Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 10, 2003

УДК 511, 514.8, 530.1

УСЛОВНЫЕ И ВЗАИМНЫЕ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Н. Ю. Светова

В [1–4, 8] была предложена идея выполнения мультифрактального анализа относительно произвольной меры, что является обобщением классического мультифрактального анализа в представлении информации о геометрических проявлениях сложных зависимостей двух распределений и применяется к геометрическим объектам, состоящим из различных категорий точек. Задача состоит в определении количественных характеристик влияния двух распределений на геометрию друг друга. В данной статье предлагается формализм для мультифрактального анализа одной меры относительно другой, который основан на идеях мультифрактального формализма, представленного Л. Олсеном [5]. Устанавливаются основные свойства условных мультифрактальных спектров, а также вводятся в рассмотрение новые взаимные спектры.

§ 1. Условные мультифрактальные спектры

Условная Хаусдорфова и условная упаковочная мультифрактальные размерности. Пусть X — произвольное метрическое пространство с заданной метрикой d. $\mathcal{B}(X)$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств пространства X. Под мерой μ, определенной на $\mathcal{B}(X)$, подразумевается нормированная борелевская мера. Множество всех борелевских вероятностных мер обозначим через $P(X)$. Напомним, что носителем меры μ называется множество всех точек, все окрестности которых имеют положительную меру. Через $B_r(x)$

обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r. Пусть $\mu, \nu \in P(X)$. Меру ν будем называть условной базисной мерой для меры μ (кратко: условной базисной мерой или базисной мерой). Пусть Φ — множество всех непрерывных функций φ, определенных на $[0,\delta]$ так, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ для $0 < x < \delta$. В качестве функции φ возьмем функцию

$$\varphi_q(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ x^q, & x > 0, \end{cases} \quad q < 0 \qquad \varphi_q(x) = 1, \quad q = 0 \qquad \varphi_q(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^q, & x > 0, \end{cases} \quad q > 0$$

Для любого $\delta > 0$ центрированным δ-покрытием множества $E \subseteq X$ называется счетное или конечное семейство множеств $E_i \subseteq X$ таких, что $E \subseteq \bigcup\limits_i E_i$ и $\operatorname{diam}(E_i) \leq \delta$ для любого i. Центрированным δ-покрытием множества $E \subseteq X$ называется δ-покрытие $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ множества E шарами с центрами в E.

Пусть $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — центрированное δ-покрытие E. Определим следующие функции множеств:

$$\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,\delta}(E) = \inf\{\sum_i \varphi_q(\mu(B_{r_i}(x_i)))\varphi_t(2r_i) : \nu(B_{r_i}(x_i)) \neq 0\},\ E \neq \emptyset,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,\delta}(\emptyset) &= 0, \\ \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(E) &= \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,\delta}(E), \\ \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \sup_{F \subseteq E} \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(F), \\ \mathcal{H}^{t}_{\nu}(E) &= \mathcal{H}^{0,t}_{\mu,\nu}(E). \end{aligned}$$

$\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$ назовем условной Хаусдорфовой мерой.

Упаковочная мера была введена Трикотом, Тейлором и Реймондом в середине 80-х годов прошлого века как двойственная к Хаусдорфовой мере. Хаусдорфова мера определяется рассмотрением экономичных покрытий, тогда как упаковочная мера определяется через введение эффективных упаковок [5, 7].

Пусть X — метрическое пространство, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, $\delta > 0$. Счетное семейство $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ дизъюнктных замкнутых шаров с центрами в E и $\operatorname{diam}(B_{r_i}(x_i)) < \delta$ для любого i называется центрированной δ-упаковкой множества E.

Для множества $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ — центрированной δ-упаковки Е определим

$$\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,\delta}(E) = \sup\{\sum_i \varphi_q(\mu(B_{r_i}(x_i)))\varphi_t(2r_i) : \nu(B_{r_i}(x_i)) \neq 0\},\ E \neq \emptyset,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,\delta}(\emptyset) &= 0,\\
\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(E) &= \inf_{\delta>0} \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,\delta}(E),\\
\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \inf_{E\subseteq \cup_i E_i} \sum_i \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(E_i),\\
\mathcal{P}^{t}_{\nu,0}(E) &= \mathcal{P}^{0,t}_{\mu,\nu,0}(E),\\
\mathcal{P}^{t}_{\nu}(E) &= \mathcal{P}^{0,t}_{\mu,\nu}(E).
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$ назовем условной упаковочной мерой E.

Предложение 1. *$\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}, \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}$ являются внешними мерами и поэтому мерами на σ-алгебре борелевских множеств.*

Доказательство. *Следует из стандартных рассуждений (см., например, [5]).* $\square$

Из определения условной упаковочной меры вытекает

Предложение 2. *Пусть $\mu, \nu \in P(X), q, t \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) \leq \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(E).$$

Очевидно, существуют критические значения $\dim^q_{\mu,\nu}(E)$, $\mathrm{Dim}^q_{\mu,\nu}(E)$, $\triangle^q_{\mu,\nu}(E)$ такие, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \begin{cases} \infty & \text{для } t < \dim^q_{\mu,\nu}(E),\\ 0 & \text{для } t > \dim^q_{\mu,\nu}(E), \end{cases}\\
\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) &= \begin{cases} \infty & \text{для } t < \mathrm{Dim}^q_{\mu,\nu}(E),\\ 0 & \text{для } t > \mathrm{Dim}^q_{\mu,\nu}(E), \end{cases}\\
\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(E) &= \begin{cases} \infty & \text{для } t < \triangle^q_{\mu,\nu}(E),\\ 0 & \text{для } t > \triangle^q_{\mu,\nu}(E). \end{cases}
\end{aligned}$$

Назовем их, соответственно, *условной мультифрактальной Хаусдорфовой*, *условной мультифрактальной упаковочной мерами* и *условной мультифрактальной упаковочной предмерой* множества E.

По аналогии с классическим мультифрактальным формализмом [5] установливаются некоторые свойства представленных условных мультифрактальных мер.

Предложение 3. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in P(X)$, $q, p, s, t \in \mathbb{R}$, ν — условная базисная мера. Тогда*

1) $\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0} \geq \mathcal{P}^{p,t}_{\mu,\nu,0}$, *если* $q \leq p$,
   $\mathcal{P}^{q,s}_{\mu,\nu,0} \geq \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0}$, *если* $s \leq t$.
2) *Отображение* $(q,t) \to \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu,0}$ — *логарифмически выпуклое, т.е. для* $\alpha \in [0;1]$, $p, q, s, t \in \mathbb{R}$ *и* $E \subseteq X$
$$\mathcal{P}^{\alpha p+(1-\alpha)q, \alpha t+(1-\alpha)s}_{\mu,\nu,0} \leq (\mathcal{P}^{p,t}_{\mu,\nu,0}(E))^{\alpha}(\mathcal{P}^{q,s}_{\mu,\nu,0}(E))^{1-\alpha}.$$
3) $\mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu} \geq \mathcal{P}^{p,t}_{\mu,\nu}$, *если* $q \leq p$,
   $\mathcal{P}^{q,s}_{\mu,\nu} \geq \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}$, *если* $s \leq t$.
4) $\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu} \geq \mathcal{H}^{p,t}_{\mu,\nu}$, *если* $q \leq p$,
   $\mathcal{H}^{q,s}_{\mu,\nu} \geq \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}$, *если* $s \leq t$.

Введем в рассмотрение условные размерностные функции. Обозначим
$$b_{\mu,\nu}(q) = \dim^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu),$$
$$B_{\mu,\nu}(q) = \operatorname{Dim}^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu),$$
$$\Lambda_{\mu,\nu}(q) = \triangle^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu).$$

Очевидно, что $b_{\mu,\nu}(q)$, $B_{\mu,\nu}(q)$, $\Lambda_{\mu,\nu}(q)$ являются убывающими функциями, $B_{\mu,\nu}(q)$, $\Lambda_{\mu,\nu}(q)$ — выпуклыми. Обозначим
$$\dim_{\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) = b_{\mu,\nu}(0),$$
$$\operatorname{Dim}_{\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) = B_{\mu,\nu}(0).$$

Теорема Безиковича о покрытии. *Пусть $d \in \mathbb{N}$. Тогда найдется $\xi \in \mathbb{N}$, которое удовлетворяет условию: для данного множества $A \subseteq \mathbb{R}^d$, произвольно выбранной точки $x \in A$ и фиксированного положительного r_x $(\sup_{x\in A} r_x < \infty)$ существует счетное или конечное подсемейство $\mathcal{A}_1, \cdots \mathcal{A}_{\xi}$ множества $\{B_{r_x}(x) : x \in A\}$, для которого выполнены условия:*

1) $A \subset \bigcup_i \bigcup_{B \subseteq \mathcal{A}_i} B$,

2) $\{\mathcal{A}_i\}$ *— семейство дизъюнктных множеств.*

Используя теорему Безиковича о покрытии и предложение 2, несложно доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^d$, $\mu, \nu \in P(X)$, ν *— условная базисная мера,* $E \subseteq X$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{N}$. *Тогда выполнены условия*

1) найдется такое $\xi \in \mathbb{N}$, *что* $\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) \leq \xi \cdot \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$,

2) $\dim^q_{\mu,\nu}(E) \leq \mathrm{Dim}^q_{\mu,\nu}(E) \leq \triangle^q_{\mu,\nu}(E)$.

Некоторые свойства мультифрактальных мер и размерностей имеют место только в том случае, если меры удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Приведем одно из таких условий. Пусть $\mu \in P(X)$, $a > 1$. Положим

$$T_a(\mu) = \limsup_{r \to 0} \sup_{x \in \operatorname{supp} \mu} \frac{\mu(B_{ar}(x))}{\mu(B_r(x))}.$$

Семейство борелевских вероятностных мер, определенных на метрическом пространстве X и удовлетворяющих условию: для некоторого $a > 1$ выполнено $T_a\{\mu\} < \infty$, будем обозначать $P_D(X)$ и называть семейством диаметрально регулярных мер [6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если* $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, ν *— условная базисная мера,* $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, *то* $\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) \leq \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на стандартном приложении теоремы Витали о покрытии и является аналогом доказательства предложения 3.4.2 [6]. $\square$

Из предложений 3 и 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Если $\operatorname{supp} \mu = \operatorname{supp} \nu$, то

1) $0 \leq b_{\mu,\nu}(q) \leq B_{\mu,\nu}(q) \leq \Lambda_{\mu,\nu}(q)$, $q < 1$,

2) $b_{\mu,\nu}(q) \leq B_{\mu,\nu}(q) \leq \Lambda_{\mu,\nu}(q) \leq 0$, $q > 1$,

3) $b_{\mu,\nu}(q) = B_{\mu,\nu}(q) = \Lambda_{\mu,\nu}(q) = 0$, $q = 1$.

Точные условные мультифрактальные спектры. Альтернативный подход к мультифрактальному описанию мер включает разложение носителя меры на подмножества одинаковой логарифмической плотности меры. Ниже приводятся точные формулировки для данного случая.

Пусть даны меры $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера. Для любого $x \in X$ положим

$$\underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0} \frac{\ln \mu(B_r(x))}{\ln r}, & x \in \operatorname{supp}\nu, \\ 0, & x \notin \operatorname{supp}\nu, \end{cases}$$

$$\overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0} \frac{\ln \mu(B_r(x))}{\ln r}, & x \in \operatorname{supp}\nu, \\ 0, & x \notin \operatorname{supp}\nu. \end{cases}$$

$\underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x)$, $\overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x)$ назовем, соответственно, *нижней* и *верхней условными локальными размерностями меры μ в точке $x \in X$.* Если $\underline{\alpha}_{\mu}(x) = \overline{\alpha}_{\mu}(x)$, то их общее значение будем обозначать $\alpha_{\mu,\nu}(x)$ и называть *условной локальной размерностью меры μ в точке $x \in X$.*

Для любого положительного α определим

$$\underline{K}_{\alpha} = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \geq \alpha\},$$

$$\underline{K}^{\alpha} = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \leq \alpha\},$$

$$\overline{K}_{\alpha} = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \geq \alpha\},$$

$$\overline{K}^{\alpha} = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \leq \alpha\}.$$

Пусть $K(\alpha) = \underline{K}_{\alpha} \cap \overline{K}^{\alpha} = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \quad \alpha_{\mu,\nu}(x) = \alpha\}$. Положим

$$f_{\mu,\nu}(\alpha) = \dim_{\nu} K(\alpha),$$

$$F_{\mu,\nu}(\alpha) = \operatorname{Dim}_{\nu} K(\alpha).$$

Размерностные функции $f_{\mu,\nu}(\alpha)$, $(F_{\mu,\nu}(\alpha))$ назовем *нижним* (соответственно, *верхним*) *точным условным мультифрактальным спектром.*

Далее определим

$$\underline{a}_{\mu,\nu} = \sup_{q>0} -\left(\frac{b_{\mu,\nu}(q)}{q}\right), \qquad \overline{a}_{\mu,\nu} = \inf_{q<0} -\left(\frac{b_{\mu,\nu}(q)}{q}\right),$$

$$\underline{A}_{\mu,\nu} = \sup_{q>0} -\left(\frac{B_{\mu,\nu}(q)}{q}\right), \qquad \overline{A}_{\mu,\nu} = \inf_{q<0} -\left(\frac{B_{\mu,\nu}(q)}{q}\right).$$

Из следствия к предложению 4 и определений выводится

Предложение 5. *Пусть $\mu, \nu \in P(X)$ и $q \in \mathbb{R}$, ν — условная базисная мера. Тогда*

1) $0 \leq \underline{A}_{\mu,\nu} \leq \underline{a}_{\mu,\nu}$ *при* $q > 1$;

$\underline{A}_{\mu,\nu} \leq \underline{a}_{\mu,\nu} \leq 0$ *при* $0 < q < 1$;

$\underline{A}_{\mu,\nu} = \underline{a}_{\mu,\nu} = 0$ *при* $q = 1$.

2) $0 \leq \overline{a}_{\mu,\nu} \leq \overline{A}_{\mu,\nu}, \qquad 0 < q < 1.$

В дальнейшем будет полезна

Лемма. *Пусть $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера, $\alpha > 0$. Тогда*

1) $\underline{K}^{\alpha} = \emptyset$ *при* $\alpha < \underline{A}_{\mu,\nu}$,

2) $\underline{K}_{\alpha} = \emptyset$ *при* $\alpha > \overline{a}_{\mu,\nu}$,

3) $\overline{K}_{\alpha} = \emptyset$ *при* $\alpha > \overline{A}_{\mu,\nu}$,

4) $\overline{K}^{\alpha} = \emptyset$ *при* $\alpha < \underline{a}_{\mu,\nu}$.

Доказательства следующих теорем 2–5 основаны на методе доказательств Л. Олсена [5, 6].

Теорема 2. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера, $\alpha > 0$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\alpha q + t \geq \delta$. Тогда*

1) $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha q+t+\delta}(\underline{K}^{\alpha}) \leq 2^{\alpha q+\delta}\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t}(\underline{K}^{\alpha}), \quad q \leq 0;$

2) $\mathcal{H}_{\nu}^{\alpha q+t+\delta}(\overline{K}_{\alpha}) \leq 2^{\alpha q+\delta}\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{q,t}(\overline{K}_{\alpha}), \quad q \geq 0;$

3) если $\alpha q + b_{\mu,\nu}(q) \geq 0$, *то*

$$\dim_{\nu}(\underline{K}^{\alpha}) \leq \alpha q + b_{\mu,\nu}(q), \quad q \leq 0,$$

$$\dim_{\nu}(\overline{K}^{\alpha}) \leq \alpha q + b_{\mu,\nu}(q), \quad q \geq 0.$$

Следствие. $\dim_{\nu}(\overline{K}^{\alpha}) \leq \alpha$, $\mathrm{Dim}_{\nu}(\overline{K}^{\alpha}) \leq \alpha$.

Теорема 3. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера, $\alpha > 0$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\alpha q + t \geq \delta$. Тогда*

1) $\mathcal{P}_{\nu}^{\alpha q+t+\delta}(\underline{K}^{\alpha}) \leq 2^{\alpha q+\delta}\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t}(\underline{K}^{\alpha}), \quad q \leq 0;$

2) $\mathcal{P}_{\nu}^{\alpha q+t+\delta}(\overline{K}_{\alpha}) \leq 2^{\alpha q+\delta}\mathcal{P}_{\mu,\nu}^{q,t}(\overline{K}_{\alpha}), \quad q \geq 0;$

3) если $\alpha q + B_{\mu,\nu}(q) \geq 0$, *то*

$\mathrm{Dim}_\nu(\underline{K}^\alpha) \leq \alpha q + B_{\mu,\nu}(q)$, $q \leq 0$;
$\mathrm{Dim}_\nu(\overline{K}^\alpha) \leq \alpha q + B_{\mu,\nu}(q)$, $q \geq 0$.

Теорема 4. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера, $\alpha > 0$, $q, t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\alpha q + t \geq \delta$. Тогда*

1) *если $A \subseteq \underline{K}^\alpha$ — борелевское, то $2^{\alpha q - \delta} \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q + t - \delta}_\nu$, $q \geq 0$;*
2) *если $A \subseteq \overline{K}^\alpha$ — борелевское, то $2^{\alpha q - \delta} \mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(A) \leq \mathcal{H}^{\alpha q + t - \delta}_\nu$, $q \leq 0$.*

Следствие. *Если $A \subseteq \underline{K}^\alpha$ — борелевское и $\mu(A) > 0$, тогда справедливо неравенство $\dim_\nu(A) \geq \alpha$.*

Теорема 5. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера, $\alpha > 0$,$q, t \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\alpha q + t \geq \delta$. Тогда*

1) *если $A \subseteq \underline{K}^\alpha$ — борелевское, тогда $2^{\alpha q - \delta} \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(A) \leq \mathcal{P}^{\alpha q + t - \delta}_\nu$, $q \geq 0$;*
2) *если $A \subseteq \overline{K}^\alpha$ — борелевское, тогда $2^{\alpha q - \delta} \mathcal{P}^{q,t}_{\mu,\nu}(A) \leq \mathcal{P}^{\alpha q + t - \delta}_\nu$, $q \leq 0$.*

Следствие. *Если $A \subseteq \underline{K}^\alpha$ — борелевское и $\mu(A) > 0$, тогда справедливо неравенство $\mathrm{Dim}_\nu(A) \geq \alpha$.*

Доказательство. Приведем доказательство пункта 2 теоремы 2. Доказательства остальных утверждений основаны на аналогичных рассуждениях.

Пусть $q > 0$. Для любого натурального числа m положим

$$H_m = \{x \in \overline{K}_\alpha : \frac{\ln \mu(B_r(x))}{\ln r} \leq \alpha + \frac{\delta}{q}, \quad 0 < 2r < \frac{1}{m}\}.$$

Зафиксируем m, выберем любое множество $E \subseteq H_m$ и $0 < \eta < \frac{1}{m}$. Рассмотрим центрированное η-покрытие $\{B_{r_i}(x_i)\}_i$ множества E. Тогда для каждого i получим, что $x_i \in \operatorname{supp} \nu$ и

$$\frac{\ln \mu(B_{r_i}(x_i))}{\ln r_i} \leq \alpha + \frac{\delta}{q}.$$

Следовательно,

$$(\mu(B_{r_i}(x_i)))^q (2r_i)^t \geq \; 2^t (r_i)^{q\alpha + \delta + t}.$$

В таком случае для $\eta < \frac{1}{m}$

$$2^{q\alpha+\delta}\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,\eta}(E) \geq \mathcal{H}^{q\alpha+\delta+t}_{\nu,\eta}(E).$$

Поскольку $\eta \to 0$ с ростом m и $E \subseteq H_m$, то

$$\mathcal{H}^{q\alpha+\delta+t}_{\nu,0}(E) \leq 2^{q\alpha+\delta}\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu,0}(E) \leq 2^{q\alpha+\delta}\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(E) \leq 2^{q\alpha+\delta}\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(H_m).$$

Итак, для любого натурального числа m выполнено неравенство

$$\mathcal{H}^{q\alpha+\delta+t}_{\nu}(H_m) \leq 2^{q\alpha+\delta}\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(H_m).$$

Так как $\overline{K}_\alpha \subseteq \bigcup\limits_m H_m$ и $\lim\limits_{m\to\infty} E_m = \overline{K}_\alpha$, то

$$\mathcal{H}^{q\alpha+\delta+t}_{\nu}(\overline{K}_\alpha) = \sup_m \mathcal{H}^{q\alpha+\delta+t}_{\nu}(H_m) \leq \sup_m 2^{q\alpha+\delta}\mathcal{H}^{q,t}_{\mu,\nu}(H_m) \leq 2^{q\alpha+\delta}(\overline{K}_\alpha).$$

□

Напомним, что *преобразованием Лежандра* функции $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется функция $g^* : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$ такая, что $g^*(x) = \inf\limits_y (xy + g(y))$ для $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 6. *Пусть X — метрическое пространство, $\mu, \nu \in P(X)$, ν — условная базисная мера, $\alpha > 0$. Тогда выполнены условия*

1) $\underline{a}_{\mu,\nu} \leq \inf \overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \leq \sup \overline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \leq \overline{A}_{\mu,\nu}$,
$\underline{A}_{\mu,\nu} \leq \inf \underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \leq \sup \underline{\alpha}_{\mu,\nu}(x) \leq \overline{a}_{\mu,\nu}$,

2) $f_{\mu,\nu}(\alpha) = \begin{cases} \leq b^*_{\mu,\nu}(\alpha); & \alpha \in (\underline{a}_{\mu,\nu}, \overline{a}_{\mu,\nu}), \\ = 0; & \alpha \in [0,\infty) \setminus (\underline{a}_{\mu,\nu}, \overline{a}_{\mu,\nu}), \end{cases}$

$F_{\mu,\nu}(\alpha) = \begin{cases} \leq B^*_{\mu,\nu}(\alpha); & \alpha \in (\underline{a}_{\mu,\nu}, \overline{a}_{\mu,\nu}), \\ = 0; & \alpha \in [0,\infty) \setminus [\underline{a}_{\mu,\nu}, \overline{a}_{\mu,\nu}], \end{cases}$

где $b^*_{\mu,\nu}(\alpha), B^*_{\mu,\nu}(\alpha)$ — преобразования Лежандра функций $b_{\mu,\nu}(q)$, $B_{\mu,\nu}(q)$.

Доказательство.

1) Следует из теоремы 2.

2) Если $\alpha \in [0, \underline{a}_{\mu,\nu})$, то в силу леммы имеем $\overline{K}_\alpha = \emptyset$, тогда $K(\alpha) = \emptyset$. Следовательно, $f_{\mu,\nu}(\alpha) = \dim_\nu(K(\alpha)) = 0$. Если $\alpha \geq \overline{a}_{\mu,\nu}$, то $\underline{K}_\alpha = \emptyset$ и $K(\alpha) = \emptyset$, в таком случае $f_{\mu,\nu}(\alpha) = \dim_\nu(K(\alpha)) = 0$. Наконец, если $\alpha \in (\underline{a}_{\mu,\nu}, \overline{a}_{\mu,\nu})$, то, используя теорему 2, получим

$$f_{\mu,\nu}(\alpha) = \dim_\nu(\overline{K}^\alpha \cap \underline{K}_\alpha) \leq \inf_q(\alpha q + b_{\mu,\nu}(q)) = b^*_{\mu,\nu}(\alpha).$$

Аналогично проверяется второе утверждение. □

Очевидно, что выполнено

Предложение 6. $b^*_{\mu,\nu}(\alpha) \leq B^*_{\mu,\nu}(\alpha)$.

Условные мультифрактальные спектры Лежандра и емкостные условные мультифрактальные спектры. Пусть $E \subseteq X$, $r > 0$, $\{B_r(x_i)\}_i$ — конечная или счетная центрированная упаковка множества E шарами радиусом r. Определим

$$M^{q,yn}_{\mu,\nu,r}(E) = \sup\{\sum_{i\in I}(\mu(B_r(x_i)))^q : \nu(B_r(x_i)) \neq 0\}.$$

$$\begin{aligned} \underline{\dim}^{q,yn}_{\mu,\nu,B}(E) &= \liminf_{r\to 0} \frac{\ln M^{q,yn}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}, \\ \overline{\dim}^{q,yn}_{\mu,\nu,B}(E) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\ln M^{q,yn}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\dim}^{yn}_B(E) &= \underline{\dim}^{0,yn}_{\mu,\nu,B}(E), \\ \overline{\dim}^{yn}_B(E) &= \overline{\dim}^{0,yn}_{\mu,\nu,B}(E). \end{aligned}$$

По аналогии с классическим мультифрактальным формализмом [5] назовем $\underline{\dim}^{q,yn}_{\mu,\nu,B}$, $\overline{\dim}^{q,yn}_{\mu,\nu,B}$ *нижней* и *верхней q-мультифрактальными условными ячеечными размерностями.*

$\underline{\dim}^{yn}_B(E), \overline{\dim}^{yn}_B(E)$ — *нижняя* и *верхняя условные ячеечные размерности.* Определим *ячеечные условные размерностные функции* (или *спектры Лежандра*) следующим образом:

$$\underline{C}_{\mu,\nu}(q) = \underline{\dim}^{q,yn}_{\mu,\nu,B}(E)(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu),$$

$$\overline{C}_{\mu,\nu}(q) = \dim^{q,yn}_{\mu,\nu,B}(E)(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu).$$

Верхний и *нижний условные ячеечные спектры*:

$$\underline{f}^{yn}_{\mu,\nu,B}(\alpha) = \underline{C}^*_{\mu,\nu}(q) = \inf_q(\alpha q + \underline{C}_{\mu,\nu}(q)),$$

$$\overline{f}^{yn}_{\mu,\nu,B}(\alpha) = \overline{C}^*_{\mu,\nu}(q) = \inf_q(\alpha q + \overline{C}_{\mu,\nu}(q)).$$

q-мультифрактальные условные ячеечные размерности также можно определить другим способом.

Для любого $E \subseteq X$, $r > 0$, $q \in \mathbb{R}$ и конечного или счетного центрированного покрытия $\{B_r(x_i)\}_i$ множества E замкнутыми шарами радиусом r положим

$$M^{q,покр}_{\mu,\nu,r}(E) = \inf\{\sum_{i\in I}(\mu(B_r(x_i)))^q : \nu(B_r(x_i)) \neq 0\}.$$

$$\underline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) = \liminf_{r\to 0} \frac{\ln M^{q,покр}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r},$$

$$\overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) = \limsup_{r\to 0} \frac{\ln M^{q,покр}_{\mu,\nu,r}(E)}{-\ln r},$$

$$\underline{\dim}^{0,покр}_{\mu,\nu,B}(E) = \underline{\dim}^{yn}_{B}(E),$$

$$\overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) = \overline{\dim}^{yn}_{B}(E).$$

Условные ячеечные размерностные функции (или *спектры Лежандра*):

$$\underline{L}_{\mu,\nu}(q) = \underline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E)(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu),$$

$$\overline{L}_{\mu,\nu}(q) = \overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E)(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu).$$

Верхний и *нижний условные ячеечные спектры*:

$$\underline{f}^{покр}_{\mu,\nu,B}(\alpha) = \underline{L}^*_{\mu,\nu}(q) = \inf_q(\alpha q + \underline{L}_{\mu,\nu}(q)),$$

$$\overline{f}^{покр}_{\mu,\nu,B}(\alpha) = \overline{L}^*_{\mu,\nu}(q) = \inf_q(\alpha q + \overline{L}_{\mu,\nu}(q)).$$

Перейдем к определению емкостных мультифрактальных условных спектров.

Пусть даны вероятностные меры μ, ν, $\epsilon > 0$, фиксированное $r > 0$ и $\{B_r(x_i)\}_i$ — конечная или счетная центрированная $2r$-упаковка множества $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$. Определим

$$N_r^\nu(\alpha,\epsilon) = \sup\{\operatorname{card}\{B_r(x_i) : i \in I\} : \quad \nu(B_r(x_i)) \neq 0;$$
$$\alpha - \epsilon \leq \frac{\ln \mu(B_r(x_i))}{\ln r} \leq \alpha + \epsilon\},$$

$$\underline{f}_\nu^{ем}(\alpha) = \liminf_{\epsilon \to 0} \liminf_{r \to 0} \frac{\ln N_r^\nu(\alpha,\epsilon)}{-\ln r},$$
$$\overline{f}_\nu^{ем}(\alpha) = \liminf_{\epsilon \to 0} \limsup_{r \to 0} \frac{\ln N_r^\nu(\alpha,\epsilon)}{-\ln r}.$$

Назовем $\underline{f}_\nu^{ем}(\alpha), \overline{f}_\nu^{ем}(\alpha)$ *нижним* и *верхним емкостными мультифрактальными условными спектрами.* Если $\underline{f}_\nu^{ем}(\alpha) = \overline{f}_\nu^{ем}(\alpha)$, то их общее значение $f_\nu^{ем}(\alpha)$ назовем *емкостным мультифрактальным условным спектром.*

Далее приводятся основные свойства условных размерностей и спектров, аналогичные свойствам соответствующих размерностей и спектров, определенных в [5].

Теорема 7. *Пусть $\mu, \nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$. Тогда*

$$\underline{f}_\nu^{ем}(\alpha) \leq \underline{f}_{\mu,\nu,B}^{уп}(\alpha),$$
$$\overline{f}_\nu^{ем}(\alpha) \leq \overline{f}_{\mu,\nu,B}^{уп}(\alpha).$$

Теорема 8. *Пусть $\mu, \nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \geq 0$. Тогда*

$$f_{\mu,\nu}(\alpha) \leq \underline{f}_\nu^{ем}(\alpha),$$
$$F_{\mu,\nu}(\alpha) \leq \overline{f}_\nu^{ем}(\alpha).$$

Предложение 6. *Пусть $\mu, \nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $q \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\underline{\dim}_{\mu,\nu,B}^{q,покр}(E) \leq \underline{\dim}_{\mu,\nu,B}^{q,уп}(E),$$
$$\overline{\dim}_{\mu,\nu,B}^{q,покр}(E) \leq \dim_{\mu,\nu,B}^{q,уп}(E).$$

Предложение 7. *Пусть $\mu,\nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $q \in \mathbb{R}$. Если $q \leq 0$, тогда имеет место утверждение*

$$\underline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) \geq \underline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E),$$
$$\overline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) \geq \overline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E).$$

Предложение 8. *Пусть $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $q \in \mathbb{R}$. Если $q > 0$, то выполнены неравенства*

$$\underline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) \geq \underline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E),$$
$$\overline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) \geq \overline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E).$$

Итак, из предложений 6, 7, 8 следует

Следствие.

1) для любого $q \leq 0$ и $\mu,\nu \in P(X)$

$$\underline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) = \underline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E),$$

$$\overline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) = \overline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E).$$

В частности,

$$\underline{L}_{\mu,\nu}(q) = \underline{C}_{\mu,\nu}(q),$$
$$\overline{L}_{\mu,\nu}(q) = \overline{C}_{\mu,\nu}(q).$$

2) для любого $q > 0$ и $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$

$$\underline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) = \underline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E),$$
$$\overline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) = \overline{\dim}^{q,\text{уп}}_{\mu,\nu,B}(E).$$

В частности,

$$\underline{L}_{\mu,\nu}(q) = \underline{C}_{\mu,\nu}(q),$$
$$\overline{L}_{\mu,\nu}(q) = \overline{C}_{\mu,\nu}(q).$$

Предложение 9. *Пусть $\mu,\nu \in P(X)$ и $q \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\overline{\dim}^{q,\text{покр}}_{\mu,\nu,B}(E) \leq \triangle^{q}_{\mu,\nu}(E).$$

Предложение 10. *Если $\mu \in P_D(X)$, $\nu \in P(X)$ и $q > 0$, то*

$$\overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) \geq \triangle^q_{\mu,\nu}(E).$$

Предложение 11. *Если $\mu, \nu \in P(X)$ и $q \leq 0$, то*

$$\overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) \geq \triangle^q_{\mu,\nu}(E).$$

Таким образом, из предложений 9, 10, 11 вытекает

Следствие.

1) для любого $q \leq 0$ и $\mu, \nu \in P(X)$

$$\overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) = \triangle^q_{\mu,\nu}(E).$$

В частности,

$$ESC\overline{C}_{\mu,\nu}(q) = \triangle^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu).$$

2) для любого $q > 0$ и $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$

$$\overline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E) = \triangle^q_{\mu,\nu}(E).$$

В частности,

$$\overline{C}_{\mu,\nu}(q) = \triangle^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu).$$

Предложение 12. *Если $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$, то*

$$\dim^q_{\mu,\nu}(E) \leq \underline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E).$$

Предложение 13. *Если $\mu, \nu \in P(\mathbb{R}^d)$, $q \leq 0$, то*

$$\dim^q_{\mu,\nu}(E) = \underline{\dim}^{q,покр}_{\mu,\nu,B}(E).$$

Из предложений 12, 13 вытекает

Следствие.

1) для любого $q \leq 0$ и $\mu, \nu \in P(X)$

$$\dim^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) \leq L_{\mu,\nu}(q),$$

2) для любого $q \in \mathbb{R}$, $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$

$$\dim^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) \leq \underline{L}_{\mu,\nu}(q).$$

Из теоремы 4 и предложений 6, 7, 8, 12, 13 получим

Следствие. *Если $\mu \in P_D(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in P(\mathbb{R}^d)$, тогда $f_{\mu,\nu}(\alpha) \leq \inf_q(\alpha q + \underline{C}_{\mu,\nu}(q))$, если $\alpha \in (\underline{a}_{\mu,\nu}(q); \overline{a}_{\mu,\nu}(q))$.*

Обобщенные условные размерности Реньи. Для $q \neq 1$ положим

$$\tau^q_r(\mu,\nu) = \frac{1}{q-1}\ln(M^{q;yn}_{\mu,\nu,r}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu)).$$

В случае $q = 1$ пусть $\{E_i\}_i$ — счетное борелевское разбиение $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$, для каждого i выполнено $\operatorname{diam}(E_i) \leq r$ и

$$\tau^1_r(\mu,\nu) = \inf\{\sum_{i\in I}\mu(E_i)\ln\mu(E_i)\}.$$

Следуя определению обобщенных размерностей Реньи [5, 7], определим условные размерности Реньи:

$$\underline{D}^q_{\mu,\nu} = \liminf_{r\to 0}\frac{\tau^q_r(\mu,\nu)}{-\ln r},$$

$$\overline{D}^q_{\mu,\nu} = \limsup_{r\to 0}\frac{\tau^q_r(\mu,\nu)}{-\ln r}.$$

Теорема 9. *Пусть $\mu,\nu \in P(X)$, $q \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\triangle^q_{\mu,\nu}(\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu) = \begin{cases}(q-1)\cdot\underline{D}^q_{\mu,\nu},\\ (q-1)\cdot\overline{D}^q_{\mu,\nu}.\end{cases}$$

Доказательство предложения проводится аналогично доказательству утверждения для обобщенных размерностей Реньи в мультфрактальном формализме Л. Олсена [5].

§ 2. Взаимные точные и емкостные мультифрактальные спектры

В связи с рассмотрением мультифрактальных условных спектров показалось интересным исследовать спектры, построенные следующим образом.

Точные взаимные спектры. Пусть имеются меры $\mu, \nu \in P(X)$, $\alpha, \beta \geq 0$. Обозначим

$$\begin{aligned}
K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}} &= \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \overline{\alpha}_{\mu,\nu} \leq \alpha, \overline{\beta}_{\mu,\nu} \leq \beta\}, \\
K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}} &= \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \underline{\alpha}_{\mu,\nu} \geq \alpha, \overline{\beta}_{\mu,\nu} \leq \beta\}, \\
K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}} &= \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \overline{\alpha}_{\mu,\nu} \leq \alpha, \underline{\beta}_{\mu,\nu} \geq \beta\}, \\
K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} &= \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \underline{\alpha}_{\mu,\nu} \geq \alpha, \underline{\beta}_{\mu,\nu} \geq \beta\}.
\end{aligned}$$

$$K(\alpha,\beta) = K^{\overline{\alpha},\overline{\beta}} \cap K_{\underline{\alpha}}^{\overline{\beta}} \cap K_{\underline{\beta}}^{\overline{\alpha}} \cap K_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu :$$
$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu(B_\delta(x))}{\ln \delta} = \alpha, \quad \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln \nu(B_\delta(x))}{\ln \delta} = \beta\}.$$

Тогда точные нижний и верхний взаимные спектры:

$$f_{\mu,\nu}^{\text{вз}}(\alpha,\beta) = \dim K(\alpha,\beta),$$

$$F_{\mu,\nu}^{\text{вз}}(\alpha,\beta) = \operatorname{Dim} K(\alpha,\beta),$$

где $\dim, \operatorname{Dim}$ — соответственно Хаусдорфова и упаковочная меры.

Емкостные взаимные спектры. Пусть имеются меры $\mu, \nu \in P(X)$, $X = \mathbb{R}^d$, $\epsilon > 0$. Зафиксируем положительное r. Выберем конечную или счетную центрированную упаковку $\{B_r(x_i)\}$ множества $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$. Положим

$$N_r(\alpha,\beta,\epsilon) = \sup\{\operatorname{card}\{B_r(x_i) : i \in I : \forall i \in I,$$
$$\alpha - \epsilon \leq \frac{\ln \mu(B_r(x_i))}{\ln r} \leq \alpha + \epsilon,$$
$$\beta - \epsilon \leq \frac{\ln \nu(B_r(x_i))}{\ln r} \leq \beta + \epsilon\}.$$

Нижний и верхний емкостные взаимные мультифрактальные спектры определим следующим образом

$$\underline{f}_{\mu,\nu}^{\text{ем,вз}}(\alpha,\beta) = \liminf_{\epsilon\to 0} \liminf_{r\to 0} \frac{\ln N_r(\alpha,\beta)}{-\ln r},$$

$$\overline{f}_{\mu,\nu}^{\text{ем,вз}}(\alpha,\beta) = \liminf_{\epsilon\to 0} \limsup_{r\to 0} \frac{\ln N_r(\alpha,\beta)}{-\ln r}.$$

Теорема 10. $f^{вз}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \le \underline{f}^{ем,вз}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta)$.

Доказательство. *Пусть $f^{вз}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) = \dim K(\alpha,\beta) = t$. Выберем произвольное $\epsilon > 0$ и $m \in N$. Положим*

$$T_m = \{x \in \operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu : \alpha - \epsilon \le \frac{\ln\mu(B_r(x_i))}{\ln r} \le \alpha + \epsilon,$$
$$\beta - \epsilon \le \frac{\ln\nu(B_r(x_i))}{\ln r} \le \beta + \epsilon, \quad 0 < r < \frac{1}{m}\}.$$

Тогда $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\bigcup\limits_m T_m = K(\alpha,\beta)$. Поскольку $\mathcal{H}^{t-\epsilon}(K(\alpha,\beta)) = \infty$ и множества T_m вложены друг в друга, то найдется такое $\delta > 0$ и натуральное m, что $\mathcal{H}^{t-\epsilon}_\delta(T_m) \ge 1$. В таком случае обязательно существует такая центрированная η-упаковка $\{B_\eta(x_i)\}_i$ множества $\operatorname{supp}\mu \cap \operatorname{supp}\nu$, что $\eta < \frac{1}{m}$, $\eta < \frac{\delta}{2}$. Для каждого i выполнено

$$\alpha - \epsilon \le \frac{\ln\mu(B_\eta(x_i))}{\ln\eta} \le \alpha + \epsilon, \quad \beta - \epsilon \le \frac{\ln\nu(B_\eta(x_i))}{\ln\eta} \le \beta + \epsilon.$$

Предположим, что количество шаров $B_\eta(x_i)$ упаковки совпадает с $N_\eta(\alpha,\beta,\epsilon)$. Тогда очевидно, что $\{B_{2\eta}(x_i)\}_i$ является покрытием множества T_m. Далее,

$$N_\eta(\alpha,\beta,\epsilon)(2\eta)^{t-\epsilon} = \sum_i (2\eta)^{t-\epsilon} \ge \mathcal{H}^{t-\epsilon}_\delta(T_m) \ge 1.$$

Тогда для каждого положительного $\eta < \frac{1}{m}$ и $\eta < \frac{\delta}{2}$

$$\ln N_\eta(\alpha,\beta,\epsilon)\cdot(\eta)^{t-\epsilon} \ge 0.$$

Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ получим

$$\liminf_{\eta\to 0}\frac{\ln N_\eta(\alpha,\beta,\epsilon)}{-\ln\eta} + \epsilon \ge t.$$

Если $\epsilon \to 0$, то $t \le \underline{f}^{ем,вз}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta)$. $\square$

Теорема 11. $F^{вз}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta) \le \overline{f}^{ем,вз}_{\mu,\nu}(\alpha,\beta)$.

Доказательство. В доказательстве теоремы используются похожие рассуждения доказательства предыдущей теоремы и известный факт, что

$$\mathrm{Dim}(\operatorname{supp}\mu) = \sup_{\operatorname{supp}\mu \subseteq \bigcup_m A_m} \overline{\dim}_B(A_m)$$

(см. [6]). □

Résumé

This paper introduces a formalism for the multifractal analysis of one probability measure with respect to another. The conditional and the mutual multifractal spectra are considered, which give the better understanding of influence of local geometry of fractal measures against each other.

Литература

[1] Cole J. *Relative multifractal analysis*/ J. Cole// Chaos, solitons & fractals. 2000. № 11. P. 2233–2250.

[2] Das M. *Local properties of self–similar measures*/ M. Das// Illinois journal of mathematics. 1998. № 42. P. 313–332.

[3] Dansereau R. *New relative multifractal dimension measures*/ R. Dansereau, W. Kinser: Preprint. Manitoba, 2001.

[4] Levy Vehel J. *Multifractal analysis of Choquet capacities*/ J. Levy Vehel, R. Vojak// Advances in applied mathematics. 1998. № 20. P. 1–43.

[5] Olsen L. *A multifractal formalism*/ L. Olsen// Advances in mathematics. 1995. № 116. P. 82–195.

[6] Olsen L. *Multifractal geometry*/ L. Olsen// Progress in probability. 2000. V. 46. P. 3–37.

[7] Riedi R. *An improved multifractal formalism and self–similar measures*/ R. Riedi// Journal of math. analysis and application. 1995. № 189. P. 462–490.

[8] Riedi R. *Conditional and relative multifractal spectra*/ R. Riedi, I. Scheuring// Fractals. 1997. V. 5. № 1. P. 153–168.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185640, Петрозаводск, пр. Ленина, 33
E-mail: nsvetova@mainpgu.karelia.ru