Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 10, 2003

УДК 517

ТЕОРЕМЫ О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ С КОНУСОМ

В. В. Мосягин, Б. М. Широков

В работе устанавливаются достаточные условия разрешимости нелинейных уравнений с монотонными операторами в банаховых алгебрах с конусом.

Пусть $(A, ||\cdot||)$ — вещественная банахова алгебра с единицей $\mathbf{1}$ и θ — ее нулевой элемент.

Определение 1. *Замкнутое выпуклое множество $K \subset A$ называется конусом, если для любого элемента x из K, не равного θ, и любого числа α $\alpha x \in K$ и $-x \notin K$.*

Конус K называется алгебраическим (см. [2]), *если $\mathbf{1} \in K$ и из $x,\ y \in K$ следует, что $xy \in K$.*

При помощи алгебраического конуса K можно ввести полуупорядоченность: считаем $x \geq y$, если $x - y \in K$. Элемент $x \geq \theta$ (то есть $x \in K$) называется положительным.

Введение порядка при помощи алгебраического конуса делает алгебру полуупорядоченной. Действительно, алгебра называется полуупорядоченной, если она является полуупорядоченным векторным пространством, и если $x \geq y$ и $z \geq 0$, то $xz \geq yz$. Но условия $x \geq y$ и $z \geq 0$ означают, что $x - y \in K$ и $z \in K$. В силу алгебраичности конуса и дистрибутивного закона, $xz - yz \in K$, то есть $xz \geq yz$.

Конус, содержащий внутренние точки, называется телесным. Конус называется воспроизводящим, если каждый элемент $x \in A$ имеет представление $x = u - v,\ u, v \in K$. Всякий телесный конус является воспроизводящим.

Наиболее общие примеры полуупорядоченных вещественных банаховых алгебр конструируются следующим образом. Пусть X — вещественное пространство Банаха, полуупорядоченное телесным конусом K_X. Банахова алгебра $L(X)$ всех линейных непрерывных операторов, действующих в X, полуупорядоченная алгебраическим конусом

$$K_{L(X)} = \{T \in L(X): \ \forall x \in K_X \ Tx \geq 0\},$$

является вещественной полуупорядоченной банаховой алгеброй с единицей. Элементы конуса $K_{L(X)}$ называются положительными линейными операторами.

Конус $K \subset A$ называется нормальным, если существует такое число $N(K)$, что из $\theta \leq x \leq y$ следует $||x|| \leq N(K)||y||$. В этом случае говорят, что норма полумонотонна. Число $N(K)$ называется константой нормальности конуса K. Если $N(K) = 1$, то конус называется острым, а полумонотонная норма называется монотонной.

Рассмотрим еще некоторые разновидности конусов в банаховой алгебре.

Определение 2. *Конус $K \subset A$ называется:*

а) миниэдральным, если любые два элемента алгебры имеют точную верхнюю границу;

б) сильно миниэдральным, если каждое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу;

в) правильным, если каждая неубывающая последовательность, ограниченная сверху некоторым элементом, сходится по норме.

Рассмотрим некоторые разновидности операторов в банаховой алгебре A с конусом K.

Определение 3. *Оператор $T: A \to A$ называется:*

α) положительным, если он оставляет инвариантным конус K, то есть $Tx \in K$ для любого $x \in K$;

β) монотонным на множестве M, если из $x, y \in M$ и $x \leq y$ следует $Tx \leq Ty$.

Определение 4. *Множество элементов $x \in A$, удовлетворяющих неравенствам $u_0 \leq x \leq v_0$, $u_0, v_0 \in A$, называется конусным отрезком и обозначается $\langle u_0, v_0 \rangle$.*

Как и в случае банаховых пространств с конусом [1], для монотонных операторов в банаховой алгебре A с конусом K справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть монотонный на конусном отрезке $\langle u_0, v_0 \rangle \subset A$ оператор T преобразует $\langle u_0, v_0 \rangle$ в себя, то есть $Tu_0 \geq u_0$, $Tv_0 \leq v_0$. Тогда для существования на отрезке $\langle u_0, v_0 \rangle$, по крайней мере, одной неподвижной точки у оператора T достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:*

1) конус K сильно миниэдрален;

2) конус K правилен, а оператор T непрерывен;

3) конус K нормален, а оператор T вполне непрерывен.

В банаховой алгебре A с конусом K мы рассмотрим еще один класс операторов — операторов, обладающих свойством обобщенной сильной монотонности. При определении таких операторов существенно используется наличие произведения в A и полуупорядочения при помощи конуса.

Теорема 2. *Пусть A — вещественная банахова алгебра, полуупорядоченная острым алгебраическим конусом, а оператор $F : A \to A$ удовлетворяет условиям: для любых $x, y \in A$*

$$(F(x) - F(y))^2 \leq M^2(x - y)^2, \quad M > 0, \tag{1}$$

$$(F(x) - F(y))(x - y) \geq m(x - y)^2, \tag{2}$$

$$(x - y)(F(x) - F(y)) \geq m(x - y)^2, \tag{3}$$

$$M > m. \tag{4}$$

Тогда уравнение

$$F(x) = g \tag{5}$$

имеет единственное решение для любого $g \in A$.

Свойство оператора F, выраженное неравенствами (2) и (3), будем называть обощенной сильной монотонностью оператора F.

Доказательство. Из неравенства (1) и свойств произведения элементов в X следует, что F удовлетворяет обычному условию Липшица:

$$m||x - y||^2 \leq ||F(x) - F(y)|| \cdot ||x - y||.$$

Следовательно,

$$||F(x) - F(y)|| \geq m||x - y||.$$

Пусть $g \in X$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим оператор A_ε, определенный соотношением

$$A_\varepsilon x = \varepsilon(F(x) - g).$$

Для произвольных $x, y \in X$ из условий теоремы имеем:

$$(A_\varepsilon x - A_\varepsilon y)^2 = (x-y)^2 - \varepsilon(x-y)(F(x)-F(y)) - \\ -\varepsilon(F(x)-F(y))(x-y) + \varepsilon^2(F(x)-F(y))^2 \leq \\ \leq (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)||x-y||^2,$$

тогда

$$||A_\varepsilon x - A_\varepsilon y||^2 \leq (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 m^2||x-y||^2.$$

Если $\varepsilon \in (0, 2m/M)$ и $\lambda = (1 - 2\varepsilon m + \varepsilon^2 m^2)^{1/2}$, то оператор A_ε — сжимающий оператор в банаховой алгебре A. Следовательно, существует единственный элемент $x \in A$, для которого

$$A_\varepsilon x = x.$$

Отсюда следует, что $F(x) = g$. Теорема доказана. □

Résumé

Solvability theorems for nonlinear operator equations in Banach spaces with a cone has given in this paper.

Литература

[1] Красносельский М. А. *Положительные решения операторных уравнений*/М. А. Красносельский. М.: Физматгиз, 1962.

[2] Raubenheimer H. *Cones in Banach algebras*/H. Raubenheimer// Indagations Mathematicae. V. 7. No 4. P. 489–502.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: shirokov@mainpgu.karelia.ru