Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 8, 2001

УДК 517

ЛИНЕЙНО-ИНВАРИАНТНЫЕ СЕМЕЙСТВА, ОБОБЩАЮЩИЕ U'_α И U^*_α

В. В. Старков, З. Ю. Якубовский

Понятие линейно-инвариантного семейства было введено Ch. Pommerenke в 1964 г. Весьма полезными в теории линейно-инвариантных семейств оказались изучавшиеся позднее линейно-инвариантные семейства U'_α и U^*_α функций, имеющих интегральное представление. В этой статье мы вводим новое линейно-инвариантное семейство функций, представимых интегралом Стилтьеса, более широкое, чем U'_α и U^*_α.

Множество $\mathfrak{M}$ аналитических в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n(f)z^n$ называется линейно-инвариантным семейством (л.-и.с.), если для любой функции $f \in \mathfrak{M}$ выполнены два условия (см.[1]):

1) $f'(z) \neq 0 \; \forall z \in \Delta$ (локальная однолистность),

2) для любого конформного автоморфизма $\varphi(z) = e^{i\Theta}\dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$ $(a \in \Delta, \Theta \in \mathbb{R})$ единичного круга Δ
$\Lambda_\varphi[f](z) = \dfrac{f(\varphi(z)) - f(\varphi(0))}{f'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + ... \in \mathfrak{M}.$

Интерес к этим семействам (л.-и.с.) вызван тем, что многие известные классы конформных отображений являются л.-и.с. и обладают рядом свойств, общих для всех таких семейств. Порядком л.-и.с. $\mathfrak{M}$ называется число

$$\operatorname{ord}\mathfrak{M} = \sup_{\mathfrak{f}\in\mathfrak{M}} |\mathfrak{a}_2(\mathfrak{f})|.$$

В [1] доказано, что $\operatorname{ord}\mathfrak{M} \geq 1$. Класс $\mathcal{K}$ выпуклых функций, однолистно отображающих круг Δ на выпуклые области, является примером л.-и.с. и $\operatorname{ord}\mathcal{K} = 1$; класс S однолистных аналитических в Δ функций указанного вида также является л.-и.с., $\operatorname{ord} S = 2$, поскольку $sup|a_2(f)| = 2$ (см. [2]). Универсальным линейно-инвариантным семейством порядка α в [1] называется объединение всех л.-и.с. $\mathfrak{M}$, для которых $\operatorname{ord}\mathfrak{M} \leq \alpha$; оно обозначается U_α. В [1] доказано, что $U_1 = \mathcal{K}$, при $\alpha > 1$ семейства U_α уже содержат бесконечнолистные функции.

Универсальные л.-и.с. U_α являются, вообще говоря, трудными для исследования объектами; для получения информации об этих семействах в [3,4] вводились и изучались л.-и.с. $\mathcal{U}'_\alpha$ порядка α.

Определение 1. *Аналитическая в $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функция $f(z) = z + \ldots$ принадлежит л.-и.с. U'_α тогда и только тогда, когда*

$$f'(z) = exp\left[-2\int_0^{2\pi} log(1 - ze^{it})d\mu(t)\right],$$

где μ—комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi)$, удовлетворяющая условию

$$\left|\int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)\right| \leq \alpha \qquad (\alpha \geq 1).$$

Множество таких функций μ обозначим I'_α.

Разработанный в U'_α вариационный метод позволил решить ряд задач не только в U'_α, но и в универсальных л.-и.с. U_α. Однако известный класс почти выпуклых функций C (см. [5,6]) не содержался в U'_α ни при каком $\alpha \geq 1$. Для получения л.-и.с., содержащих класс C и обобщающих C, в [7,9] были введены и изучались л.-и.с. U^*_α порядка α.

Определение 2. $U^*_\alpha, \alpha \geq 1$, — *множество всех аналитических в Δ функций $f(z) = z + \ldots$:*

$$f'(z) = s'(z)exp\left[-2\int_0^{2\pi} log(1 - w(z)e^{it})d\nu(t)\right], \qquad (1)$$

где $s \in \mathcal{K}$, $w \in \Omega$ *— класс аналитических в* Δ *функций, удовлетворяющих условиям;* $w(0) = 0, |w(z)| < 1$, ν*— комплекснозначная функция ограниченной вариации на* $[0; 2\pi)$, *для которой*

$$\int_0^{2\pi} d\nu(t) = 0, \int_0^{2\pi} |d\nu(t)| \le \alpha - 1, \tag{2}$$

т. е. $\nu \in I^*_\alpha$.

Очевидно, $U_1 = U'_1 = U^*_1 = \mathcal{K}$. Но ни при каком $\alpha > 1$ семейства U'_α и U^*_α не совпадают и не являются подсемействами друг друга.

В этой статье мы вводим л.-и.с. U^+_α порядка α, $U^+_\alpha \not\subset U'_\alpha$ и $U^+_\alpha \not\subset U^*_\alpha$ при $\alpha > 1$.

Фиксируем $\alpha \ge 1$ и $\lambda \in [0; 1]$.

Определение 3. *Будем говорить, что аналитическая в* Δ *функция* $f(z) = z + ...$ *принадлежит семейству* U^λ_α, *если*

$$f'(z) = g'(z) \exp[-2 \int_0^{2\pi} \log(1 - w(z)e^{it}) d\nu(t)],$$

где $g \in U'_{\alpha_1}$, $\alpha_1 - 1 = (\alpha - 1)(1 - \lambda)$; $w \in \Omega, \nu \in I^*_{\alpha_2}$ $\alpha_2 - 1 = (\alpha - 1)\lambda$.

Очевидно, $U^\lambda_1 = \mathcal{K}$ для $\lambda \in [0, 1]$.

Определение 4. $U^+_\alpha = \bigcup\limits_{\lambda \in [0,1]} U^\lambda_\alpha$, $\alpha \ge 1$.

Теорема 1. U^+_α *— л.-и.с. порядка* α.

Доказательство. Пусть $f \in U^+_\alpha$, тогда $f \in U^\lambda_\alpha$ для некоторого λ. Из определения 3 следует, что для каждого λ семейство U^λ_α инвариантно относительно преобразования вращения $f(z) \to f(ze^{i\varphi})e^{-i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$. Поэтому для доказательства линейной инвариантности U^+_α достаточно показать, что для любого $a \in \Delta$

$$f(z, a) = \frac{f\left(\dfrac{z + a}{1 + \bar{a}z}\right) - f(a)}{f'(a)(1 - |a|^2)} \in U^+_\alpha.$$

Имеем:

$$f'_z(z,a)=\frac{f'\big(\dfrac{z+a}{1+\bar az}\big)}{f'(a)(1+\bar az)^2}=\frac{g'\Big(\dfrac{z+a}{1+\bar az}\Big)}{g'(a)(1+\bar az)^2}\times$$

$$\times\exp\Bigg[-2\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-w(\dfrac{z+a}{1+\bar az})e^{it}}{1-w(a)e^{it}}d\nu(t)\Bigg]=$$

$$=g_1'(z)\exp\Bigg[-2\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-w_1(z)e^{it}}{1-w_1(0)e^{it}}d\nu(t)\Bigg],\qquad \nu\in I^*_{\alpha_2},$$

где $g_1\in U'_{\alpha_1}$ (это следует из линейной инвариантности U'_{α_1}).

$$w_1(z)=w\left(\frac{z+a}{1+\bar az}\right)=\frac{w_1(0)+w_0(z)}{1+\overline{w_1(0)}w_0(z)},\quad w_0(0)=0,\quad |w_0(z)|<1 \text{ в } \Delta.$$

Поскольку $\nu\in I^*_{\alpha_2}$, то из (2) следует, что $\int\limits_0^{2\pi}d\nu(t)=0$ и

$$\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-w_1(z)e^{it}}{1-w_1(0)e^{it}}d\nu(t)=\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-\dfrac{w_1(0)+w_0(z)}{1+\overline{w_1(0)}w_0(z)}e^{it}}{1-w_1(0)e^{it}}d\nu(t)=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1+\overline{w_1(0)}w_0(z)-w_1(0)e^{it}-w_0(z)e^{it}}{1-w_1(0)e^{it}}d\nu(t)=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\log\left[1-w_0(z)\frac{e^{it}-\overline{w_1(0)}}{1-w_1(0)e^{it}}\right]d\nu(t)=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi}\log(1-w_0(z)e^{i\varphi})d\nu(t(\varphi)).$$

Здесь обозначено $e^{i\varphi}=e^{i\varphi(t)}=\dfrac{e^{it}-\overline{w_1(0)}}{1-w_1(0)e^{it}}$, $[\varphi_0;\varphi_0+2\pi)$ — множество значений функции $\varphi(t)$ при $t\in[0;2\pi)$, $t(\varphi)$— обратная функция к $\varphi(t)$. Обозначим $\nu_1(\varphi)=\nu(t(\varphi))$. Если $\nu(t)$ удовлетворяет условию (2), то и после периодического продолжения (с периодом 2π) на $\mathbb{R}$ она будет удовлетворять условию (2) на любом промежутке

$[\varphi_0;\varphi_0+2\pi)$ и функция (1) не изменится при замене промежутка интегрирования $[0;2\pi)$ на $[\varphi_0;\varphi_0+2\pi)$. Поэтому $\int\limits_0^{2\pi}\log\frac{1-w_1(z)e^{it}}{1-w_1(0)e^{it}}d\nu(t)=$ $\int\limits_0^{2\pi}\log(1-w_0(z)e^{i\varphi})d\nu_1(\varphi)$, $\nu_1\in I^*_{\alpha_2}$. Это доказывает линейную инвариантность U^λ_α. Следовательно, $\bigcup\limits_{\lambda\in[0,1]}U^\lambda_\alpha=U^+_\alpha$— л.-и.с.

Покажем, что $\operatorname{ord}U^+_\alpha=\alpha$. Достаточно доказать (см. [1]), что при фиксированном α

$$\sup_{z\in\Delta}\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|=\operatorname{ord}f\le\alpha\quad\forall f\in U^\lambda_\alpha.$$

Из определения 3 вытекает, что

$$\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|=\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{g''(z)}{g'(z)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-|z|^2}{2}\left(-2\int\limits_0^{2\pi}\frac{w'(z)e^{it}}{1-w(z)e^{it}}d\nu(t)\right)\right|\le$$
$$\le\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{g''(z)}{g'(z)}\right|+(1-|z|^2)\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{w'(z)e^{it}}{1-w(z)e^{it}}d\nu(t)\right|. \tag{3}$$

Первый модуль в выражении (3) не превосходит α_1, т. к. $g\in U'_{\alpha_1}$ и $\alpha_1=\operatorname{ord}U_{\alpha_1}=\sup\limits_{z\in\Delta}\left|-\bar z+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{g''(z)}{g'(z)}\right|$, см. [1].

Поскольку $\int\limits_0^{2\pi}d\nu(t)=0$, то

$$\left|\int_0^{2\pi}\frac{w'(z)e^{it}}{1-w(z)e^{it}}d\nu(t)\right|=\frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2}\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-|w(z)|^2)e^{it}}{1-w(z)e^{it}}d\nu(t)\right|=$$
$$=\frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2}\left|\int\limits_0^{2\pi}\left(\overline{w(z)}-\frac{\overline{w(z)}-e^{it}}{1-w(z)e^{it}}\right)d\nu(t)\right|=$$

$$= \frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2}\left|\int_0^{2\pi} \frac{\overline{w(z)}-e^{it}}{1-w(z)e^{it}}d\nu(t)\right| \le \frac{|w'(z)|}{1-|w(z)|^2}\int_0^{2\pi}|d\nu(t)| \le \frac{\alpha_2-1}{1-|z|^2}$$

по (2) и обобщенной лемме Шварца. Следовательно, для любого $z\in\Delta$ левая часть неравенства (3) не превосходит величины $(\alpha_1-1)+1+(\alpha_2-1)=1+(\alpha-1)(1-\lambda)+(\alpha-1)\lambda=\alpha$. Теорема 1 доказана. □

Замечание 1. При $\lambda=0$ $U^0_\alpha=U'_\alpha$, следовательно, $U'_\alpha\subset U^+_\alpha$.

Замечание 2. При $\lambda=1$ $U^1_\alpha=U^*_\alpha$, следовательно, $U^*_\alpha\subset U^+_\alpha$.

Ясно, что введенные здесь семейства U^+_α не уже U'_α и U^*_α . Следующая теорема утверждает, что при $\alpha>1$ семейство U^+_α шире U'_α и U^*_α.

Теорема 2. *Для каждого $\alpha>1$ и $\lambda\in(0;1)$ существует такая фукция $f_\lambda\in U^\lambda_\alpha$, что $f_\lambda\notin U'_\alpha$ и $f_\lambda\notin U^*_\alpha$.*

Доказательство. При $\alpha>1$ фиксируем $\lambda\in(0;1)\,,\alpha_1=1+(\alpha-1)(1-\lambda)$.

Для $n\in\mathbb{N}, n\ge 2$ обозначим

$$t_1=-\frac{\arg(1-i\sqrt{\alpha_1^2-1})}{n},\quad t_2=-\frac{\arg(1+i\sqrt{\alpha_1^2-1})}{n}.$$

Если $g'(z)=(1-ze^{it_2})^{-1-i\sqrt{\alpha_1^2-1}}\,(1-ze^{it_1})^{-1+i\sqrt{\alpha_1^2-1}}$, то $g\in U'_{\alpha_1}$— ей в интегральном представлении соответствует $\mu(t)\in I'_{\alpha_1}, \mu-$ ступенчатая функция с 2 разрывами в t_1 и t_2,

$$d\mu(t_1)=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{\alpha_1^2-1}),\quad d\mu(t_2)=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{\alpha\_^2 1-1}).$$

В качестве $\nu\in I^*_{\alpha_2}$ в определении 3 возьмем ступенчатую функцию с 2 разрывами в точках $t=0$ и $t=\pi$,

$$d\nu(0)=\frac{i}{2}(\alpha_2-1),\ d\nu(\pi)=-\frac{i}{2}(\alpha_2-1).$$

В качестве $w(z)$ возьмем $(e^{it_2}z)^n$. По определению 3 функция

$$f'_\lambda(z)=(1-ze^{it_1})^{i\sqrt{\alpha_1^2-1}-1}(1-ze^{it_2})^{-i\sqrt{\alpha_1^2-1}-1}\left(\frac{1-(ze^{it_2})^n}{1+(ze^{it_2})^n}\right)^{(\alpha_2-1)i}$$

принадлежит U^λ_α.

Обозначим $\{\varphi\}_n$ — n-й коэффициент Тейлора аналитичной в Δ функции φ.

$$\begin{gathered}\{\log g'\}_n = (1+i\sqrt{\alpha_1^2-1})e^{int_2}\frac{1}{n} + (1-i\sqrt{\alpha_1^2-1})e^{int_1}\frac{1}{n} = \\ = \frac{1}{n}\left(\left|1+i\sqrt{\alpha_1^2-1}\right| + \left|1-i\sqrt{\alpha_1^2-1}\right|\right) = \frac{2\alpha_1}{n}, \\ \{\log h\}_n = i(\alpha_2-1)2e^{int_2} = i(\alpha_2-1)2e^{-i\arg(1+i\sqrt{\alpha_1^2-1})}.\end{gathered}$$

Тогда

$$\begin{gathered}|\{\log f'_\lambda\}_n| = |\{\log g'\}_n + \{\log h\}_n| = 2\left|\frac{\alpha_1}{n}e^{i\arg(1+i\sqrt{\alpha_1^2-1})} + (\alpha_2-1)i\right| \\ = 2\sqrt{(\frac{\alpha_1}{n}\frac{1}{\alpha_1})^2 + (\frac{\sqrt{\alpha_1^2-1}}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{n} + \alpha_2 - 1)^2},\end{gathered}$$

т. к.

$$e^{i\arg(1+i\sqrt{\alpha_1^2-1})} = \frac{1}{\alpha_1} + i\frac{\sqrt{\alpha_1^2-1}}{\alpha_1}.$$

Следовательно,

$$|\{\log f'_\lambda\}_n| = \frac{2}{n}\sqrt{\alpha_1^2 + 2n(\alpha_2-1)\sqrt{\alpha_1^2-1} + n^2(\alpha_2-1)^2}. \tag{4}$$

Проверим, что правая часть (4) больше $\dfrac{2\alpha}{n} = \max\limits_{f\in U'_\alpha}|\{\log f\}_n|$ (см.[3]) при достаточно больших n; это будет означать, что $f_\lambda \notin U'_\alpha$.

Обозначим $x = \alpha - 1 > 0$. Нужно проверить, что

$$\begin{gathered}(1+x(1-\lambda))^2 + 2nx\lambda\sqrt{x(1-\lambda)(2+x(1-\lambda))} + \\ +n^2x^2\lambda^2 > \alpha^2 = x^2+2x+1 \iff \\ 2nx\lambda\sqrt{x(1-\lambda)(2+x(1-\lambda))} > x^2(1-n^2\lambda^2 - \\ -(1-\lambda)^2) + 2x\lambda = 2x\lambda + x^2(2\lambda - \lambda^2 - \lambda^2 n^2) = \\ = x\lambda[2 + x(2-\lambda-\lambda n^2)].\end{gathered} \tag{5}$$

Последнее неравенство будет выполняться, если правая часть (5) отрицательна, т. е. $2 + x(2-\lambda-\lambda n^2) < 0 \iff (\dfrac{2}{x}+2)\dfrac{1}{\lambda} < n^2+1$, а это неравенство справедливо для достаточно больших n.

Покажем, что $f_\lambda \notin U_\alpha^*$.

$$\operatorname{Arg} g'(re^{-it_2}) = \sqrt{\alpha_1^2 - 1}\log\frac{1}{1-r} + O(1)$$

и

$$\operatorname{Arg} h(re^{-it_2}) = \operatorname{Arg}\left[\left(\frac{1+r^n}{1-r^n}\right)^{(\alpha_2-1)i}\right] =$$
$$= (\alpha_2 - 1)\ln\frac{1+r^n}{1-r^n} = (\alpha_2-1)\ln\frac{1}{1-r} + O(1)$$

при $r \to 1-$. Поэтому при $r \to 1-$

$$\operatorname{Arg} f_\lambda'(re^{-it_2}) = \ln\frac{1}{1-r}(\sqrt{\alpha_1^2-1} + \alpha_2 - 1) + O(1). \tag{6}$$

Известно (см. [7]), что при $|z| = r \in (0,1)$, $r \to 1-$

$$\max_{f\in U_\alpha^*} \operatorname{Arg} f'(z) = (\alpha-1)\ln\frac{1+r}{1-r} + 2\arcsin r = (\alpha-1)\ln\frac{1}{1-r} + O(1). \tag{7}$$

Покажем, что правая часть (6) больше правой части (7). Это будет означать, что $f_\lambda \notin U_\alpha^*$. Достаточно проверить, что $\sqrt{\alpha_1^2-1} + \alpha_2 - 1 > \alpha - 1$, т. е. $\sqrt{(\alpha-1)(1-\lambda)(2+(\alpha-1)(1-\lambda))} + (\alpha-1)\lambda > \alpha - 1$, что равносильно $\sqrt{2+(\alpha-1)(1-\lambda)} > \sqrt{(\alpha-1)(1-\lambda)}$. Очевидность последнего неравенства доказывает теорему 2. □

Следствие. *Существует вещественный функционал $F(f)$, минимум которого в U_α^+ достигается на функции $f_0(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n^0 z^n \in U_\alpha^+$, причем $f_0 \notin U_\alpha', U_\alpha^*$.*

Действительно, по теореме 2 существует такая функция $f_0 \in U_\alpha^+$, что $f_0 \notin U_\alpha'$, $f_0 \notin U_\alpha^*$. Поэтому функционал

$$F(f) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|a_n - a_n^0|}{n^{\alpha+1}}$$

обладает нужным свойством.

Résumé

The idea of linearly invariant families was introduced by Ch. Pommerenke in 1964. In the theory of linearly invariant families the later considered linearly invariant families U'_α and U^*_α of functions having an integral representation turned out to be especially interesting. In the paper we introduce a new linearly invariant family of functions given by Stieltjes integral. This family is wider than U'_α and U^*_α.

Библиографический список

[1] Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.I*// Math. Ann. 1964. Hf.155. P. 108–154.

[2] Paatero V. *Über die Konforme Abbildung von Gebieten deren Rander von beschrankter Drehung sind*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1931. V. 33. P. 1–78.

[3] Paatero V. *Über Gebiete von beschrankter Randdrelung*// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1933. V. 37. P. 9.

[4] Старков В. В. *О некоторых подклассах линейно-инвариантных семейств, имеющих интегральное представление.* Деп. в ВИНИТИ. 1981. № 3341-81. 46 с.

[5] Старков В. В. *О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление* // Изв. вузов. Математика. 1983. № 5. С. 82–85.

[6] Старков В. В., Димков Г. М. *Об одном линейно-инвариантном семействе, обобщающем класс близких к выпуклым функций* // Докл. Болгарской АН. 1985. Т. 38. № 8. С. 967–968.

[7] Dimkov G. M., Starkov V. V. *Le problème de coefficients dans une classe de fonctions localement univalentes* // Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowskaю. Sect. A. 1988. V. 42. P. 9–15.

[8] Godula J., Starkov V. V. *On Jakubowski functional in* $\mathcal{U}^*_\alpha$ // Zeszyty Nauk Politech. Rzeszowskiej. 1989. V. 60. P. 37–43.

[9] Bieberbach L. *Uber die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln* // S.B. Preuss. Acad. Wiss. 1916. V. 138. P. 940–955.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: starkov@petrsu.ru

Лодзинский университет,
Институт математики,
90-238 Польша, Лодзь, ул. Банаха, 22
E-mail: zjakub@imul.math.uni.lodz.pl