Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 9, 2002

УДК 517.55

О НЕТОЧНОСТЯХ В "ТОЧНЫХ" ОЦЕНКАХ ДЛЯ БИГОЛОМОРФНЫХ ВЫПУКЛЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

П. Личберский, В. В. Старков

Рассматривается класс K_n, $n \in \mathbb{N}$, биголоморфных отображений f единичного шара $\mathbb{B}^n$ на выпуклые области, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$. Известное в классическом случае $n = 1$ точное неравенство $(1+|z|)^{-2} \le |f'(z)| \le (1-|z|)^{-2}, \quad z \in \mathbb{B}^1$, обобщалось разными авторами на многомерный случай с утверждением о точности соответствующих неравенств. Однако утверждение о точности таких неравенств в ряде случаев ошибочно. Заметка нацелена на выявление таких случаев.

Обозначим $K = K_1$ класс всех голоморфных и однолистных в круге $\mathbb{B}^1 = \{z : |z| < 1\}$ функций $\varphi(z) = z + \dots$, отображающих этот круг на выпуклые области. Для таких функций известна точная оценка (теорема искажения):

$$(1+|z|)^{-2} \le |\varphi'(z)| \le (1-|z|)^{-2}, \quad z \in \mathbb{B}^1; \tag{1}$$

равенство здесь достигается для функции $\varphi_0(z) = \dfrac{z}{1-z} \in K_1$ (в правой части (1) — при $z = |z|$, в левой — при $z = -|z|$).

Обозначим $\mathbb{B}^n$ евклидов шар в $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{B}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : ||z|| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2} < 1\},$$

K_n — множество всех таких биголоморфных отображений f шара $\mathbb{B}^n$ на выпуклые области в $\mathbb{C}^n$, что $f(0) = 0, Df(0) = I$ — единичная матрица. Здесь $n \in \mathbb{N}$, при $n = 1$ это определение становится классическим определением упомянутого выше класса K_1. Богатое подмножество класса K_n удалось описать Ропэру и Саффриджу [1]. При $1 < n \in \mathbb{N}$ они сконструировали класс $\mathcal{K}_n$ отображений

$$f(z) = (\varphi(z_1), z_2\sqrt{\varphi'(z_1)}, \ldots, z_n\sqrt{\varphi'(z_1)}), \quad \varphi \in K_1, \quad \sqrt{1} = 1,$$

и показали, что $\mathcal{K}_n \subset K_n$, но $\mathcal{K}_n \neq K_n$. Личберский [2], Пфальтцграфф и Саффридж [3] получили естественное обобщение правой части неравенства (1) для отображений $f \in K_n$:

$$||Df(z)|| \leq \frac{1}{(1-||z||)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n,$$

неравенство точное и достигается для отображения

$$f_0(z) = (\varphi_0(z_1), z_2\sqrt{\varphi_0'(z_1)}, \ldots, z_n\sqrt{\varphi_0'(z_1)}) \in \mathcal{K}_n \subset K_n.$$

Более того, в [3] была получена, казалось бы, очень естественная (сравни с (1)) нижняя оценка

$$\frac{1}{(1+||z||)^2} \leq ||Df(z)||, \quad z \in \mathbb{B}^n, \tag{2}$$

и утверждалось, что это неравенство точное и равенство достигается для отображения $f_0(z)$. В [4] Хамада и Коор идут еще далее, они выдвигают гипотезу о справедливости неравенства (2) в любом комплексном гильбертовом пространстве.

В действительности, в [5] мы показали следующее:

1) отображение $f_0(z)$ не реализует равенства в (2) ни для какого $z \neq 0$;

2) неравенство (2) является точным в $\mathbb{B}^n$ только при $n = 1$;

3) если в K_n при каком-нибудь вещественном k справедливо точное неравенство $\frac{1}{(1+||z||)^k} \leq ||Df(z)||$ (хотя бы для z из малой окрестности нуля), то $k \leq \sqrt{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{n}$;

4) пусть $1 < n \in \mathbb{N}$ и $\gamma_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n\sqrt{2}}$, тогда для любого отображения $f \in K_n$ при $||z|| \in (0, 0.917)$, $z \in \mathbb{C}^n$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{(1+||z||)^2} < \frac{(1-||z||)^{\gamma_n-(n+1)/(2n)}}{(1+||z||)^{\gamma_n+(n+1)/(2n)}} \leq ||Df(z)||;$$

5) для всех $f \in \mathcal{K}_n$ и любого z из некоторой достаточно малой окрестности нуля справедливо точное неравенство $\dfrac{1}{1+||z||} \leq ||Df(z)||$, равенство реализуется для отображения f_0, а именно:

$$\min_{||z||=r} ||Df_0(z)|| = \frac{1}{1+r}.$$

Таким образом, в отличие от точной верхней оценки $||Df(z)||, f \in K_n$, точная нижняя оценка этой нормы ведет себя "не регулярно" при различных значениях n. Естественно встает вопрос о значении такой точной нижней оценки. Сформулированное в п. 5 утверждение привело нас к следующей гипотезе.

Гипотеза 1 [5]. *Для* $1 < n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{f \in \mathcal{K}_n} ||Df(z)|| = \frac{1}{1+||z||}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Для $f \in K_n$ и фиксированного $z \in \mathbb{B}^n$ обозначим $\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$ собственные значения эрмитовой матрицы $(Df(z))^* Df(z)$; $\lambda_n > 0$, т. к. матрица $Df(z)$ — не особенная. Тогда $\sqrt{\lambda_1} = ||Df(z)||$, поэтому получение точной нижней оценки для $||Df(z)||$ давало бы информацию о множестве значений λ_1. Однако более важным вопросом, как считают авторы в [3], является вопрос оценки снизу значений $\sqrt{\lambda_n} = \min\limits_{||w||=1} ||Df(z)w||$. В связи с этим в [3] авторы формулируют следующую гипотезу для отображений из K_n :

Гипотеза 2 [3]. *Для* $1 < n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{||w||=1, f \in K_n} ||Df(z)w|| = \frac{1}{(1+||z||)^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

В [6] мы доказываем нашу гипотезу 1 и опровергаем гипотезу 2, причем оказывается, что

$$\inf_{||w||=1, f \in K_n} ||Df(z)w|| \longrightarrow 0$$

при $||z|| \to 1$, т. е. собственные числа $\lambda_n = \lambda_n(z)$ не отделены от нуля в $\mathbb{B}^n$. Остается открытой наша

Гипотеза 3 [5]. *Для* $1 < n \in \mathbb{N}$

$$\inf_{f \in K_n} ||Df(z)|| = \frac{1}{1+||z||}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Переходим к анализу одного утверждения из монографии Гонга [7]. Там в теореме 6.1.1 для отображений $f \in K_n$ устанавливается неравенство

$$\left(\frac{1-||z||}{1+||z||}\right)^2 G(z) \le Df(z)\overline{Df(z)'} \le \left(\frac{1+||z||}{1-||z||}\right)^2 G(z), \quad z \in \mathbb{B}^n, \quad (3)$$

где

$$G(z) = \left[\frac{(1-||z||)^2 \delta_{ij} + \overline{z_i} z_j}{\left(1-||z||^2\right)^2}\right]_{1 \le i,j \le n},$$

и утверждается точность этого неравенства. В (3) неравенство $A \le B$ между эрмитовыми матрицами A и B следует понимать так:

$$\langle Ax, x\rangle \le \langle Bx, x\rangle \quad \forall x \in \mathbb{C}^n,$$

т. е. $\overline{x'}Ax \le \overline{x'}Bx$ для всех $x \in \mathbb{C}^n$ (здесь $\langle z, w\rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n), \quad w = (w_1, \ldots, w_n)$). Для фиксированного $z \in \mathbb{B}^n$ введем обозначения для записанных в (3) эрмитовых матриц:

$$L = \left(\frac{1-||z||}{1+||z||}\right)^2 G(z), \quad F = Df(z)\overline{(Df(z))'}, \quad U = \left(\frac{1+||z||}{1-||z||}\right)^2 G(z).$$

Тогда (3) можно записать в виде

$$\langle Lx, x\rangle \le \langle Fx, x\rangle \le \langle Ux, x\rangle, \quad x \in \mathbb{C}^n. \quad (4)$$

Обозначим $\lambda_j(L), \lambda_j(F), \lambda_j(U), j = 1, \ldots, n$, собственные значения матриц L, F, U соответственно. Все эти собственные значения положительны, т. к. эрмитовы матрицы L, F, U — невырожденные. Как и раньше, занумеруем собственные значения в порядке их убывания, т. е. для невырожденной эрмитовой матрицы A

$$0 < \lambda_n(A) \le \ldots \le \lambda_1(A).$$

Как известно,

$$\lambda_n(A) = \min_{||x||=1} \langle Ax, x\rangle\,, \quad \lambda_1(A) = \max_{||x||=1} \langle Ax, x\rangle\,.$$

Поэтому из (4) следует, что

$$\lambda_n(L) \le \lambda_n(F) \le \lambda_n(U), \quad \lambda_1(L) \le \lambda_1(F) \le \lambda_1(U).$$

Поскольку

$$\lambda_n(F) = \min_{||x||=1} ||Df(z)x||^2\,, \quad \lambda_1(F) = \max_{||x||=1} ||Df(z)x||^2 = ||Df(z)||^2\,,$$

то

$$\lambda_n(L) \le \min_{||x||=1} ||Df(z)x||^2 \le \lambda_n(U), \tag{5}$$

$$\lambda_1(L) \le \max_{||x||=1} ||Df(z)x||^2 = ||Df(z)||^2 \le \lambda_1(U). \tag{6}$$

Простой подсчет показывает, что

$$\lambda_n(L) = \min_{||x||=1} \langle Lx, x\rangle = \frac{1-||z||^2}{(1+||z||)^4}, \lambda_n(U) = \min_{||x||=1} \langle Ux, x\rangle = \frac{1-||z||^2}{(1-||z||)^4},$$

$$\lambda_1(L) = \max_{||x||=1} \langle Lx, x\rangle = \frac{1}{(1+||z||)^4}, \lambda_1(U) = \max_{||x||=1} \langle Ux, x\rangle = \frac{1}{(1-||z||)^4}.$$

Поэтому неравенства (5) и (6) примут соответственно вид

$$\frac{1-||z||^2}{(1+||z||)^4} \le \min_{||x||=1} ||Df(z)x||^2 \le \frac{1-||z||^2}{(1-||z||)^4}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{(1+||z||)^4} \le \max_{||x||=1} ||Df(z)x||^2 = ||Df(z)||^2 \le \frac{1}{(1-||z||)^4}. \tag{8}$$

Для иллюстрации точности неравенства (3) Гонг [7, с. 146–147] декларирует точность неравенств (7) и (8). При этом он ограничивается случаем $n = 2$, поэтому мы в дальнейшем тоже ограничимся этим частным случаем. Именно Гонг приводит пример ранее упоминавшегося отображения

$$f_0(z) = \left(\frac{z_1}{1-z_1}, \frac{z_2}{1-z_1}\right) \in \mathcal{K}_2, \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

этому отображению соответствует матрица

$$F = F_0(z) = Df_0(z)\overline{Df_0(z)'} = \frac{1}{|1-z_1|^4}\begin{bmatrix} 1 & \overline{z_2} \\ z_2 & |z_2|^2 + |1-z_1|^4 \end{bmatrix}.$$

Гонг утверждает, что $\lambda_1(F_0) = \lambda_1(L)$ (т. е. в левой части (8) достигается равенство) при $z_2 = 0$ и $z_1 = -r$, $r \in [0,1)$. Однако, как уже отмечалось выше, это не так, и неравенство в левой части (8) не является точным. Собственные значения же для F_0 имеют вид

$$\lambda_2(F_0) =$$

$$= \frac{1 + |z_2|^2 + |1-z_1|^2 - \sqrt{\left(1 + |z_2|^2 + |1-z_1|^2\right)^2 - 4|z_2|^2\,|1-z_1|^2}}{2\,|1-z_1|^4},$$

$$\lambda_1(F_0) =$$

$$= \frac{1 + |z_2|^2 + |1-z_1|^2 + \sqrt{\left(1 + |z_2|^2 + |1-z_1|^2\right)^2 - 4|z_2|^2\,|1-z_1|^2}}{2\,|1-z_1|^4};$$

в общем случае (для произвольных $n \in \mathbb{N}$) они вычислены в [6]. В частности, при $z_2 = 0$ и $z_1 = -r = -||z||$ получаем:

$$\lambda_1(L) = \frac{1}{(1+||z||)^4} \neq \frac{1}{(1+||z||)^2} = \lambda_1(F_0),\ z = (-\,||z||\,, 0) \in \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}.$$

Для "доказательства" точности неравенства (7) (тоже в случае $n = 2$) Гонг [7, с. 146–147] приводит пример выпуклого отображения

$$f_*(z) = \left(\frac{z_1}{1-z_2}, \frac{z_2}{1-z_2}\right), \quad z = (z_1, z_2) \in \mathbb{B}^2,$$

и утверждает, что

$$\lambda_2(U) = \lambda_2(F_*),\ \text{где}\ F_* = Df_*(z)\overline{(Df_*(z))'}$$

при $z_1 = 0,\ z_2 = r \in [0,1)$, и $\lambda_2(L) = \lambda_2(F_*)$ при $z_1 = 0,\ z_2 = -r$.

Однако, как и в случае матрицы F_0, вычисление собственных значений F_* приводит к выражениям:

$$\lambda_2(F_*) =$$

$$= \frac{1+|z_1|^2+|1-z_2|^2-\sqrt{\left(1+|z_1|^2+|1-z_2|^2\right)^2-4|z_1|^2\,|1-z_2|^2}}{2\,|1-z_2|^4},$$

$$\lambda_1(F_*) =$$

$$= \frac{1+|z_1|^2+|1-z_2|^2+\sqrt{\left(1+|z_1|^2+|1-z_2|^2\right)^2-4|z_1|^2\,|1-z_2|^2}}{2\,|1-z_2|^4}.$$

Откуда при $z = (\|z\|\,,0) \in \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$ получаем:

$$\lambda_2(F_*) = \frac{1}{(1-\|z\|)^2} \neq \frac{1-\|z\|^2}{(1-\|z\|)^4} = \lambda_2(U)$$

и

$$\lambda_2(L) = \frac{1-\|z\|^2}{(1+\|z\|)^4} \neq \frac{1}{(1+\|z\|)^4} = \lambda_2(F_*) \text{ при } z = (-\|z\|\,,0) \in \mathbb{B}^2\setminus\{0\}.$$

Таким образом, вопрос о точности неравенства (7) остается открытым.

Résumé

In this paper there is considered the family K^n, $n \in \mathbb{N}$, of all f, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$, which map biholomorphically the unit ball $\mathbb{B}^n$ onto convex domains in $\mathbb{C}^n$. Several authors generalized the well-known classical inequality $(1+|z|)^{-2} \leq |f'(z)| \leq (1-|z|)^{-2}$, $z \in \mathbb{B}^1$, onto n-dimensional case; they have also declared that their inequalities are exact. In fact, in many cases the statemements were false. The intention of the paper is to indicate such cases.

Библиографический список

[1] Roper K.A., Suffridge T.J. *Convex mappings on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$ // J. Analyse Math. 1995. V. 65. P. 333–347.

[2] Liczberski P. *Geometric properties of some classes of holomorphic mappings in* C^n // Sci. Bull. Łódź Techn. Univ. 1999. V. 826. P. 1–72 (*in Polish, summary in English*).

[3] Pfaltzgraff J.A., Suffridge T.J. *Norm order and geometric properties of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$ // J. Anal. Math. 2000. V. 82. P. 285–313.

[4] Hamada H., Kohr G. *Growth and distortion results for convex mappings in infinite dimensional spaces*// Complex Var. 2002. V. 47. № 4. P. 291–301.

[5] Liczberski P., Starkov V.V. *Distortion theorems for biholomorphic convex mappings in* C^n // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 274. P. 495–504.

[6] Личберский П., Старков В. В. *О двух гипотезах для выпуклых биголоморфных отображений шара в* $\mathbb{C}^n$ *— доказательство и опровержение* (в печати).

[7] Gong S. *Convex and starlike mappings in several complex variables.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

Institute of Mathematics
Technical University of Lodz,
ul. Zwirki 36, 90-924 Lodz, Poland,
E-mail: piliczb@ck-sg.p.lodz.pl

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640 Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail:starkov@mainpgu.karelia.ru
Institute of Mathematics
Technical University of Lodz,
ul. Zwirki 36, 90-924 Lodz, Poland,
E-mail: Vstar@im0.p.lodz.pl