|A_1 + A_2\| \|A_1 - A_2\| \quad +$$

$$
\begin{aligned}
&+\alpha_2\|A_1-A_1\|+\frac{4g_0}{\ell}\left\|\sum{}'\int_0^t|z'-z''|e^{\frac{\pi^2}{\ell^2}n^2(\tau-t)}d\tau\right\| \le\\
&\le\|z'-z''\|\cdot\left(\alpha_1\|A_1+A_2\|\delta+\alpha_2\delta+4g_0\ell\Psi(\delta)/\pi^2\right) = L\|z'-z''\|.
\end{aligned}
$$

Здесь L должно быть меньше 1, тогда оператор F будет сжимающим. Поскольку $\delta\le a\le a^*$, то в силу ограничения (19)

$$L\le\alpha_1\delta\|A_1+A_2\|_{C[I']}+1/9+1/3=\delta\alpha_1\|A_1+A_2\|_{C[I']}+4/9<1,$$

откуда, по вышеизложенной технике, получается условие

$$\delta<\frac{5}{9\alpha_1\|A_1+A_2\|}\le\frac{5}{9\alpha_1(\|A_1\|+\|A_2\|)}\le\frac{5}{18\alpha_1 H},$$

где $H=M+Ba$ (столь грубая оценка норм решений выбрана из соображений универсальности). Можно взять $\delta=\min(1/(18\alpha_1 H),a)$. Необходимо заметить, что так δ определяется, кроме априори заданных констант, только свойствами решений z_1, z_2 на всем отрезке I', на котором они заданы вместе. В силу единственности неподвижной точки оператора F $z_1\equiv z_2$ $\forall t\in[0,\delta]$. Аналогично решения совпадают и на отрезке $[\delta,2\delta]$ и так далее. В силу универсальности δ они совпадают на всем отрезке I'. Надо оговорить, что совпадают, строго говоря, производные $z=dA/dt$. Но так как у любых двух решений на I' одинаковы начальные данные, то вслед за производными они совпадают и сами. Доказана

Теорема 2. *Построенное на I в теореме 1 решение A единственно в предположениях теоремы 1.*

Таким образом, краевая задача (1)-(4), а следовательно, и поставленная в начале работы задача имеют единственное классическое решение на достаточно малом промежутке времени. Вопросы о продолжимости и гладкости решений требуют отдельного рассмотрения.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность доктору физ.-мат. наук Ю. В. Заике за постановку задачи и неоценимую помощь в работе.

Résumé

In the paper the model of termodesorbtion spectometry method of studying gas transfer in solids is considered. The model considers not only diffusion, but also complex physical and chemical processes on the surface, which lead us to the boundary-value problem with non-classical boundary conditions. The existance and uniqueness of the classical (differentiable) solution of the problem is proved.

Литература

[1] Габис И. Е., Компаниец Т. Н., Курдюмов А. А. *Поверхностные процессы и проникновение водорода сквозь металлы*// Взаимодействие водорода с металлами/ Под ред. А. П. Захарова. М.: Наука, 1987, С. 177–206.

[2] Габис И. Е., Курдюмов А. А., Тихонов Н. А. *Установка для проведения комплексных исследований по взаимодействию газов с металлами*// Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 4. Вып. 2. 1993. С. 77–79.

[3] Габис И. Е. *Перенос водорода в металлах Iб группы и тонкопленочных системах полупроводник-металл.* Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. СПб. 1995.

[4] Заика Ю. В. *Разрешимость уравнений модели переноса газа сквозь мембраны с динамическими граничными условиями*// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1996. Т. 36. № 12. С. 108–120.

[5] Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-meil: chernov@karelia.ru