Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 10, 2003

УДК 515.12

О СОВЕРШЕННО $\varkappa$-НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. В. Осипов

В статье рассматривается класс совершенно $\varkappa$-нормальных пространств. Дается их наследственная характеризация. В связи с этим рассматривается класс наследственно совершенно $\varkappa$-нормальных пространств. Показывается несовпадение этих классов с другими классами пространств. В предположениях аксиомы Йенсена показывается существование наследственно совершенно $\varkappa$-нормального пространства, не являющегося совершенно нормальным.

§ 1. Введение

Совершенно $\varkappa$-нормальные пространства были введены в работах Е. В. Щепина [4]. Они появлялись как G_δ-подмножества в $\varkappa$-метризуемых компактах, соответственно, сам $\varkappa$-метризуемый компакт является совершенно $\varkappa$-нормальным. Естественно встает вопрос, касающийся топологических свойств этого класса. Таким образом, он становится самостоятельным объектом исследования.

Определение 1. *Топологическое пространство X называется совершенно $\varkappa$-нормальным, если оно нормально и каждое его канонически открытое множество является F_σ-подмножеством.*

Из определения следует, что каждое совершенно нормальное пространство является совершенно $\varkappa$-нормальным пространством.

Поскольку нормальное пространство полурегулярно, то в совершенно $\varkappa$-нормальном пространстве можно выбрать базу пространства, целиком состоящую из канонически открытых множеств.

Что касается наследственности по подмножествам, то дело здесь обстоит следующим образом. Оказывается, что каждое канонически открытое и канонически замкнутое множество будет совершенно $\varkappa$-нормальным пространством, но, вообще говоря, таковыми не будут произвольные замкнутые и открытые множества.

В связи с этим естественно рассмотрение класса наследственно совершенно $\varkappa$-нормальных пространств. В случае с классом совершенно нормальных пространств имело место совпадение с классом наследственных совершенно нормальных пространств, но такое совпадение не имеет места для классов совершенно $\varkappa$-нормальных и наследственных совершенно $\varkappa$-нормальных пространств. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Совершенно $\varkappa$-нормальное пространство является наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством тогда и только тогда, когда X — наследственно нормально.*

Таким образом, класс наследственно совершенно $\varkappa$-нормальных пространств лежит в классе наследственно нормальных пространств.

Оказывается, что если каждое замкнутое подмножество совершенно $\varkappa$-нормального пространства X является в свою очередь совершенно $\varkappa$-нормальным пространством, то X — наследственно совершенно $\varkappa$-нормальное пространство.

Теорема 2. *Совершенно $\varkappa$-нормальное пространство является наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством тогда и только тогда, когда каждое его замкнутое множество является совершенно $\varkappa$-нормальным.*

В работе рассмотрены примеры, показывающие несовпадения класса наследственно совершенно $\varkappa$-нормальных пространств с другими классами.

Пример 1. *Существует наследственно нормальный компакт, не являющийся совершенно $\varkappa$-нормальным пространством.*

Пример 2. *Существует совершенно $\varkappa$-нормальное пространство, не являющееся наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством.*

Пример 3. *($\diamondsuit$) Существует компакт, который является наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством и не является совершенно нормальным.*

В статье показано, что перечисленными в примере 3 свойствами обладает компакт, построенный в предположениях принципа Йенсена [5]. Вопрос о существовании такого примера в наивной теории множеств остается открытым.

§ 2. Доказательство основных результатов

Очевидно, что X является совершенно $\varkappa$-нормальным пространством тогда и только тогда, когда X — нормально и каждое его канонически замкнутое множество является G_δ-множеством. Это следует из свойств канонически замкнутых множеств и определения совершенно $\varkappa$-нормальных пространств.

Определение 2. *Пространство X называется наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством, если каждое его подмножество является совершенно $\varkappa$-нормальным пространством.*

Доказательство теоремы 1

Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Пусть
$$A \subset X.$$
Покажем, что A — совершенно $\varkappa$-нормальное пространство. Так как X — наследственно нормально, то A — нормально. Поэтому остается показать, что для каждого канонически открытого множества U в A следует, что оно есть F_σ-подмножество в A.

Положим
$$V = int([A \setminus U]_A)_A,$$
V также канонически открыто в A.

Нетрудно видеть, что V и U отделимы, по Хаусдорфу, в X. Действительно, так как U и V открыты в A, то существуют такие открытые в X множества OU и OV, что
$$OU \cap A = U \text{ и } OV \cap A = V.$$
Так как $OU \cap V = \emptyset$, то $[U]_X \cap V \subset [OU]_X \cap V = \emptyset$, откуда немедленно следует, что U отделимо от V. Аналогично доказывается отделимость V от U.

Если X наследственно нормален, то, по лемме Урысона [2, гл. 1], существуют непересекающиеся окрестности $O'U$ и $O'V$ у множеств

U и V, так как они отделимы, по Хаусдорфу. Нетрудно видеть, что $O'U \cap A = U$ *и* $O'V \cap A = V$.

Полагая $U' = int([O'U]_X)_X$, видим, что U' — канонически открытое в X подмножество. Так как $O'U \subset U'$, то отсюда вытекает, что

$$U \subset U' \cap A. \tag{1}$$

С другой стороны, имеем:

$$int([O'U]_X)_X \cap A \subset int([O'U]_X \cap A)_A = int([O'U \cap A]_A)_A =$$
$$= int([U]_A)_A = U. \tag{2}$$

Последнее равенство верно, так как U канонически открыто в A. Из (1) и (2) вытекает, что $U' \cap A = U$, но U' канонически открыто в X, поэтому оно есть F_σ-подмножество в X, но тогда и U есть F_σ-подмножество в A. Итак, A — совершенно $\varkappa$-нормально. □

Следствие. *Топологическое простанство наследственно совершенно $\varkappa$-нормально тогда и только тогда, когда каждое его открытое множество совершенно $\varkappa$-нормально.*

Доказательство. Если каждое открытое множество нормально, то X — наследственно нормально [2, гл. 1, с. 55], но тогда по теореме 1 и вытекает доказываемое. □

Доказательство теоремы 2

Необходимость очевидна. Докажем достаточность.

В силу теоремы 1, остается показать наследственную нормальность пространства X.

Пусть F_1, F_2 — замкнутые множества в X. Если у множеств $F_1 \setminus F_2$, $F_2 \setminus F_1$ можно найти дизъюнктные окрестности в X, то X — наследственно нормально. Действительно, если U открыто в X и G_1, G_2 — замкнутые множества в U, то существуют G'_1, G'_2 — замкнутые множества в X такие, что $G'_i \cap U = G_i$, $i = 1, 2$. У множеств $G'_1 \setminus G'_1$ *и* $G'_2 \setminus G'_1$ существуют непересекающиеся окрестности U_1 *и* U_2 в X. В силу включений $G_1 \subset G'_1 \setminus G_2$, $G_2 \subset G'_2 \setminus G'_1$ получаем, что $U_i \cap U$ — искомые непересекающиеся окрестности множеств G_1 *и* G_2 *в* U, $i = 1, 2$. Тогда U — нормально, а из леммы Урысона [2, с. 55] вытекает, что X — наследственно нормально.

Пусть $G = F_1 \cup F_2$, $U_1 = F_1 \setminus F_2$, $U_2 = F_2 \setminus F_1$. Видим, что U_i открыты в G, $i = 1, 2$. Множества $U'_i = int([Ui]_G)_G$ $(i = 1, 2)$

канонически открыты в G и непересекающиеся, так как $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Кроме того, $U_i \subset U'_i$ для $i = 1, 2$. Далее, $U'_1 \cap [U_2]_G = \emptyset$, а $[U_2]$ замкнуто в G, но тогда оно замкнуто в X, так как G замкнуто в X. В силу замкнутости G, по условию теоремы, оно является совершенно $\varkappa$-нормальным. Тогда U'_2 есть F_σ-подмножество в G, но и в X. Поэтому

$$U'_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i,$$

где H_i замкнуты в G и в X и $H_i \cap [U_2] = \emptyset$ для любого $i \in N$. В силу нормальности пространства X вытекает, что существуют открытые OH_i такие, что

$$H_i \subset OH_i \subset [OH_i]_X \subset X \setminus [U_2]. \tag{1}$$

Пусть $\gamma_1 = \{OH_i\}_{i=1}^{\infty}$ — семейство таких открытых множеств. Очевидно, что $U'_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} OH_i$ *и* $[OH_i] \cap U_2 = \emptyset$ в силу (1).

Аналогично для множества U'_2 строим систему открытых множеств $\gamma_2 = \{OW_i\}_{i=1}^{\infty}$, таких, что

$$U'_2 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} OW_i \ \textit{и} \ [OW_i] \cap U_1 = \emptyset.$$

По нормализующей лемме Урысона [2, гл.1, с. 56], у множеств U'_1, U'_2 существуют непересекающиеся окрестности в X, следовательно, они есть и у множеств $F_1 \setminus F_2$, $F_2 \setminus F_1$, а это и требовалось доказать. □

Пример 1. *Существует наследственно нормальный компакт, не являющийся совершенно $\varkappa$-нормальным пространством.*

Рассмотрим пространство $X = W(\omega_1 + 1)$ — множество порядковых чисел, не превосходящих ω_1, с порядковой топологией.

Данное пространство компактно и наследственно нормально [3, с. 98]. Покажем, что X — не совершенно $\varkappa$-нормальное пространство. Для этого рассмотрим открытое подмножество U, где

$$U = \{\alpha + 1, \textit{где } \alpha \textit{ — предельный ординал и } \alpha < \omega_1\}.$$

Множество $F = [U]$ канонически замкнуто в X. Покажем, что оно не является G_δ-подмножеством в X. Действительно, пусть это не так и

$$F = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i, \tag{1}$$

где V_i открыты в X. Так как $\omega_1 \in F$, то для любого i $(i \in N)$ существует такой β_i, что $(\beta_i; \omega_1] \subset U_i$. Пусть $\beta = \lim_{i\to\infty} \beta_i$. Очевидно, $\beta < \omega_1$, по свойствам ординалов. Тогда в полуинтервале $(\beta; \omega_1]$ не должно быть точек $X \setminus F$, но, как нетрудно убедиться, это не так. Например, если β — предельный ординал, то $\beta + 2 \notin F$, так как $\beta + 2$ — изолированная точка X. Откуда получаем противоречие. Итак, X — не совершенно $\varkappa$-нормальное пространство.

Пример 2. *Существует совершенно $\varkappa$-нормальный компакт, не являющийся наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством.*

$X = [0; 1]^{\omega_1}$. Из теорем Е. В. Щепина [4, с. 442–444] вытекает, что X — $\varkappa$-метризуемое пространство, а такое пространство совершенно $\varkappa$-нормально [см. там же].Из теорем А. Н. Тихонова [1, с. 257–263] следует, что пространство в примере 1 вкладывается в X в качестве подпространства и что X — компакт, но не совершенно $\varkappa$-нормальный, как было установлено выше, поэтому X не является наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным компактом.

Пример 3. *($\diamond$) Существует компакт, который является наследственно совершенно $\varkappa$-нормальным пространством и не является совершенно нормальным.*

Воспользуемся теоремой [5].

Теорема 3. *($\diamond$) [1] Для любого n $(n \in N)$ существует n-мерный компакт A_n, такой что:*
1) A_n наследственно сепарабелен;
2) A_n не секвенциален;
3) A_n локально метризуем во всех точках за исключением точки x^0;
4) для любого замкнутого подмножества $F \subset A_n$ либо F, либо $A_n \setminus F$ метризуемо;
5) A_n наследственно нормально;
6) $A_n \setminus \{x^0\}$ совершенно нормально и счетно-компактно;
7) dimA_n=IndA_n=n;
8) если $F_i = [F_i] \subset A_n$ и $x^0 \in [F_i \setminus \{x^0\}]$, тогда $ind_{X^0} \cap F_i = n$ и $x^0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$;
9) для каждого подмножества $G \subset A_n$ имеем dim$G \leq$ Ind$G \leq n$;

[1] В работе В. В. Федорчука использовалась эквивалентная принципу Йенсена ($\diamond$) аксиома (Φ), см. [5].

10) пространство $A_n \setminus x^0$ представимо в виде объединения возрастающей последовательности $\{U_\alpha\}$, упорядоченной по типу ω_1, открытых подмножеств со счетной базой.

Докажем, что для любого натурального n A_n — искомый компакт.

1)A_n — не совершенно нормальное пространство.

Действительно, докажем, что $\{x^0\}$ не является G_δ-подмножеством в A_n. Если это было бы не так, то $A_n \setminus \{x^0\}$ — F_σ-подмножество в A_n, это означает, что

$$A_n \setminus \{x^0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

где F_i — замкнутые подмножества, то есть компакты. Рассматривая открытое покрытие $\gamma = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства $A_n \setminus \{x^0\}$, в силу компактности F_i, для каждого i можно выделить конечное подсемейство γ_i, покрывающее F_i, тогда

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \gamma_i$$

— счетное покрытие пространства $A_n \setminus \{x^0\}$. В силу счетной компактности $A_n \setminus \{x^0\}$, получаем компактность $A_n \setminus \{x^0\}$. Но $A_n \setminus \{x^0\}$ — не компактно, так как тогда бы точка x^0 была бы изолированной точкой множества A_n. Получили противоречие. Итак, $\{x^0\}$ — не G_δ-подмножество в A_n.

2)A_n — наследственно совершенно $\varkappa$-нормальный компакт.

В силу наследственной нормальности, остается доказать, что каждое канонически открытое подмножество является F_σ-подмножеством в A_n.

Пусть U канонически открыто в A_n.

а) $x^0 \in U$. Тогда множество $U \setminus \{x^0\}$ открыто в $A_n \setminus \{x^0\}$. Так как $A_n \setminus \{x^0\}$ совершенно нормально, то $U \setminus \{x^0\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где F_i замкнуты в $A \setminus \{x^0\}$, тогда

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_i \bigcup \{x^0\})$$

и U есть F_σ-подмножество в A_n, так как $F_i \bigcup \{x^0\}$ замкнуты в A_n для любого $i \in N$

б) $x^0 \notin [U]$. В силу совершенной нормальности $A_n \setminus \{x^0\}$ и открытости U, имеем представление $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, где все F_i замкнуты в $A_n \setminus \{x^0\}$. Так как $x^0 \notin [U]$, следовательно $x^0 \notin F_i$ и F_i замкнуты в A_n. Откуда получаем, что U есть F_σ-подмножество в A_n.

в)$x^0 \in [U] \setminus U$.

По свойству компакта либо U, либо $A_n \setminus U$ метризуемо. Но $A_n \setminus U$ не метризуемо.

Если $A_n \setminus U$ метризуемо, то $(A_n \setminus U) \setminus \{x^0\}$ тоже метризуемо. Так как последнее пространство сепарабельно, то вес $(A_n \setminus U) \setminus \{x^0\}$ счетен и $A_n \setminus \{x^0\}$ является финально компактным пространством, но тогда оно компактно в силу счетной компактности пространства $A_n \setminus \{x^0\}$ и поэтому $(A_n \setminus U) \setminus \{x^0\}$ замкнуто в A_n. Но тогда точка x^0 — изолированная точка для $A_n \setminus U$. Тогда $x^0 \in int([U])$, но этого быть не может, так как U канонически открыто в A_n.

Итак, остается рассмотреть случай, когда U — метризуемо. U как открытое подмножество компакта A_n локально компактно, а из сепарабельности U вытекает, что вес U — счетен. Пусть

$$\mathrm{Re}(X) = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$$

— база U. Тогда для любой точки $x \in U$ выберем базисную окрестность Ox($Ox \in \mathrm{Re}(X)$) с компактным замыканием в A_n, такую, что

$$x \in Ox \subset [Ox] \subset U$$

(окрестность Ox с такими свойствами можно выбрать в силу регулярности нормального пространства). Число таких окрестностей не более чем счетно, поэтому $Ox = \bigcup_{i=1}^{\infty} [Ox_i]$ и U есть F_σ-подмножество в A_n.

Таким образом, A_n — наследственно совершенно $\varkappa$-нормальное пространство.

Résumé

In this paper we learn class of perfectly $\varkappa$-normal space's. It gives their hereditary characterization. Under the axiom of Jensen, we exhibit existence of hereditily perfectly $\varkappa$-normal space, which is not perfectly normal.

Литература

[1] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию*/П. С. Александров. М.: Наука, 1977.

[2] Александров П. С. *Введение в теорию размерности* /П. С. Александров, Б. А. Пасынков. М.: Наука, 1973.

[3] Энгелькинг Р. *Общая топология*/Р. Энгелькинг. М.: Наука, 1978.

[4] Щепин Е. В. *О $\varkappa$-метризуемых пространствах*/Е. В. Щепин // ИАН СССР. Сер. Математическая. 1979. Т. 43. Вып. 2. С. 442–478.

[5] Федорчук В. В. *Совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств* /В. В. Федорчук // Мат. сб. 1976. Т. 99. Вып. 1. С. 5–45.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33

E-mail: evosipov@yandex.ru